大学数学学习方法指导丛书（II辑）

实分析与泛函分析

徐胜芝 编著
复旦大学数学科学学院 主编



復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

当今时代，数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，它和其他学科的交互作用空前活跃，越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献，也成为其掌握者打开众多机会大门的钥匙。

- 数学思想、数学方法、数学技巧三位一体，构筑了数学理论体系。
- 数学思想是数学理论的基础，是数学理论体系的发端，并推进和提升数学理论体系，使其更加完美。
- 数学方法是构建数学理论框架的工具，也是分析、判断、解决问题的工具。
- 数学技巧能引发、开拓、深化学习者思维，训练他们，使其具有丰富的想象力和敏锐的观察力。

学习好数学，重要的是要领会它的思想、掌握它的方法、熟练它的技巧。愿《大学数学学习方法指导丛书》能给读者以启迪和指导。

大学数学学习方法指导丛书（Ⅰ辑）

《数学分析》 姚允龙编著
《高等数学》 张万国编著
《高等代数》 姚慕生编著
《差分方程和常微分方程》 阮炯编著
《概率论与数理统计》 李贤平等编著

大学数学学习方法指导丛书（Ⅱ辑）

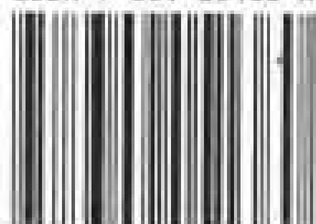
《空间解析几何与微分几何》 黄宣国 编著
《数学物理方程》 陈恕行 秦铁虎 周忆 编著
《复变函数》 张锦豪 邱维元 编著
《实分析与泛函分析》 徐胜芝 编著
《计算方法》 朱大训 编著

大学数学学习方法指导丛书（Ⅲ辑）

《线性代数》 姚慕生 编著

……

ISBN 7-309-05136-X



O·309 定价：50.00元

策划编辑 范仁梅
责任编辑 范仁梅

大学数学学习方法指导丛书(Ⅱ辑)

实分析与泛函分析

复旦大学数学科学学院 主编

徐胜芝 编著

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实分析与泛函分析/徐胜芝编著. 一上海:复旦大学出版社,2006.9
(大学数学学习方法指导丛书)(Ⅱ辑)
ISBN 7-309-05136-X

Ⅰ. 实… Ⅱ. 徐… Ⅲ. ①实分析-高等学校-教学参考资料 ②泛函分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 096928 号

实分析与泛函分析

徐胜芝 编著

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65118853(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印　　刷 上海华文印刷厂
开　　本 787×960 1/16
印　　张 35.25
字　　数 651 千
版　　次 2006 年 9 月第一版第一次印刷
印　　数 1—5 100

书　　号 ISBN 7-309-05136-X/O·309
定　　价 50.00 元

内 容 提 要

本书是大学本科生和研究生学习实分析和泛函分析的参考书．实分析部分在前四章，它围绕测度和积分的基本理论和方法展开，内容包括：集合与关系、测度与可测函数、积分及其性质、微分和不定积分．泛函分析部分在后四章，它围绕点集分析与线性算子的基本理论与方法展开，内容包括：距离与点集分析、有界线性算子、内积空间的几何、线性算子谱理论等．这两部分是大学本科生和研究生学习其他数理学科的重要理论基础．书中总结了实分析与泛函分析的主要理论与方法，为使学习者提高用集合分析的办法解决问题的能力，每节配备了一些例题和习题以及习题解答与提示．

序　言

10 多年前，复旦大学数学科学学院（原数学系和数学研究所）几位教师编写了一套《大学数学学习指导》丛书. 丛书出版后颇受欢迎，不久即告售罄. 其后，兄弟院校的同行和不少青年学子纷纷来函求购，出版社也多次与我们联系再版事宜，只是作者们长期承担着繁重的教学和科研任务，无暇顾及修订工作. 近年来，随着学科的发展，课程建设又提上了议事日程. 我院一些重要基础课的新教材陆续问世，与此同时，不少教师再次萌发了重新整理、总结在教学工作中积累起来的心得的意愿. 在复旦大学出版社的促进下，推出这套全新的丛书也时机成熟、水到渠成了.

数学科学的发展正处于一个不平凡的时期. 科学技术的进步、实践应用的增多、计算机的影响以及数学科学自身的发展大大拓广了数学科学的范围和领域. 在不少场合，数学已经从科学的幕后大步跨上了技术应用的前台，成为打开众多机会大门的钥匙. 这就导致社会对其成员数学能力的要求不断提高，期望涌现出更多数学基础扎实、创新能力较强、知识面宽广、综合素质上佳的数学人才. 相应地，数学教育的目标，也就不仅在于为学生提供一种专业知识的传授，更重要的在于引导学生掌握一种科学的语言，学到一种理性思维的模式，接受包括演绎、归纳、分析和类比等各项数学素质的训练. 卓有成效的数学训练将为学生充分参与未来世界的竞争作好准备.

数学的理论是美妙的，引人入胜；数学的方法是精巧的，丰富多彩；但学好数学却必须付出艰辛的劳动. 在教学过程中，我们经常遇到这样的学生：他们能背出一些基本的公式，却做不了略有变化的演算，他们能记住一些基本的定理，却给不出稍分层次的推理. 有些学生依然留恋早年接受的、为应试教育而被不恰当地夸大了的“题型教学”，不理解这种训练手段怎么在大学课堂里销声匿迹了. 这些学生学习数学的方法大多较为稚嫩，他们对数学知识只停留于形式的理解，并未达到实质的掌握. 其实，与大多数其他学科相比，数学能为学生提供更多的学习独立思考的机会. 在任何一门数学课程的学习过程中，起主导作用的并非教师，而是学生. 学生学习数学的过程应当是一个再创造的过程. 学生应当按自已的认识去解释、分析所学的内容，用新的观点去改造原有的理解，从而在个人数学知识的库藏中打上自己特有的烙印. 只有通过深入的思考，将吸收的新知识有

机地融入原有知识结构中，用心灵的创造来体验数学，对抽象的对象建立起直观的理解，才能真正地学好数学．我们希望这套丛书能在方法上为学生学习数学提供有益的借鉴与启迪．

虽然，学习数学的方法因人而异．但是，数学课程的一些基本环节却是值得共同注意的．首先，要学好一门数学课程，毋庸置疑应掌握它所包含的最基本的数学思想．这就是说，既要深入理解有关对象的概念和性质，又必须把一系列的定义和定理科学地融合在一起，从整体上把握这个知识体系的发端、推进和提升，融会贯通地领悟贯穿于课程中的数学思想与精神．其次，数学思想是通过特定的数学方法来实现的，每门课程所蕴含的数学方法提供了构筑相应理论框架的主要工具，也提供了作出分析、判断、转化、求解等具体策略的依据．从猜想的形成、分析的展开，到计算、推理的实施、提炼、拓广的升华，数学方法在解决问题的过程中处处体现着自身的价值．再次，每门数学课程都有不少特殊的数学技巧．它们不仅显示了运算与论证的灵活性，而且是各种成功的数学方法所不可缺少的重要因素．一个有相当深度的技巧往往来自丰富的想象和敏锐的观察．数学技巧的介绍与训练，对学生思维的引发、开拓和深化有十分重要的意义．总之，数学思想、数学方法和数学技巧三位一体，共同构成了有血有肉的一门门数学课程．因此，要学好数学，也就必须在领会思想、掌握方法、熟练技巧上多下功夫．

正是基于上述认识，在这套丛书中，每一册大体包括概念和性质的简介与提要、主要方法与典型例题的分析与讨论．同时，还配置了一定数量的习题．希望读者可参照这个内容的三部曲，通过对数学思想、方法和技巧的思考和消化，把解决数学问题的能力提高到一个新的台阶．

编写这套丛书的作者们都有丰富的教学经验，他们在编写时还注意到兼顾读者的多种需要：无论是学生在学习相应课程时同步使用，还是在学完一门课程后作总复习的参考，抑或为报考研究生而作考前准备，都将从中获得较大的收获．我们也愿意借助这套丛书与兄弟院校的同行们作广泛的教学交流．

复旦大学数学科学学院将这套丛书的编写列入加强本科教学工作的计划中．数学科学学院的许多教授对如何编好这套丛书提出了一系列中肯的建议，为提高丛书质量创造了有利条件．复旦大学出版社的范仁梅女士对这套丛书的策划和编辑倾注了大量的心血．我们对以上诸位在此一并致以诚挚的谢意．

限于水平，这套丛书的错误与缺陷在所难免，殷切地期望广大读者不吝指正．希望通过作者与读者的共同努力，经日后修订，使这套丛书日趋成熟．

复旦大学数学科学学院
教学指导委员会

前　言

实分析与泛函分析是在数学和物理的快速发展和推动下而成长起来的数学学科，其思想方法广泛地渗透于理论与应用的各个方面而获得丰富成果．目前高等学校的数学类专业都设置了这两门课，学习并掌握实分析与泛函分析的基本思想方法将为学习其他数理学科打好坚实的基础．

各高校对这两门课的讲授程度略有差异，但对实分析与泛函分析的基本要求还是一致的．编写本书的目的就是希望对学习者理解与应用这两门学科的理论在方法上有所帮助．

几年的教学体会使编者深刻理解到，部分初学者对实分析和泛函分析存有的畏难心理在于这两门课都非常强调概念的重要性，大量的命题、例子和练习则是不同概念之间联系的桥梁．有的初学者已养成的习惯是用一个或几个公式解决相同类型题目，而在基本概念上只用少量的时间和精力去讨论．甚至有人觉得只有文科才强调概念的重要性．事实上，所有学科的精髓是概念，大量的推理和实验都是在阐述不同概念之间的联系或者提炼未解决问题中所蕴含的概念．问题的解决程度与学习者对概念的理解程度是密切相关的．有些问题看似困难，但学习者若能联系诸如数学分析和复分析、微分方程和数值分析、代数和几何等一门或几门学科的基本概念和理论及其相关方法就能容易解决．反过来，解决好这些问题对学习者理解实分析和泛函分析在其他学科中的应用也将起到推动作用．

因此掌握概念并理解概念在命题的推理过程中所起的作用是学好实分析与泛函分析乃至其他学科的关键．要做到这一点，就需要学习者了解概念和命题是为解决什么问题而产生的、这些问题在数学和科学发展史上所产生的影响；就需要学习者了解一点数学史和其他学科史并从这些历史中汲取营养，就需要学习者演算一定数量的习题并从大量推理过程中产生解决类似问题的想法．本书属于教学辅导类的，主要是提供习题与其解决方法的，所选的习题覆盖面广，适合不同程度学习者的要求．带星号的习题有较大难度，其中一些习题将不同数学领域中的问题联系了起来．有些题目是一些学者的研究成果，本书带上了他们的名字以示敬意．

本书大部分习题来源于本书后面所列参考文献，小部分习题来源于编者的心得，个别习题来源于与一些教师和学生的交流．编者因此对他们深表谢意．编者

还感谢复旦大学出版社的范仁梅同志，她对本书提出了许多宝贵的建议并对本书的出版给予了很大帮助.

由于编者水平所限，书中难免有不当之处．若您对本书有什么建议，请不吝指正．您的宝贵建议将有助于编者和读者更好地理解这两门学科的理论和应用，编者在此深表感激.

编者 2006 年 4 月

目　录

第 1 章

集合与关系

学好实分析需要掌握两类基本工具：一类是集合的各种运算，另一类是数列极限和级数求和. 集合运算就像数的四则运算那样基本，为现代数学不可缺少的工具. 实数系中的数列和级数在数学分析中已大量讨论过了，其中的大部分理论仍适用. 本书只是将数列和级数推广至广义实数系上，比如数列和级数本身的项可以取值为无穷大. 这需要学习者注意其中的细微区别就可以了.

§1.1 集合及其运算

元素 x 与集合 X 有且只有两种互斥的可能性[1]：式子 $x \in X$ 表示 x 属于 X，即 x 在 X 中；式子 $x \notin X$ 则表示 x 不属于 X，即 x 不在 X 中. 以 $X = Y$ 表示 X 和 Y 是相等集合 — 具有相同元素的集合. 以下是一些常用集合：

(1) $\mathbb{N}$ 是从 0 数起的自然数全体.

(2) $\mathbb{Z}$ 是整数全体，称为整数环，其中非负整数就是自然数.

(3) $\mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{N}_+$ 都表示正整数全体. 因此 $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}_+$.

(4) $\mathbb{Q}$ 是有理数全体，称为有理数域.

(5) $\mathbb{R}$ 是实数全体，称为实数域或实直线. 实数分有理数和无理数.

(6) $\mathbb{C}$ 是复数全体，称为复平面或复数域. 复数 z 都形如 $x + \sqrt{-1}y$，其中 x 和 y 是实数而 $\sqrt{-1}$ 是虚数单位. 请注意 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$，这是非负实数.

集合的表示 元素不多的集合可用 *枚举法* 将元素逐一列出来. 如 $\{0\}$ 是 *单点集* — 仅含一个元素的集合，自然数集 $\mathbb{N}$ 可写成 $\{0, 1, 2, \cdots\}$，而整数环 $\mathbb{Z}$ 可写成 $\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$. 用枚举法表示集合时，元素的排列不分先后且重复的元素仅算一个. 因此 $\{2, 1, 2, 1\} = \{1, 2\}$.

集合都可用 *描述法* 而写成 $\{x|P(x)\}$ 或 $\{x : P(x)\}$，其中 P 是刻画这个集合元素特征的一个性质. 如 $\{x|x \neq x\}$ 是 *空集* — 不含任何元素的集合，这记为 $\varnothing$. 又 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 是复平面的单位圆周，这记为 $\mathbb{T}$.

---

[1] 模糊集合论中元素与模糊集合的关系远非如此简单，但本书只用经典集合论.

Hamilton 创立的四元数体 $\mathbb{H}$ 可描述如下

$$\mathbb{H}=\{a+b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k}\,|a,b,c,d\in\mathbb{R}\},$$

它的实线性基可枚举成 $\{1,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.

以 $\overline{\mathbb{R}}$ 表示全体实数与正无穷大 $+\infty$ 和负无穷大 $-\infty$ 所成之集, 称为广义实数系. 像实数系一样, 广义实数系 $\overline{\mathbb{R}}$ 也有 4 类区间. 设 $-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$, 规定以 a 和 b 为端点的 4 个区间如下:

(1) 开区间 $(a,b)=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\,|a<x<b\}$, 这在 $a=b$ 时是空集.

(2) 闭区间 $[a,b]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\,|a\leqslant x\leqslant b\}$, 这在 $a=b$ 时是单点集.

(3) 左开右闭区间 $(a,b]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\,|a<x\leqslant b\}$, 这在 $a=b$ 时是空集.

(4) 左闭右开区间 $[a,b)=\{x\in\overline{\mathbb{R}}\,|a\leqslant x<b\}$, 这在 $a=b$ 时是空集.

子集 以 $A\subset B$ 或 $B\supset A$ 表示集合 A 是集合 B 的真子集: A 的元素都在 B 中但 B 有元素不在 A 中. 如 $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\subset\mathbb{H}$.

以 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$ 表示 A 是 B 的子集或 B 是 A 的超集: A 的元素都在 B 中, 这有且只有两种情形: $A\subset B$ 或 $A=B$.

(1) 空集是任何集合的子集: $\varnothing\subseteq A$.

(2) 自反性: 当 A 是集合时, $A\subseteq A$.

(3) 反称性: 当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 时, $A=B$.

(4) 传递性: 当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$ 时, $A\subseteq C$.

(5) 上定向性: 当 A 和 B 是集合时, 有集合 C 使 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq C$.

(6) 下定向性: 当 A 和 B 是集合时, 有集合 C 使 $A\supseteq C$ 且 $B\supseteq C$.

请注意, "当 $\cdots$ 时" 也可写成 "如果 $\cdots$ (或立)". 因此 "当 $A\subseteq B$ 时, $B\supseteq A$" 可写成 "如果 $A\subseteq B$, 则 $B\supseteq A$". 下面回顾一些表达式与符号.

式子 P$\Rightarrow$Q 表示当 P 成立时, Q 成立; 而 P$\Leftarrow$Q 则表示 Q 成立时, P 成立. 这两者同时成立或同时不成立时, 记为 P$\Leftrightarrow$Q. 行文中的 "当且仅当" 代表 "充要条件", 其中 "当" 代表 "充分性" 而 "仅当" 代表 "必要性".

在证明 $A\subseteq$ 时, 可用这种方式: $x\in A\Rightarrow\cdots\Rightarrow x\in B$. 在证明 $A=B$ 时, 可用这种方式: $x\in A\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow x\in B$.

符号 $\forall$ 表示 "对任意" 而 $\exists$ 表示 "存在" 或 "有". 如 $A\subseteq B$ 可写成 $\forall x\in A:x\in B$, 面 $A\not\subseteq B$ 则写成 $\exists x\in A:x\notin B$. 将命题改成反命题时, 应将其中的 $\forall$ 改成 $\exists$, 而将 $\exists$ 改成 $\forall$. 如将 $A=B$ 表示成 $\forall x\in A:x\in B$ 且 $\forall y\in B:y\in A$ 时, $A\neq B$ 则应表示成 $\exists x\in A:x\notin B$ 或 $\exists y\in B:y\notin A$.

下面用符号 $\forall$ 规定一些集合 (其中每个集合赋予了相应的名称):

(1) 整系数多项式环 $\mathbb{Z}[x]=\{\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i|n\in\mathbb{N}\forall i\leqslant n:a_i\in\mathbb{Z}\}$,

(2) 有理系数多项式环 $\mathbb{Q}[x]=\{\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i|n\in\mathbb{N}\forall i\leqslant n:a_i\in\mathbb{Q}\}$,

(3) 实系数多项式环 $\mathbb{R}[x]=\{\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i|n\in\mathbb{N}\forall i\leqslant n:a_i\in\mathbb{R}\}$,

(4) 复系数多项式环 $\mathbb{C}[x]=\{\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i|n\in\mathbb{N}\forall i\leqslant n:a_i\in\mathbb{C}\}$.

这些多项式环满足不等式: $\mathbb{Z}[x]\subset\mathbb{Q}[x]\subset\mathbb{R}[x]\subset\mathbb{C}[x]$. 此处的"不等式"不再表示实数的大小关系式而表示集合的包含关系式. 以后"不等式"还会用到另外一些具有大小性质的关系上去.

有限个集合的运算 并$A\cup B$ 由 A 与 B 的所有元素组成. 交$A\cap B$ 由 A 与 B 的公共元素组成. 差$A\setminus B$ 由不属于 B 的 A 中元素组成. 对称差

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

零元律: $A\cup\varnothing=A\setminus\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.

交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$, $A\Delta B=B\Delta A$.

结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

结合律: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律: $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$.

单调性: $A_1\subseteq A_2$ 且 $B_2\subseteq B_1$ 时, $A_1\setminus B_1\subseteq A_2\setminus B_2$.

以后还需要考虑集簇 $A_i(i\in I)$ 的并与交等, 其中每个 A_i 是以 i 为下标的集合而 I 称为指标集. 如 $(-\infty,r](r\in\mathbb{Q})$ 是以有理数集为指标集的区间簇.

集簇的运算 集簇 $A_i:i\in I$ 中所有 A_i 的所有元素组成 并

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup\{A_i|i\in I\}:=\{x|\exists i\in I:x\in A_i\},$$

如 $\bigcup\{(-p,p)|p\text{是素数}\}=\mathbb{R}$. 集簇的 交 是

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\bigcap\{A_i|i\in I\}:=\{x|\forall i\in I:x\in A_i\},$$

它由所有 A_i 的公共元素组成. 如 $\bigcap\{(q,q+1)|q\text{是合数}\}=\varnothing$.

此处的符号 $:=$ 表示将右边的运算值赋予左边的量. 如当 $z=1$ 时, $x:=2z$ 表示 $x=2$. 这个符号常用于编程, 本书借用其功能. 下面是一些集合运算律:

幂等律: $\bigcup\limits_{i\in I}A=A$, 其中 $I\neq\varnothing$ 且每个指标 $i\in I$ 对应的集合都是 A.

幂等律: $\bigcap_{i\in I} A = A$, 其中 $I \neq \varnothing$ 且每个指标 $i \in I$ 对应的集合都是 A.

对偶律 (或 De Morgan 律): $B \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B \setminus A_i)$.

对偶律 (或 De Morgan 律): $B \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B \setminus A_i)$.

结合律: $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I_j} A_i$, 其中 $I = \bigcup_{j\in J} I_j$.

结合律: $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I_j} A_i$, 其中 $I = \bigcup_{j\in J} I_j$.

分配律: $B \cap (\bigcup\{A_i|i \in I\}) = \bigcup\{B \cap A_i|i \in I\}$.

分配律: $B \cap (\bigcap\{A_i|i \in I\}) = \bigcap\{B \cap A_i|i \in I\}$.

分配律: $(\bigcup\{A_i|i \in I\}) \setminus B = \bigcup\{A_i \setminus B|i \in I\}$.

分配律: $(\bigcap\{A_i|i \in I\}) \setminus B = \bigcap\{A_i \setminus B|i \in I\}$.

分配律: $B \cup (\bigcap\{A_i|i \in I\}) = \bigcap\{B \cup A_i|i \in I\}$.

分配律: $B \cup (\bigcup\{A_i|i \in I\}) = \bigcup\{B \cup A_i|i \in I\}$.

单调性: 设 $A_i \subseteq B_i (i \in I)$, 则 $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$.

在证明集簇运算的不等式时, 需要注意 $\forall$ 对应 $\cap$, 而 $\exists$ 对应 $\cup$.

例 1 设 x 是实数, 则 $x \geqslant 0$ 当且仅当 $\exists n \in \mathbb{N} : n \leqslant x < n+1$. 据 $\exists$ 与 $\cup$ 的对应关系, 得 $[0, +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1)$.

集簇 $A_i(i \in I)$ 中每个集合当成元素时得到的集合 $\{A_i|i \in I\}$ 称为集类——以集合为成员的非空集合, 将 A_i 称为这个集类的成员以区别于 A_i 自身的元素.

例 2 集类 $\{[n-1, n]|n \in \mathbb{Z}\}$ 的成员是端点为整数且长度为 1 的闭区间.

集类可理解为集合的集合. 表示集类常用以下字体:

$$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ}.$$

集类 $\mathcal{A}$ 中所有成员之并记为 $\bigcup\mathcal{A}$, 其中所有成员之交记为 $\bigcap\mathcal{A}$.

补集 固定一个集合 X. 当 $A \subseteq X$ 时, 称 $X \setminus A$ 为 A 在 X 中的补集或余集. 这可用 A^c 来表示. 如 $(0, +\infty)$ 在 $\mathbb{R}$ 中的补集是 $(-\infty, 0]$. 利用补集可简化一些集合运算, 这依赖于以下性质 (以下集合都设为 X 的子集).

(1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c$.

(2) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c \Leftrightarrow A \cap B^c = \varnothing$.

(3) 对偶律: $(\bigcup\{A_i|i \in I\})^c = \bigcap\{A_i^c|i \in I\}$.

(4) 对偶律: $(\bigcap\{A_i|i \in I\})^c = \bigcup\{A_i^c|i \in I\}$.

称集合 A 和 B 不交是指 $A\cap B=\varnothing$. 集簇 $A_i(i\in J)$ 相互不交是指 $i\neq j$ 时 A_i 和 A_j 不交. 符号 $\bigsqcup$ 强调 *无交并*— 相互不交集簇的并. 如

$$\bigsqcup\{(n-1,n]|n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{R}.$$

设 A_n 是以正整数 n 为下标的集合, 称 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 为集列, 可简记为 (A_n). 称 (A_n) 为 *递增集列* 是指 $A_1\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$. 如 $([n-1,n])_{n=1}^{\infty}$ 是递增区间列. 称 (A_n) 为 *递减集列* 是指 $A_1\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$.

集列的极限 属于集列 (A_n) 中无限多项的元素组成 *上限集*

$$\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{m\geqslant n}A_m.$$

而属于集列 (A_n) 中某个指标以后所有集合的那种元素组成 *下限集*

$$\varliminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{m\geqslant n}A_m.$$

集列 (A_n) 的上限集和下限集相等时记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$. 这称为 (A_n) 的 *极限*.

(1) $\bigcap\limits_{n\geqslant 1}A_n\subseteq\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n\subseteq\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n\subseteq\bigcup\limits_{n\geqslant 1}A_n$.

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(S\setminus A_n)=S\setminus\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(S\setminus A_n)=S\setminus\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$.

(3) $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $(n)_{n=1}^{\infty}$ 的子列时, $\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n\subseteq\varliminf\limits_{n\to\infty}A_{k_n}$.

(4) $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $(n)_{n=1}^{\infty}$ 的子列时, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_{k_n}\subseteq\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$.

(5) (A_n) 递增时, 记 $A=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}A_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$. 称 (A_n)*递增至*A.

(6) (A_n) 递减时, 记 $A=\bigcap\limits_{n\geqslant 1}A_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$. 称 (A_n)*递减至*A.

(7) $(\bigcup\limits_{m\geqslant n}E_m)_{n=1}^{\infty}$ 递减至 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n$; $(\bigcap\limits_{m\geqslant n}E_m)_{n=1}^{\infty}$ 递增至 $\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n$.

(8) 压缩集列保持总量不变的方法: 对于集列 (A_n), 归纳地命

$$B_1=A_1,\cdots,B_n=A_n\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}),\cdots,$$

则 (B_n) 是满足条件 $\bigcup\limits_{i<l}A_i=\bigsqcup\limits_{i<l}B_i:1<l\leqslant\infty$ 的唯一集列.

熟练掌握并应用本节介绍的集合运算律是学好实分析的前提.

例 3 设 $A_{2n-1}=[0,2]$ 且 $A_{2n}=[1,3]$, 则 $\bigcup\limits_{n\geqslant m}A_n=[0,3]$ 且 $\bigcap\limits_{n\geqslant m}A_n=[1,2]$. 于是 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n=[0,3]$ 且 $\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n=[1,2]$.

例 4 因为 $1 < x \leqslant 2 \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 : 1 + 1/n \leqslant x \leqslant 2$ 且注意到 $\exists$ 与 $\cup$ 的关系，所以 $(1,2]$ 为递增区间列 $[1+1/n,2] : n \geqslant 1$ 的极限.

因为 $1 \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow \forall n \geqslant 1 : 1 \leqslant x < 2 + 1/n$ 且注意到 $\forall$ 与 $\cap$ 的关系，所以 $[1,2]$ 为递减区间列 $([1, 2+n^{-1}))_{n=1}^{\infty}$ 的极限.

两个元素 a 与 b 组成的有序对 (a,b) 也是一个元素，它与 (b,a) 不必相等. 请不要将 (a,a) 简写成 a. 多个元素组成的有序组 $(a_1,\cdots,a_n)$ 也算一个元素，这个元素的 n 个分量依次为 $a_1,\cdots,a_n$.

Descartes 积与截口 (一) 分量依次在 $X_1,\cdots,X_n$ 中的 n 元组所成的集合

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1,\cdots,x_n) | x_1 \in X_1,\cdots,x_n \in X_n\}$$

称为 Descartes 积，其中两个 n 元组 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $(y_1,\cdots,y_n)$ 相等是指它们的对应分量相等： $x_1 = y_1,\cdots,x_n = y_n$.

如 $\{2\} \times \{3,4\} = \{(2,3),(2,4)\}$ 而 $\{3,4\} \times \{2\} = \{(3,2),(4,2)\}$. 可见， Descartes 积不服从交换律. 下面介绍 Descartes 积的运算律.

分配律： $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

分配律： $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

分配律： $(\bigcup\{A_i|i \in I\}) \times B = \bigcup\{A_i \times B|i \in I\}$.

分配律： $(\bigcap\{A_i|i \in I\}) \times B = \bigcap\{A_i \times B|i \in I\}$.

分配律： $A \times (\bigcup\{B_i|i \in I\}) = \bigcup\{A \times B_i|i \in I\}$.

分配律： $A \times (\bigcap\{B_i|i \in I\}) = \bigcap\{A \times B_i|i \in I\}$.

单调性： $A_1 \subseteq A_2$ 且 $B_1 \subseteq B_2$ 时， $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$.

(二) 当 $X_1,\cdots,X_n$ 同为集合 X 时，记 $X^n = \prod_{i=1}^{n} X$, 其 对角线 为集合

$$\operatorname{diag} X^n = \{x \in X^n | x_1 = \cdots = x_n\}.$$

Descartes 积 $\mathbb{Z}^n$ 中元素是格点 — 其坐标分量都是整数. Descartes 积 $\mathbb{Q}^n$ 中元素是有理点 — 其坐标分量都是有理数.

指数律：当 k 和 l 是正整数时， $X^k \times X^l = X^{k+l}$ 且 $(X^k)^l = X^{kl}$.

(三) 当 $x = (x_i)_{i \in I}$ 时，称 x_i 是 x 的第 i 坐标分量. 如 $(3,2,1)$ 的第一个坐标分量是 3, 第二个坐标分量是 2, 第三个坐标分量是 1. 命

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} | \forall i \in I : x_i \in X_i\},$$

这称为集簇 $X_i (i \in I)$ 的 Descartes 积. 它在 X_i 同为 X 时记为 X^I.

(四) 子集 $G \subseteq X \times Y$ 在 $a \in X$ 处截口 G_a 和在 $b \in Y$ 处截口 G^b 为

$$G_a = \{y \in Y | (a, y) \in G\},$$
$$G^b = \{x \in X | (x, b) \in G\}.$$

如设 $G = E \times F$. 当 $x \in E$ 时, $G_x = F$; 否则, $G_x = \varnothing$. 当 $y \in F$ 时, $G^y = E$; 否则, $G_y = \varnothing$.

(1) 截口保持单调性: $G \subseteq H \Rightarrow G_x \subseteq H_x, G^y \subseteq H^y$.

(2) 截口保持并运算: $(\bigcup_{i \in I} G_i)_x = \bigcup_{i \in I} (G_i)_x, (\bigcup_{i \in I} G_i)^y = \bigcup_{i \in I} (G_i)^y$.

(3) 截口保持交运算: $(\bigcap_{i \in I} G_i)_x = \bigcap_{i \in I} (G_i)_x, (\bigcap_{i \in I} G_i)^y = \bigcap_{i \in I} (G_i)^y$.

(4) 截口保持差运算: $(G \setminus H)_x = G_x \setminus H_x, (G \setminus H)^y = G^y \setminus H^y$.

(5) 若 $G \cap H = \varnothing$, 则 $G_x \cap H_x = \varnothing$ 且 $G^y \cap H^y = \varnothing$.

设 $F \subseteq X \times Y$ 使每个 $x \in X$ 处的截口 F_x 只含一点 $f(x)$, 称 F 为映射 $f : X \to Y$ 的 图像 并记为 $\operatorname{gr} f$. 因此 $\operatorname{gr} f = \{(x, f(x)) | x \in X\}$. 记 $\operatorname{dom} f = X$, 这称为 f 的定义域. 映射与其图像相互唯一确定: 映射 $f_1, f_2 : X \to Y$ 相等是指 $\operatorname{gr} f_1 = \operatorname{gr} f_2$. 换言之, $x \in X$ 时, $f_1(x) = f_2(x)$.

像集与原像集 设 $f : X \to Y$ 是映射.

(一) 对于 $B \subseteq Y$, 命 $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$, 这称为 B 在映射 f 下的原像. 如 $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ 且 $f^{-1}(Y) = X$. 对于 $A \subseteq X$, 命 $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$(即 $\{y | \exists x \in A : y = f(x)\}$), 这称为 A 在映射 f 下的像. 如 $f(\varnothing) = \varnothing$. 记 $\operatorname{ran} f = f(X)$, 这是 f 的值域.

(1) 像集保持单调性: $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

(2) 像集保持并运算: $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

(3) 原像保持单调性: $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(4) 原像保持并运算: $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

(5) 原像保持交运算: $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

(6) 原像保持差运算: $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

(7) 原像保持补运算: $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.

(8) $f(A) \subseteq B$ 当且仅当 $A \subseteq f^{-1}(B)$.

(二) 设 $y_0 = f(x_0)$, 称 y_0 是 x_0 在 f 下的像或 f 在 x_0 处的值; 而 x_0 是 y_0 在 f 下的一个原像或是方程 $f(x) = y_0$ 的一个解.

每个 $y \in Y$ 至多有一个原像时, 称 f 是单射. 这等价于 $f(x_1) = f(x_2)$ 时, $x_1 = x_2$. 常用的单射有 包含映射$\eta : A \to X$, 其中 $\varnothing \neq A \subseteq X$ 且总有

$\eta(x)=x$. 在单射 $f:X\to Y$ 下, 将 x 与 $f(x)$ 等同后可将 X 视为 Y 的子集. 这是表示论的原始想法.

每个 $y\in Y$ 至少有一个原像 (即有 $x\in X$ 使 $f(x)=y$) 时, 称 f 是满射. 命 $\mathrm{id}_X(x)=x$, 得 恒等映射$\mathrm{id}_X:X\to X$, 它是 双射— 既单又满的映射, 其图像是 $X\times X$ 的对角线 $\mathrm{diag}\,X^2$. 恒等映射是 $A=X$ 时的包含映射 η. 在无混淆时, id_X 可记为 id, 在第六章也记为 $I:X\to X$.

若有双射 $f:X\to Y$, 则在某种意义 X 可等同于 Y.

(1) $f(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcap\limits_{i\in I}f(A_i)$, 其中等号恒对当且仅当 f 是单射[2].

(2) $f(A_1)\setminus f(A_2)\subseteq f(A_1\setminus A_2)$, 其中等号恒对当且仅当 f 是单射.

(3) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$, 其中等号恒对当且仅当 f 是单射.

(4) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$, 其中等号恒对当且仅当 f 是满射.

下面的例子是用原像这个概念讨论截口.

例 5 固定 $a\in X$, 命 $\eta_a(y)=(a,y)$, 得单射 $\eta_a:Y\to X\times Y$ 使截口 $G_a=(\eta_a)^{-1}(G)$. 固定 $b\in Y$, 命 $\eta^b(x)=(x,b)$. 这得单射 $\eta^b:X\to X\times Y$ 使截口 $G^b=(\eta^b)^{-1}(G)$. 因此截口的运算律可由原像的运算律而得到.

取值为数或广义实数的映射也称为函数. 下面用集合分析的方法讨论函数列的收敛性. 对于函数 $g,h:X\to\overline{\mathbb{R}}$, 作集合

$$(g<h)=\{x\in X|g(x)<h(x)\},$$

$$(g\leqslant h)=\{x\in X|g(x)\leqslant h(x)\}.$$

对于 X 的子集 E, 命 $E(g<h)=E\cap(g<h)$ 及 $E(g\leqslant h)=E\cap(g\leqslant h)$.

定理 1 设有非空集合 X 和函数列 $f,f_1,f_2,\cdots:X\to\mathbb{C}$ 与 X 的子集 Y.

(1) (f_n) 的收敛域是 $\bigcap\limits_{k\geqslant1}\bigcup\limits_{m\geqslant1}\bigcap\limits_{i,j\geqslant m}(|f_i-f_j|<\dfrac{1}{k})$.

(2) (f_n) 收敛于 f 的 x 全体是 $\bigcap\limits_{k\geqslant1}\bigcup\limits_{m\geqslant1}\bigcap\limits_{n\geqslant m}(|f_n-f|<\dfrac{1}{k})$.

(3) 在 Y 上, (f_n) 一致收敛当且仅当有递增正整数列 (m_k) 使

$$Y=\bigcap_{k\geqslant1}\bigcap_{p,q\geqslant m_k}Y(|f_p-f_q|<\frac{1}{k}).$$

(4) 在 Y 上, (f_n) 一致收敛于 f 当且仅当有递增正整数列 (m_k) 使

$$Y=\bigcap_{k\geqslant1}\bigcap_{n\geqslant m_k}Y(|f_n-f|<\frac{1}{k}).$$

---

[2] "恒" 表示每个 A_i 都是 X 的任意子集. 这在 (2)-(4) 中也一样.

习 题

练习 1 证明: $A \subseteq B$ 当且仅当 $A \setminus B = \varnothing$ 当且仅当 $A \cap B = A$ 当且仅当 $A \cup B = B$.

练习 2 证明: 有 n 个元素的集合有 2^n 个子集.

练习 3 用符号 $\forall$ 与 $\exists$ 表示 $A \subset B$ 和 $C \not\subseteq D$.

练习 4 试用集合的差运算表示两个集合的交运算.

练习 5 证明: (1) $A \cup B = (A \cap B) \sqcup (A \Delta B)$.

(2) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

练习 6 证明: (1) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

(2) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap B^{\mathrm{c}}$, 其中 A 与 B 是 X 的子集.

练习 7 证明: (1) $(\bigcup\limits_{i \in I} E_i) \Delta (\bigcup\limits_{i \in I} F_i) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} (E_i \Delta F_i)$.

(2) $(\bigcap\limits_{i \in I} E_i) \Delta (\bigcap\limits_{i \in I} F_i) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} (E_i \Delta F_i)$.

(3) $E^{\mathrm{c}} \Delta F^{\mathrm{c}} = E \Delta F$, 此处将 E 和 F 视为 X 的子集.

(4) $(E_1 \setminus E_2) \Delta (F_1 \setminus F_2) \subseteq (E_1 \Delta F_1) \cup (E_2 \Delta F_2)$.

练习 8 证明本节中集合运算的对偶律 (即 De Morgan 律).

练习 9 求开区间列 $A_n = (0, n^{(-1)^n}) : n = 1, 2, \cdots$ 的下限集与上限集.

练习 10 求区间列 $(A_n = [0, 1 + (-1)^n \frac{1}{n}])_{n=1}^{\infty}$ 的上限集与下限集

练习 11 设集列 (E_n) 递增至 E 而集列 (F_n) 递增至 F, 证明集列 $(E_n \cap F_n)$ 递增至 $E \cap F$.

练习 12 设递增集列 $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ 的极限为 A 且 $A_0 = \varnothing$, 递减集列 (B_n) 的极限是 B. 求 $\bigsqcup\limits_{n \geqslant 1} (A_n \setminus A_{n-1})$ 和 $\bigsqcup\limits_{n \geqslant 1} (B_n \setminus B_{n+1}) \cup B$.

练习 13 设 A, B 和 C 是三个集合. 证明:

(1) $A = (A \cap C) \sqcup (A \setminus C)$.

(2) $A \cup C = B \cup C$ 当且仅当 $A \setminus C = B \setminus C$.

(3) $A \cap C = B \cap C$ 当且仅当 $C \setminus A = C \setminus B$.

(4) $A \Delta C = B \Delta C$ 当且仅当 $A = B$.

(5) $A = B$ 当且仅当 (2) 和 (3) 的条件都成立.

练习 14 证明 $\bigcap\limits_{i\in I}(A_i \times B_i) = (\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \times (\bigcap\limits_{i\in I} B_i)$.

练习 15 证明 $A \times B = \coprod\limits_{a\in A}(\{a\} \times B) = \coprod\limits_{b\in B}(A \times \{b\})$.

练习 16 请用枚举法表示小写英文字母所成的集合.

练习 17 设 $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$ 是双射, 求下限集 $\varliminf\limits_{n\to\infty} (\mathbb{R} \setminus \{f(n)\})$.

练习 18 映射 $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}$ 使每个有理数有无限个原像, 求 $\varliminf\limits_{n\to\infty} (\mathbb{R} \setminus \{f(n)\})$.

练习 19 试证明定理 1.

§1.2 三类常用关系

一些元素对 (x, y) 构成的集合 R 称为一个关系, 此时记 xRy. 如命

$$P = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, x-y\text{是负数}\}.$$

它反映了实数的大小关系: $x < y \Leftrightarrow xPy$. 关系也可用一些符号来代替, 如 $x \leqslant y$, $x \sim y$ 或 $x \preceq y$ 等.

现在设 R 是集合 X 上的一个关系, 这即 $R \subseteq X \times X$.

(1) 称 R 具有自反性是指: $x \in X$ 时, xRx.

(2) 称 R 具有对称性是指: xRy 时, yRx.

(3) 称 R 具有传递性是指: xRy 且 yRz 时, xRz.

(4) 称 R 具有反称性是指: xRy 且 yRx 时, $x = y$.

等价关系与划分 集合 X 上具有自反性、对称性和传递性的关系 R 称为等价关系. 当 xRy 时, 记 $x \sim y$, 称 x 与 y 等价.

(1) 与 x 等价的元素全体 $[x]$ 称为 x 所在的 等价类: $[x] = \{y \in X|y \sim x\}$. 等价元素所在的等价类相同. 不等价元素所在的等价类不相交.

(2) 等价关系 $\sim$ 的 商集$\{[x]|x \in X\}$ 记为 $X/\sim$ 或 $\tilde{X}$. 命 $\pi(x) = [x]$, 得 自然射影 或 商映射$\pi : X \to \tilde{X}$ 使 $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ 当且仅当 $x_1 \sim x_2$.

(3) 每个映射 $f : X \to Y$ 都按等值方式诱导 X 上一个等价关系 $\sim$ 使 $x_1 \sim x_2$ 表示 $f(x_1) = f(x_2)$.

(4) 等价关系 $\sim$ 确定的互异等价类全体记为 $[x_i] : i \in J$, 则 $X = \bigcup\limits_{i\in J} [x_i]$. 一般地, 当集类 $\mathcal{D}$ 中成员都非空且相互不交而使 $X = \bigcup \mathcal{D}$ 时, 称 $\mathcal{D}$ 是 X 的一个 划分. 如 $\{(n-1, n]|n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个划分.

(5) 集合 X 上的关系 R 是个等价关系当且仅当 X 有唯一划分 $\{X_i|i\in I\}$ 使 xRy 表示 x 与 y 在同一个 X_i 中. 此时, 每个等价类恰好是某个 X_i.

设 $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}'$ 是 X 的划分使 $\mathcal{D}$ 的成员 A 都有划分 $\{B\in\mathcal{D}'|B\subseteq A\}$, 称 $\mathcal{D}'$ 是 $\mathcal{D}$ 的 *细分* 并记为 $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}'$. 细分有以下性质:

自反性: $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}$.

反称性: $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}'$ 且 $\mathcal{D}'\preceq\mathcal{D}$ 时, $\mathcal{D}=\mathcal{D}'$.

传递性: $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}'$ 且 $\mathcal{D}'\preceq\mathcal{D}''$ 时, $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}''$.

定向性: $\mathcal{D}$ 与 $\mathcal{D}'$ 有细分 $\mathcal{D}\vee\mathcal{D}':=\{A\cap B|A\in\mathcal{D},B\in\mathcal{D}'\}\setminus\{\varnothing\}$.

例 1 设 Δ 表示平面三角形, 其全体上面至少有以下 3 个等价关系:

(1) $\Delta_1\sim_1\Delta_2$ 表示 Δ_1 与 Δ_2 相似.

(2) $\Delta_1\sim_2\Delta_2$ 表示 Δ_1 与 Δ_2 面积相等.

(3) $\Delta_1\sim_3\Delta_2$ 表示 Δ_1 与 Δ_2 周长相等.

等价关系的思想是将具有相同性质的元素归为一类. 这体现了物以类聚、人以群分的原始观念.

映射与其运算 映射也称为对应关系. 获得映射有以下基本方法:

(一) 映射 $f:X\to Y$ 与映射 $g:Y\to Z$ 的 *复合* $g\circ f:X\to Z$ 将 $x\in X$ 映至 $g(f(x))$. 可将 $g\circ f$ 简记为 gf. 复合不满足交换律.

(1) 复合满足结合律: $(gf)h=g(fh)$.

(2) 恒等映射是复合的单位元: $f\,\mathrm{id}_X=\mathrm{id}_Y\,f=f$.

(3) 映射 f 是单射当且仅当满足 $fh_1=fh_2$ 的映射 h_1 和 h_2 相等.

(4) 映射 f 是满射当且仅当满足 $g_1f=g_2f$ 的映射 g_1 和 g_2 相等.

(5) 单射 $f:X\to Y$ 与单射 $g:Y\to Z$ 的复合 $gf:X\to Z$ 是单射.

(6) 满射 $f:X\to Y$ 与满射 $g:Y\to Z$ 的复合 $gf:X\to Z$ 是满射.

(二) 映射 $f:X\to Y$ 是 $g:A\to B$ 的一个 *延拓* 或 g 为 f 的 *限制* 是指 $A\subseteq X$ 及 $B\subseteq Y$ 且对于 $x\in A$ 成立 $g(x)=f(x)$. 此时 $\mathrm{gr}\,g\subseteq\mathrm{gr}\,f$, 可记为 $g\subseteq f$. 延拓也称为 *扩张*. 在 $B=Y$ 时, 记 $g=f|_A$.

如函数 $(x\mapsto|x|)$ 是函数 $[0,1]\ni x\mapsto x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一个连续延拓.

(三) 一簇映射 $f_i:X_i\to Y_i(i\in I)$ 中任何两个在其公共定义域上取值相等时, 这簇映射可 *黏接* 成一个映射 $f:\bigcup\limits_{i\in I}X_i\to\bigcup\limits_{i\in I}Y_i$ 使 f 在每个 X_i 上与 f_i 取值相等. 此时 $\mathrm{gr}\,f=\bigcup\limits_{i\in I}\mathrm{gr}\,f_i$, 记 $f=\bigcup\limits_{i\in I}f_i$.

将一簇函数黏接起来就是分段定义函数. 如

$$|x|=\{-x:x\leqslant 0;x:x\geqslant 0\},$$

这是两个函数的黏接. 又如数学分析介绍的 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}: & x\text{是既约分数}\dfrac{q}{p}, p\geqslant 1;\\ 0: & x\text{是无理数}.\end{cases}$$

(四) 一簇映射 $f_i: X_i \to Y_i(i\in I)$ 的 Descartes 积 $\prod\limits_{i\in I} f_i : \prod\limits_{i\in I} X_i \to \prod\limits_{i\in I} Y_i$ 将 $(x_i)_{i\in I}$ 映射到 $(f_i(x_i))_{i\in I}$. 一簇映射 $h_i: X\to Y_i(i\in I)$ 的约化积 $h: X\to \prod\limits_{i\in I} Y_i$ 将 x 映射至 $(h_i(x))_{i\in I}$.

(五) 设 $\sim$ 是映射 $f: X\to Y$ 按等值方式在 X 上诱导的等价关系, 则 f 诱导了一个映射 $\tilde{f}: \tilde{X}\to Y$ 使 $\tilde{f}([x])=f(x)$, 它是满足复合映射方程 $\tilde{f}\circ\pi=f$ 的唯一解. 进而, $\tilde{f}$ 是单射; 它是双射当且仅当 f 是满射.

(六) 设 X 和 Y 各有等价关系而映射 $f: X\to Y$ 保持等价关系: $x_1\sim x_2$ 时, $f(x_1)\sim f(x_2)$. 命 $\tilde{f}([x])=[f(x)]$, 则诱导映射 $\tilde{f}:\tilde{X}\to\tilde{Y}$ 是满足方程 $\tilde{f}\pi=\tau f$ 的唯一映射, 其中 $\pi: X\to\tilde{X}$ 和 $\tau: Y\to\tilde{Y}$ 是自然投影.

(七) 设 $W\subseteq X\times Y$ 而 $f: W\to Z$ 是映射. 截口 W_a 不空时, 有截口 $f_a: W_a\to Z$ 使 $f_a(y)=f(a,y)$. 这也记为 $f(a,\cdot)$, 其中 $\cdot$ 代表自变量. 截口 W^b 不空时, 有截口 $f^b: W^b\to Z$ 使 $f^b(x)=f(x,b)$. 这也记为 $f(\cdot,b)$.

(八) 映射 $f: X\to Y$ 是双射当且仅当它可逆 — 存在 $g,h: Y\to X$ 使 $gf=\mathrm{id}_X$ 且 $fh=\mathrm{id}_Y$. 此时 $g=h$, 记为 f^{-1}, 称之为 f 的 *逆映射*.

(1) 恒等映射 $\mathrm{id}_X: X\to X$ 可逆且 $\mathrm{id}_X^{-1}=\mathrm{id}_X$.

(2) 双射 $f: X\to Y$ 的逆映射 $f^{-1}: Y\to X$ 是双射且 $(f^{-1})^{-1}=f$.

(3) 双射 $f: X\to Y$ 与双射 $g: Y\to Z$ 的复合 $gf: X\to Z$ 是双射, 其逆映射为 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$(请注意次序的变化).

(4) 设 $f_i: X_i\to Y_i(i\in I)$ 是一簇映射使集簇 $X_i(i\in I)$ 相互不交且集簇 $Y_i(i\in I)$ 也相互不交, 则黏接 $\bigcup f_i$ 是双射当且仅当每个 f_i 是双射. 此时 $(\bigcup f_i)^{-1}=\bigcup f_i^{-1}$.

(5) 设 $f_i: X_i\to Y_i(i\in I)$ 是一簇映射, 则 Descartes 积 $\prod\limits_{i\in I} f_i : \prod\limits_{i\in I} X_i\to\prod\limits_{i\in I} Y_i$ 是双射当且仅当每个 f_i 是双射. 此时

$$(\prod f_i)^{-1}=\prod f_i^{-1}.$$

函数的逆映射也称为 *反函数*. 如指数函数 $\exp: \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 与对数函数 $\ln: (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 互为反函数.

例 2 命 $f(t)=\exp(2\pi\sqrt{-1}t)$, 这得满射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{T}$. 在 f 诱导的等价关系下: $x\sim y$ 当且仅当 $x-y\in\mathbb{Z}$. 商集 $\mathbb{R}/\sim$ 记为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 则有双射 $\tilde{f}:\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to\mathbb{T},[t]\mapsto\exp(2\pi\sqrt{-1}t)$. 因此可将 $\mathbb{T}$ 与商集 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 同一起来.

一些简单的函数也可以反映集合的大小, 下面就讨论这类函数.

特征函数 固定非空集合 X. 对于 X 的子集 A, 若 $x\in A$, 命 $\chi_A(x)=1$; 若 $x\in X\setminus A$, 命 $\chi_A(x)=0$. 这样得到的函数 χ_A 为 A 的 *特征函数*.

如实数系 $\mathbb{R}$ 的子集 $(0,+\infty)$ 与 $[0,+\infty)$ 的特征函数分别记为 $\theta_1(x)$ 与 $\theta(x)$, 称为 Heaviside 函数. 它们是递增函数且仅在 0 不连续: θ 在 0 右连续且其左方跳跃度为 1, θ_1 在 0 左连续且其右方跳跃度为 1.

(1) $A\subseteq B\Leftrightarrow\chi_A\leqslant\chi_B\Leftrightarrow\chi_{B\setminus A}=\chi_B-\chi_A$.

(2) $A=B\Leftrightarrow A\Delta B=\varnothing\Leftrightarrow\chi_A=\chi_B$.

(3) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B$, 而 $\chi_{A\cap B}=\chi_A\chi_B$.

(4) $\chi_{A\setminus B}=\chi_A(1-\chi_B)$, 而 $\chi_{A\Delta B}=|\chi_A-\chi_B|$.

(5) $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i\Leftrightarrow\chi_A(x)=\max\limits_{i\in I}\chi_{A_i}(x)$.

(6) $A=\bigcap\limits_{i\in I}A_i\Leftrightarrow\chi_A(x)=\min\limits_{i\in I}\chi_{A_i}(x)\Leftrightarrow\chi_A(x)=\prod\limits_{i\in I}\chi_{A_i}(x)$.

(7) $A\subseteq\bigcup\limits_{i\in I}A_i\Leftrightarrow\chi_A\leqslant\sum\limits_{i\in I}\chi_{A_i}$, 而 $A=\bigsqcup\limits_{i\in I}A_i\Leftrightarrow\chi_A=\sum\limits_{i\in I}\chi_{A_i}$.

(8) $A=\prod\limits_{i\in I}A_i$ 时, $\chi_A(x)=\prod\limits_{i\in I}\chi_{A_i}(x_i)$, 其中 $x=(x_i)_{i\in I}$.

(9) $G\subseteq X\times Y$ 时, $\chi_G(x,y)=\chi_{G_x}(y)=\chi_{G^y}(x)$.

利用子集的特征函数可证明一些集合不等式. 这见下例.

例 3 设 A,B,C 都是 X 的子集, 则

$$|\chi_A-\chi_C|\leqslant|\chi_A-\chi_B|+|\chi_B-\chi_C|.$$

据上面的 (4) 和 (7) 知, $A\Delta C\subseteq(A\Delta B)\cup(B\Delta C)$.

顺序关系 集合 X 上满足自反性、反称性和传递性的关系 R 称为一个偏序. 当 xRy 时, 记 $x\preceq y$ 或 $y\succeq x$, 读成 x 在 y 前和 y 在 x 后. 称 $(X,\preceq)$ 为一个偏序集, 这可简记为 X. 以 $x\prec y$ 表示 $x\preceq y$ 且 $x\neq y$, 而 $x\succ y$ 即 $y\prec x$.

(1) 称 X 为定向集是指 $x,y\in X$ 时, 有 $z\in X$ 使 $x\preceq z$ 且 $y\preceq z$.

(2) 称 x 和 y 满足三岐性是指 $x\prec y,x=y,x\succ y$ 这三者必居其一.

(3) 称 X 为全序集或链是指任何 $x,y\in X$ 满足三岐性.

全序集是定向集, 反之不然. 如集合 X 的幂集 2^X(即 X 的子集全体) 按包含关系 $\subseteq$ 成为一个定向集. 但当 X 有至少有两个元素 a,b 时, 2^X 不是全序集, 因为 $\{a\}$ 与 $\{b\}$ 没有包含关系.

例 4 汉字全体按字典顺序 — 汉字在字典的查阅顺序成为全序集.

在全序集 $(\mathbb{R}, \leqslant)$ 中, 非负实数都是 $(-\infty, 0]$ 的上界, 而 0 是其最大值; 整数环 $\mathbb{Z}$ 既没有上界也没有下界. 这些概念可推广至偏序集上去.

上界与极大元 设 A 是偏序集 $(X, \preceq)$ 的非空子集.

(1) 称 $b \in X$ 为 A 的一个上界是指任何 $x \in A$ 满足 $x \preceq b$. 进而当 $b \in A$ 时, 称 b 是 A 的最大元. 这记为 $\max A$. 称 $c \in A$ 为 A 的一个极大元是指没有 $x \in A$ 满足 $c \prec x$.

(2) 称 $a \in X$ 为 A 的一个下界是指任何 $x \in A$ 满足 $x \succeq a$. 进而当 $a \in A$ 时, 称 a 是 A 的最小元. 这记为 $\min A$. 称 $c \in A$ 为 A 的一个极小元是指没有 $x \in A$ 满足 $x \prec c$.

(3) 有限全序集 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 必有最大元与最小元.

例 5 从 X 的非空子集到 Y 的映射全体 $M = \{f : A \to Y | \varnothing \neq A \subseteq X\}$ 按延拓关系 $\subseteq$ 成为一个偏序集: 自反性 $(f \subseteq f)$ 、反称性 (如果 $g \subseteq f$ 且 $f \subseteq g$, 则 $f = g$) 与传递性 (如果 $g \subseteq f$ 且 $f \subseteq h$, 则 $f \subseteq h$).

设 E 是 M 的定向子集: $f_1, f_2 \in E$ 时, 有 $f \in E$ 使 $f_1 \subseteq f$ 且 $f_2 \subseteq f$. 因此 f_1 和 f_2 在其公共定义域上取值相等, 从而 E 可黏成一个映射 $f_0 : L_0 \to Y$. 这个映射 f_0 自然是 E 的一个上界.

进而当 X 和 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间而 E 中映射都是线性映射时, E 黏成的映射 f_0 也是线性的. 为此任取 $x_1, x_2 \in L_0$, 则有 $f_i \in E$ 使 $x_i \in \operatorname{dom} f_i$ 且 $f_0(x_i) = f_i(x_i)$. 取 $f \in E$ 使 $f_1 \subseteq f$ 且 $f_2 \subseteq f$, 则 $x_i \in \operatorname{dom} f$ 且 $f_i(x_i) = f(x_i)$. 当 $a_i \in \mathbb{K}$ 时,

$$\begin{aligned}
&a_1x_1 + a_2x_2 \in \operatorname{dom} f \subseteq L_0 \\
\Rightarrow &f_0(a_1x_1 + a_2x_2) = f(a_1x_1 + a_2x_2) \\
= &a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) = a_1 f_0(x_1) + a_2 f_0(x_2).
\end{aligned}$$

可见 L_0 是线性子空间而 f_0 是线性映射.

为确立一个偏序集是否有极大 (小) 元, 我们常借助于以下 Zorn 引理.

引理 (Zorn) 每个全序子集都有上 (下) 界的偏序集有极大 (小) 元.

以下例子是 Zorn 引理的应用, 它与 §1.3 中势的三岐性表达了一个意思.

例 6 设集合 X 和 Y 非空, 则要么从 X 至 Y 有个单射, 要么从 Y 至 X 有个单射. 为此, 将 X 的非空子集到 Y 的单射全体记为 F. 取 $a \in X$ 及 $b \in Y$, 命 $f(a) = b$. 这得单射 $f : \{a\} \to Y$. 因此 F 不空.

在延拓关系下, F 是偏序集. 任取 F 的全序子集 E. 当 $f_1, f_2 \in E$ 时, 可设 $f_1 \subseteq f_2$. 于是 f_1 与 f_2 在公共定义域 $\mathrm{dom}\, f_1$ 上取值相等. 因此 E 可黏成一个映射 $g : B \to Y$. 如果 $g(a_1) = g(a_2)$, 则有 $f_i \in E$ 使 a_i 在 f_i 的定义域中. 无妨设 f_2 是 f_1 的延拓, 则 $g(a_i) = f_2(a_i)$, 故 $a_1 = a_2$. 因此 g 是单射. 这样 g 在 F 中且是 E 的上界.

据 Zorn 引理, F 有极大元 $f : A \to Y$. 若 $A = X$, 则罢. 若 $f(A) = Y$, 则 Y 至 X 有个单射 $g : Y \to X$ 恒使 $g(f(x)) = x$. 若 $A \neq X$ 且 $f(A) \neq Y$, 在 $X \setminus A$ 和 $Y \setminus f(A)$ 中各取一个元素 a 和 b 后, 作单射 $g : A \cup \{a\} \to Y$ 使 $g(a) = b$, 而 $x \in A$ 时 $g(x) = f(x)$. 于是 g 是 f 的真延拓, 这与 f 的极大性矛盾.

习 题

练习 1 设 S 是 $X \times X$ 的非空子集. 证明 X 上有个等价关系 E_0 使 $S \subseteq E_0$, 且当 E 也是包含 S 的等价关系时, $E_0 \subseteq E$(认为 E_0 是 S 生成的等价关系).

练习 2 命 $X^{(2)} = \{(x,x) | x \in X\}$, 证明 $X^{(2)}$ 既是 X 上的等价关系也是 X 上的顺序关系. 如果 R 既是 X 上的等价关系也是 X 上的顺序关系, 则 $R = X^{(2)}$.

练习 3 设 A 和 B 是关系, 作逆关系 $A^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in A\}$ 和复合关系

$$AB = \{(x,z) | \exists y : (x,y) \in A, (y,z) \in B\}.$$

命 $\mathrm{dom}\, A = \{x | \exists y : (x,y) \in A\}$ 和 $\mathrm{ran}\, A = \{y | \exists x : (x,y) \in A\}$, 这分别称为 A 的定义域和值域 (因此 $A \subseteq \mathrm{dom}\, A \times \mathrm{ran}\, A$). 证明:

(1) $(AB)C = A(BC)$ 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) $A \subseteq X \times Y$ 时, $X^{(2)}A = AY^{(2)} = A$.

(3) $\mathrm{dom}\, A^{-1} = \mathrm{ran}\, A$ 且 $\mathrm{ran}\, A^{-1} = \mathrm{dom}\, A$.

(4) AB 和 BA 不必相等.

练习 4 设 $f : X \to Y$ 是映射. 当 $E \subseteq X$ 且 $F \subseteq Y$ 时, 命 $f_*(E) = f(E)$ 且 $f^*(F) = f^{-1}(F)$. 这得映射 $f_* : 2^X \to 2^Y$ 及 $f^* : 2^Y \to 2^X$. 证明:

(1) $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{2^X}$ 且 $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{2^X}$.

(2) $(gf)_* = g_* f_*$ 且 $(gf)^* = f^* g^*$, 其中 $g : Y \to Z$.

练习 5 称 X 的子集 A 为映射 $f: X \to X$ 的不变子集是指 $f(A) \subseteq A$. 证明:

(1) 空集 $\varnothing$ 和全集 X 是 f 的不变子集.

(2) 一簇不变子集 $A_i(i \in J)$ 之并与之交都是不变子集.

(3) 如果 S 是 X 的子集, 命 $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(S)$, 则 A 是 f 的不变子集.

(4) 命 S 与 A 同 (3). 当 B 是 f 的不变子集使 $B \supseteq S$ 时, $B \supseteq A$.

(5) 包含点 x_0 的最小不变子集是 $\{f^n(x_0)|n \geqslant 0\}$.

练习 6 在复平面的单位开圆盘上, 作函数 $g(z) = \sum_{n \geqslant 0} z^n$. 试求 g 的一个解析延拓 $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$.

练习 7 求出复合函数 gf 与 fg, 其中

(1) $f(x) = x^4$ 而 $g(x) = x^5$.

(2) $f(x) = \sin x$ 而 $g(x) = \cos x$.

(3) $f(x) = \exp x$ 而 $g(y) = \ln y$.

练习 8 当 $x \leqslant 0$ 时, 命 $f_1(x) = x$; 当 $x \geqslant 0$ 时, 命 $f_2(x) = \sin x$. 这两个函数可黏接吗? 如果可以, 它们的黏接是连续函数吗?

练习 9 举例说明极大元可能不止一个, 而极大元也不一定是上界, 当然它也不必是最大元.

练习 10 设 $(X, \preceq)$ 是个偏序集. 对于 $x \in X$, 命 $S_x = \{y|y \in X; y \preceq x\}$. 证明 $x \preceq z$ 当且仅当 $S_x \subseteq S_z$.

此结论表明, 所有的偏序都可当成包含关系来讨论, 这可使我们获得一些有用的信息. 实数系的 Dedekind 构造正是这一思想的体现.

练习 11 称两个偏序集 $(A, \leqslant)$ 和 $(B, \leqslant)$ 相似是指存在可逆映射 $f: A \to B$ 使 $x_1 < x_2$ 当且仅当 $f(x_1) < f(x_2)$.

(1) 设可列全序集 $(A, \leqslant)$ 有最小元也有最大元. 如果 A 中任何两个互异元素之间有第三个元素, 证明 A 与 B 相似, 其中 B 是 $[0,1]$ 中的有理数全体.

(2) 设可列全序集 $(A, \leqslant)$ 有最小元但无最大元. 如果 A 中任何两个互异元素之间有第三个元素, 证明 A 与 B 相似, 其中 B 是 $[0,1)$ 中的有理数全体.

(3) 设可列全序集 $(A, \leqslant)$ 无最小元也无最大元. 如果 A 中任何两个互异元素之间有第三个元素, 证明 A 与 B 相似, 其中 B 是 $(0,1)$ 之间的有理数全体.

(4) 证明 $(0,1)$ 之间的有理数全体 B 与有理数域 $\mathbb{Q}$ 相似.

练习 12 证明偏序集 $(A,\preceq)$ 上的 逆序$\preceq'$ 为偏序： $a\preceq' b$ 表示 $a\succeq b$.

练习 13 对于映射 $f:X\to Y$ 和 X 的子集 A, 证明以下条件等价：

(1) Y 有子集 B 使 $A=f^{-1}(B)$. 此时， $A=f^{-1}(f(A))$.

(2) $f(x_1)=f(x_2)$ 且 x_2 在 A 中时， x_1 也在 A 中.

(3) $f(x_1)=f(x_2)$ 时， $\chi_A(x_1)=\chi_A(x_2)$.

此时称 A 是 f 的 浸润集 或 饱和集.

练习 14 证明相对于映射 $f:X\to Y$ 的浸润集满足以下性质：

(1) 两个浸润集 A_1 和 A_2 之差是浸润集且 $f(A_1\setminus A_2)=f(A_1)\setminus f(A_2)$.

(2) 一簇浸润集 $A_i:i\in J$ 之并和交是浸润集且 $f(\bigcap\limits_{i\in J}A_i)=\bigcap\limits_{i\in J}f(A_i)$.

练习 15 对于 X 上的等价关系 $\sim$ 和 X 的子集 A, 证明以下条件等价：

(1) 当 $x_1\sim x_2$ 且 x_2 在 A 中时， x_1 也在 A 中.

(2) 当 $x_1\sim x_2$ 时， $\chi_A(x_1)=\chi_A(x_2)$.

(3) A 是一些等价类的并. 此时称 A 是 $\sim$ 的 浸润集 或 饱和集.

练习 16 设 $[a,b]$ 是个闭区间，称 $n+1$ 元组 $(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 为 $[a,b]$ 的一个分点组是指 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 证明 $[a,b]$ 的分点组全体 $\mathbf{D}$ 按细分关系成为一个定向集，其中 Q 是 P 的细分是指 P 的分量都是 Q 的分量.

练习 17 设 $(X,\preceq)$ 和 $(Y,\preceq)$ 都是偏序集. 证明 $(X\times Y,\preceq)$ 是偏序集，其中 $(x_1,y_1)\preceq(x_2,y_2)$ 表示 $x_1\preceq x_2$ 且 $y_1\preceq y_2$.

(1) 如果 X 和 Y 是定向集，证明 $X\times Y$ 是定向集.

(2) 举例说明：即使 X 和 Y 都是全序集， $X\times Y$ 也不一定是全序集.

练习 18 设 $(X,\preceq)$ 和 $(Y,\preceq)$ 都是偏序集. 证明 $(X\times Y,\preceq)$ 是偏序集，其中 $(x_1,y_1)\preceq(x_2,y_2)$ 表示 $x_1\prec x_2$ 或 $x_1=x_2$ 且 $y_1\preceq y_2$. 证明以下结论：

(1)X 和 Y 是定向集时， $X\times Y$ 是定向集.

(2)X 和 Y 是全序集时， $X\times Y$ 也是全序集. 此时 $\preceq$ 称为 字典顺序.

§1.3 对等集合与势

通俗地讲，元素个数相等的两个集合是对等的，其确切意义如下.

对等 称 X 与 Y 是对等集合也称为等势集合是指它们是空集或有双射 $f: X \to Y$. 此时, 记 $X \sim Y$. 对等集合具有相同的势. 以 $|X|$ 表示 X 的 势.

(1) 对等具有自反性: $X \sim X$.

(2) 对等具有对称性: $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$.

(3) 对等具有传递性: $X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$.

(4) Descartes 积保持对等: $X_i \sim Y_i (i \in I)$ 时, $\prod X_i \sim \prod Y_i$.

(5) 无交并保持对等: $\coprod X_i \sim \coprod Y_i$ 在诸 $X_i \sim Y_i$ 时成立.

(6) 一般幂集保持对等: $X_1 \sim X_2$ 且 $Y_1 \sim Y_2$ 时, $Y_1^{X_1} \sim Y_2^{X_2}$. 这里约定 Y^X 表示 X 至 Y 的映射全体.

归纳地命 $F_0 = \varnothing$ 及 $F_n = F_{n-1} \cup \{n\}$, 直观上它们只有有限个元素.

可数集 与某个 F_n 对等的集合 A 称为 *有限集*, 它的势用 n 表示, 也称 n 为 A 的 *计数*. 如大写英文字母表的计数为 26.

与自然数集对等的集合称为 *可列集*, 它的势记为 $\aleph_0$. 如整数环 $\mathbb{Z}$ 和有理数域 $\mathbb{Q}$ 是可列集. 有限集与可列集统称为 *可数集*.

(1) 有限集的子集是有限集且有限集不与其真子集对等.

(2) 有限集的像集、两个有限集的并与 Descartes 积都是有限集.

(3) 可列集的子集与像集都是可数集.

(4) 有限个可列集的 Descartes 积与可列个可列集的并是可列集.

可见, $n < l$ 时 F_n 不与 F_l 对等. 这样, 有限集的计数的定义是合理的. 又可见, 可列集是 *无限集*— 非有限的集. 常用的有理数集和素数集都是可列集.

例 1 设集类 $\mathscr{J}$ 中成员是实直线上长度非零且相互不交的区间,则 $\mathscr{J}$ 是可数的. 为此将全体有理数排成一列 $r_0, r_1, \cdots$. 当 $I \in \mathscr{J}$ 时, 命 $f(I) = \min\{n | r_n \in I\}$, 得单射 $f: \mathscr{J} \to \mathbb{N}$. 因此 $\mathscr{J}$ 可数. 此处用到了一个重要事实: 长度非零的区间包含有理数也包含无理数.

Euclid 说明了有可列个素数, 将它们依小至大排列成 $p_0, p_1, \cdots$. 如 $p_0 = 2$ 而 $p_1 = 3$. 回顾一下, 正整数 n 都有唯一分解 $p_0^{c_0} p_1^{c_1} \cdots$, 其中指数 c_i 都是非负整数且非零指数的项数有限. 因此, 正有理数 r 有唯一分解 $p_0^{c_0} p_1^{c_1} \cdots$, 其中指数 c_i 都是整数且非零指数的项数有限.

例 2 整系数多项式有可列个. 这是因为双射 $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \prod\limits_{i=0}^{n} p_i^{a_i}$ 实现了整系数多项式环 $\mathbb{Z}[x]$ 与正有理数集 $\mathbb{Q}_+$ 的对等.

一般而言, 判断两个集合对等常用以下有力结论.

定理 1(Cantor-Bernstein) 设集合 X 与集合 Y 的一个子集对等且 Y 也与 X 的一个子集对等，则 X 与 Y 对等.

如区间 $(-1,1]$ 与 $\mathbb{R}$ 的子集 $(-1,1]$ 对等且 $\mathbb{R}$ 与 $(-1,1]$ 的子集 $(-1,1)$ 通过双射 $x \mapsto x/(1+|x|)$ 对等，所以 $(-1,1]$ 与 $\mathbb{R}$ 对等.

约定 与实数系对等的集合称为 *连续统*. 所有长度非零的区间都是连续统.

可列集是最小无限集，而有限集与无限集的区别在于它们能否与自身的一个真子集对等. 这见以下定理.

定理 2 集合 A 是无限集当且仅当 A 包含一个可列子集 S 当且仅当 A 与任何可数集之并与 A 对等当且仅当 A 与自身的一个真子集对等.

无理数集 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 包含一个可列集 $\mathbb{Q}+\sqrt{2}$, 从而 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 与 $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\mathbb{Q}$ 对等. 换言之，无理数集是连续统.

势的比较与运算 集合 X 对等于集合 Y 的一个子集当且仅当有单射 $f: X \to Y$ 当且仅当有满射 $g: Y \to X$. 此时记 $|X| \leqslant |Y|$.

(1) 自反性: $|X| \leqslant |X|$.

(2) 反称性: $|X| \leqslant |Y|$ 且 $|Y| \leqslant |X|$ 时，$|X| = |Y|$.

(3) 传递性: $|X| \leqslant |Y|$ 且 $|Y| \leqslant |Z|$ 时，$|X| \leqslant |Z|$.

(4) 三岐性 (与 Zorn 引理等价): 两个势有且只有以下 3 种可能性:

$|X| = |Y|$: X 与 Y 的一个子集对等且 Y 与 X 的一个子集对等.

$|X| < |Y|$: X 与 Y 的一个子集对等但 Y 不与 X 的任何子集对等.

$|X| > |Y|$: X 不与 Y 的任何子集对等但 Y 与 X 的一个子集对等.

计数为 n 的集合有 2^n 个子集. 一般集合 X 的幂集 2^X 的势记为 $2^{|X|}$.

定理 3(Cantor) 任何集合 X 满足势的不等式: $|X| < 2^{|X|}$.

连续统的势记为 $\aleph$ 并称为 *连续势*, 可列集的势记为 $\aleph_0$. 在势的意义下,

$$0 < 1 < \cdots < \aleph_0 < \aleph = 2^{\aleph_0}.$$

符号 $\aleph$ 读为 "阿列夫". 前面已说明了无理数集是连续统，因此可通俗地说 "无理数有 $\aleph$ 个". 下面推广定理 3.

定理 4(König 不等式) 设 $i \in I$ 时 $|A_i| < |B_i|$, 则 $|\bigcup\limits_{i\in I} A_i| < |\prod\limits_{i\in I} B_i|$.

以 α 和 β 分别记 A 和 B 的势. Descartes 积 $A \times B$ 的势记为 $\alpha\beta$. 当 $A \cap B = \varnothing$ 时, 将 $A \sqcup B$ 的势记为 $\alpha + \beta$. 两个集合之间映射 $f : A \to B$ 全体 B^A 的势记为 β^α.

(1) 交换律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha; \alpha\beta = \beta\alpha$.

(2) 零元律: $0 + \alpha = \alpha, 0\alpha = 0, \beta^0 = 1, 0^\gamma = 0(\gamma > 0)$.

(3) 单位律: $1\alpha = \alpha; 1^\alpha = 1; \alpha^1 = \alpha$

(4) 结合律: $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma), (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma); (\gamma^\beta)^\alpha = \gamma^{\beta\alpha}$.

(5) 吸收律: 如果 β 是无限势而 $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, 则 $\alpha + \beta = \alpha\beta = \beta$.

(6) 单调性: 如果 $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ 且 $\beta_1 \leqslant \beta_2$, 则 $\alpha_1^{\beta_1} \leqslant \alpha_2^{\beta_2}$.

重要等式 (1) 设 n 是正整数, 则 $n + \aleph_0 = n\aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0$.

(2) 设 n 是正整数, 则 $n\aleph = \aleph_0\aleph = \aleph^n = \aleph$.

(3) 设整数 $n \geqslant 2$, 则 $n^\aleph = \aleph_0^\aleph = \aleph^\aleph = 2^\aleph$.

(4) 设整数 $n \geqslant 2$, 则 $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

因此 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{C}^n$(这视为 $\mathbb{R}^{2n}$) 都是连续统. 将函数 $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ 与数列 $(f(1), f(2), \cdots)$ 同一后, $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$ 表示实数列全体, 它的势为 $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

例 3 函数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 的全体 $\mathbb{C}^\mathbb{R}$ 的势为 $\aleph^\aleph = 2^\aleph$. 因此可说函数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 有 $2^\aleph$ 个. 下面求连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 全体 $C(\mathbb{R})$ 的势.

为此命 $\phi(f) = f|_\mathbb{Q}$, 得映射 $\phi : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^\mathbb{Q}$. 当 $\phi(f) = \phi(g)$ 时, 任取实数 x 及逼近 x 的有理数列 (x_n). 对等式 $f(x_n) = g(x_n)$ 取极限得 $f(x) = g(x)$. 这样 $f = g$. 于是 ϕ 为单射, 从而 $|C(\mathbb{R})| \leqslant \aleph^{\aleph_0} = \aleph$, 反向不等式源自 $\{c + \sin |c \in \mathbb{C}\} \subseteq C(\mathbb{R})$. 因此 $|C(\mathbb{R})| = \aleph$.

求某类函数的个数时常要借用这类函数与其部分图像的相互确定性. 下面的例子对此类问题常有帮助.

例 4 以 $\mathcal{C}(X)$ 代表 X 的可数子集全体. 当 X 是连续统时, $\mathcal{C}(X)$ 也是连续统. 为此记 $\phi(f) = \{f(n)|n \in \mathbb{Z}_+\}$, 这得满射 $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+} \to \mathcal{C}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\}$. 于是

$$|\mathcal{C}(\mathbb{R})| \leqslant \aleph + 1 = \aleph.$$

但 $\{x + \mathbb{Z}_+ | 0 < x < 1\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 表明 $\aleph \leqslant |\mathcal{C}(\mathbb{R})|$.

以 α_i, β_i 和 γ_i 分别记 A_i, B_i 和 C_i 的势, 则 $\prod\limits_{i\in I} A_i$ 的势记为 $\prod\limits_{i\in I} \alpha_i$, 无交并 $\bigsqcup\limits_{i\in I} A_i$ 的势记为 $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i$. 约定 $\sum\limits_{i\in\varnothing} \alpha_i = 0$ 且 $\prod\limits_{i\in\varnothing} \alpha_i = 1$.

(1) 完全次可加性： $|\bigcup_{i\in I} A_i| \leqslant \sum_{i\in I} |A_i|$.

(2) 结合律： $\sum_{i\in I}\gamma_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\gamma_i$; $\prod_{i\in I}\gamma_i = \prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j}\gamma_i$, 其中 $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$.

(3) 分配律： $\alpha\sum_{i\in I}\gamma_i = \sum_{i\in I}\alpha\gamma_i$.

(4) 分配律： $\alpha^{\sum_{i\in I}\gamma_i} = \prod_{i\in I}\alpha^{\gamma_i}, (\prod_{i\in I}\gamma_i)^\alpha = \prod_{i\in I}\gamma_i^\alpha$.

(5) 分解律： $\sum_{a\in A}\beta = \alpha\beta$ 及 $\prod_{a\in A}\beta = \beta^\alpha$.

(6) 单调性： $\forall i\in I: \alpha_i \leqslant \beta_i \Rightarrow \sum_{i\in I}\alpha_i \leqslant \sum_{i\in I}\beta_i$.

(7) 单调性： $\forall i\in I: \alpha_i \leqslant \beta_i \Rightarrow \prod_{i\in I}\alpha_i \leqslant \prod_{i\in I}\beta_i$.

习 题

练习 1(Cantor) 代数数 — 整系数多项式的实根有可列个.

练习 2(Cantor) 超越数 — 非代数数的实数有 $\aleph$ 个.

练习 3 证明：可列集有可列个有限子集.

练习 4 证明：可列集有 $\aleph$ 个可列子集.

练习 5(Cantor-Bernstein 定理的等价形式) 设 $A\subseteq B\subseteq C$ 且 A 与 C 对等，则 A 、 B 和 C 对等.

练习 6 已知 $A\cup B$ 的势为 $\aleph$, 证明: A 或 B 的势是 $\aleph$.

练习 7 证明单调函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 的不连续点都是第一类的且有可数个.

练习 8 求单调函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的全体 M 的势.

练习 9 求严格递增的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 全体 S 的势.

练习 10 求以下集合的势：

(1) 平面上以有理点为中心以有理数为半径的开圆盘全体 $\mathcal{D}$.

(2) 以有理数为端点的闭区间全体 $\mathcal{J}$.

(3) 三角函数系 $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\}$.

(4) 十进制有限小数全体 X.

(5) 平面上顶点是有理点的三角形全体 $\mathcal{T}$.

(6) 分子与分母是整系数多项式的有理函数全体 $\mathbb{Q}\langle x\rangle$.

(7) 系数为代数数的多项式全体.

练习 11 求以下集合的势:

(1) 复数列全体 $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}=\{(z_1,\cdots,z_n,\cdots)|\forall n\geqslant 1:z_n\in\mathbb{C}\}$.

(2) 复平面的单位圆周 $\mathbb{T}$.

(3) 定义在 $\mathbb{R}$ 上以无理数集为连续点集的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 全体 U.

(4) 严格递增的正整数列全体 S.

(5) 有理数列全体 $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}_+}=\{(r_1,\cdots,r_n,\cdots)|\forall n\geqslant 1:r_n\in\mathbb{Q}\}$.

(6) 实数系中闭区间全体 $\mathcal{J}$.

(7) 连续函数 $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ 全体 $C[0,1]$.

(8) 在 [0,1] 上连续函数列全体.

(9) 在 [0,1] 上一致收敛的连续函数列 (f_n) 全体 S.

(10) 十进制无限小数全体 Y.

(11) 实系数多项式全体.

(12) [0,1) 中十进制无限小数中有数字 7 的 x 全体 E.

(13) [0,1) 中十进制无限小数中没有数字 7 的 x 全体 F.

(14) 只有可数个不连续点的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 全体 A.

练习 12 求区间 [0,1] 上实值函数全体的势.

练习 13 用 Cantor-Bernstein 定理证明以下结论:

(1) 复平面上半径相同的开圆盘 $O(z,r)$ 与闭圆盘 $B(z,r)$ 等势.

(2) 复平面上边长相等的开正方形与闭正方形等势.

(3) 平面 $\mathbb{R}^2$ 与平面上正方形 $S=\{(x,y):|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 等势.

(4) 正方形 $(0,1]\times(0,1]$ 与区间 $(0,1]$ 等势.

练习 14 已知 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 的势为 $\aleph$, 证明必有一个 A_n 的势为 $\aleph$.

练习 15 以下陈述是否正确?

(1) 有限集的幂集是有限集而无限集的幂集是无限集.

(2) 可列集的幂集是可列集而连续统的幂集是连续统.

(3) 任何可列集都有一个顺序使每个非空子集都有最小元.

练习 16 试建立双射 $f:A\to B$, 其中 A 和 B 如下:

(1) $A=[0,1]$, $B=[a,b]$, 其中 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.

(2) $A=(0,1)$, $B=\mathbb{R}$.

(3) $A=[-1,1]$, $B=\overline{\mathbb{R}}$.

(4) $A=[0,+\infty)$, $B=\mathbb{R}$.

(5) $A=[0,1]$, B 是复平面上的单位圆周.

(6) A 是复平面上单位开圆盘, B 是单位闭圆盘.

练习 17 试作 $\mathbb{N}$ 中 $\aleph$ 个子集使每两个都有包含关系.

练习 18 (1) 证明: 对任何实数 x, 存在一列有理数 (r_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n+\sqrt{2})=x$.

(2) 求连续函数 $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{C}$ 全体 $C(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ 的势.

练习 19 以下陈述是否正确? 从你的判断中可得出什么结论?

(1) 如果 $A\sim B, C\sim D$ 且 $A\subseteq C, B\subseteq D$, 则 $C\setminus A\sim D\setminus B$.

(2) 如果 $A\sim B$ 且 $A\cup B\subseteq C$, 则 $C\setminus A\sim C\setminus B$.

(3) 如果 $A\sim B$ 且 $C\subseteq A\cap B$, 则 $A\setminus C\sim B\setminus C$.

(4) 如果 $A\times B\sim A\times C$, 则 $B\sim C$.

(5) 如果 $B^A\sim C^A$, 则 $B\sim C$.

(6) 如果 $B^A\sim B^C$, 则 $A\sim C$.

* **练习 20(Liouville 定理)** 设整数 $n\geqslant 2$, 而 x 是一个 n 次代数数 — 有理数域上某个既约整系数多项式 $f(z)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iz^i$ 的实根, 则有 $r>0$ 使 p 为整数而 q 为正整数时,

$$\left|\frac{p}{q}-x\right|>\frac{r}{q^n}.$$

* **练习 21** 当整数列 (a_n) 各项满足 $0\leqslant a_n\leqslant 9$ 时, 记 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{10^{i!}}$. 用练习 20 说明 x 是有理数或超越数. 这样的超越数有 $\aleph$ 个.

* **练习 22** 命 $\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, 证明 e 是超越数.

§1.4 实数与无穷大

先规定无穷大参与的代数运算:

$$\forall\gamma\in(-\infty,+\infty]:(+\infty)+\gamma=+\infty-(-\gamma)=+\infty,$$
$$\forall\gamma\in[-\infty,+\infty):(-\infty)+\gamma=-\infty-(-\gamma)=-\infty,$$
$$\forall\gamma\in(0,+\infty]:(+\infty)\times(\pm\gamma)=(\pm\gamma)\times(+\infty)=\pm\infty,$$
$$\forall\gamma\in(0,+\infty]:(-\infty)\times(\pm\gamma)=(\pm\gamma)\times(-\infty)=\mp\infty,$$
$$\forall\gamma\in(-\infty,+\infty):0\times(\pm\infty)=\gamma\div(\pm\infty)=0.$$

式子 $0\times(\pm\infty)=0$ 的合理性可以这样解释: 直线 $\mathbb{R}\times\{0\}$ 是一条边长为无穷大而另一条边长为零的矩形, 其面积为零. 表达式 $(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 和 $(\pm\infty)-(\pm\infty)$ 在广义实数系中是不定型. 同样表达式 $(\pm\infty)\div(\pm\infty)$ 和 $(\pm\infty)\div(\mp\infty)$ 也是不定型.

上确界与下确界 设 S 是偏序集 X 的非空子集, S 的最小上界 (若存在) 称为 S 的 上确界 并记为 $\sup S$ 或 $\sup\limits_{x\in S} x$. 因此

$$\sup S = \min\{b \in X | \forall x \in S : x \leqslant b\}.$$

而 S 的有最大下界 (若存在) 称为 S 的 下确界 并记为 $\inf S$ 或 $\inf\limits_{x\in S} x$, 即

$$\inf S = \max\{a \in X | \forall x \in S : x \geqslant a\}.$$

对于广义实数系的非空子集 A 和 B, 记 $-A = \{-x | x \in A\}$; 若 x 是广义实数, 记 $x + B = \{x + y | y \in B\}$, 这要求括号内每个 $x + y$ 都有意义. 记

$$A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\},$$

这要求括号内每个 $x + y$ 都有意义.

(1) 对偶律: $\sup(-A) = -\inf A$ 而 $\inf(-A) = -\sup A$.

(2) 单调性: 如果 $A \subsetneq B$, 则 $\sup A \leqslant \sup B$ 且 $\inf B \leqslant \inf A$.

(3) 分配律: $\sup(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \sup\limits_{i\in I} \sup A_i$ 且 $\inf(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \inf\limits_{i\in I} \inf A_i$.

(4) 平移律: $\sup(x + B) = x + \sup B$ 在两边有意义时或立.

(5) 平移律: $\inf(x + B) = x + \inf B$ 在两边有意义时成立.

(6) 分配律: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ 在两边有意义时成立.

(7) 分配律: $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ 在两边有意义时成立.

广义数集的上确界与下确界的存在性源自以下结论.

定理 1 广义数集 A 在广义实数系中有上确界 $\sup A$ 和下确界 $\inf A$.

当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $\sup\{r \in \mathbb{Q} | r < x\} = x$ 且 $\inf\{r \in \mathbb{Q} | r > x\} = x$.

例 1 设 n 是正整数, 则任何非负实数 x 都有 n 次方根 $\sqrt[n]{x}$. 为此命

$$A = \{z \geqslant 0 | z^n \leqslant x\}$$

及 $y = \sup A$. 据幂函数的连续性知 $y^n \leqslant x$. 如果 $y^n < x$, 命

$$\delta = \min\{1, (x - y^n) / \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} y^{n-i}\},$$

则 $\delta > 0$ 且 $(y + \delta)^n \leqslant x$. 这与 y 的极大性矛盾.

例 2 广义数集 E 是区间当且仅当 $u,v\in E$ 时 $[u,v]\subseteq E$. 为此命 $a=\inf E$ 而 $b=\sup E$, 可设 $a<b$. 当 $a<x<b$ 时, 有 $u,v\in E$ 使 $u<x<v$, 从而 $x\in[u,v]\subseteq E$. 因此, $(a,b)\subseteq E\subseteq[a,b]$. 故 E 是以 a 和 b 为端点的区间.

两个广义实数 x 和 y 的最大者和最小者分别用 $x\vee y$ 和 $x\wedge y$ 表示.

例 3 函数 $g,h:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 恒使 $g(x)\leqslant h(x)$ 时, 记成 $g\leqslant h$. 关系 $\leqslant$ 具有自反性 ($g\leqslant g$)、反称性 ($g\leqslant h$ 且 $h\leqslant g$ 时, $g=h$) 和传递性 ($g\leqslant f$ 且 $f\leqslant h$ 时, $g\leqslant h$). 它还具有定向性: 任取 $f_1,f_2\in\overline{\mathbb{R}}^X$, 命 $f(x)=f_1(x)\vee f_2(x)$, 则 $f_1\leqslant f$ 且 $f_2\leqslant f$. 因此函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 的全体 $\overline{\mathbb{R}}^X$ 按 $\leqslant$ 成为定向集.

当 X 包含两个互异元素 a 与 b 时, $\overline{\mathbb{R}}^X$ 不是全序集. 为此作函数 f 与 g 使 $f(a)=1,f(b)=0$ 而 $g(a)=0,g(b)=1$. 这样 f 与 g 不满足三岐性.

定向集 $\overline{\mathbb{R}}^X$ 的非空子集 E 都有上确界 $\sup E$ 和下确界 $\inf E$, 这可分别记为 $\sup\limits_{f\in E}f$ 和 $\inf\limits_{f\in E}f$. 为此命 $g(x)=\inf\limits_{f\in E}f(x)$ 和 $h(x)=\sup\limits_{f\in E}f(x)$, 这得 E 的一个下界 g 和一个上界 h. 当 g_1 和 h_1 分别也是 E 的下界和上界时,

$$\begin{aligned}g_1(x)&\leqslant\inf\{f(x)|f\in E\}=g(x),\\h_1(x)&\geqslant\sup\{f(x)|f\in E\}=h(x).\end{aligned}$$

这样 g 和 h 分别是 E 的最大下界和最小上界.

上极限与下极限 广义实数序列 (x_n) 有上极限 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\inf\limits_{n\geqslant1}\sup\limits_{k\geqslant n}x_k$(这是一个广义实数), 也有下极限 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\sup\limits_{n\geqslant1}\inf\limits_{k\geqslant n}x_k$(这也是一个广义实数). 总有不等式 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$. 它们相等时记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 并称为 (x_n) 的极限.

(1) $\varlimsup(-x_n)=-\varliminf x_n$ 而 $\varliminf(-x_n)=-\varlimsup x_n$.

(2) 对于子列 (k_n), 有 $\varliminf x_n\leqslant\varliminf x_{k_n}$ 且 $\varlimsup x_{k_n}\leqslant\varlimsup x_n$.

(3) 从某项起 $x_n\leqslant y_n$, 则 $\varliminf x_n\leqslant\varliminf y_n$ 且 $\varlimsup x_n\leqslant\varlimsup y_n$.

(4) $0<\lim x_n<+\infty$ 时, $\varlimsup(x_ny_n)=\lim x_n\varlimsup y_n$.

(5) $0<\lim x_n<+\infty$ 时, $\varliminf(x_ny_n)=\lim x_n\varliminf y_n$.

(6) 在有意义时, $\varlimsup(x_n+y_n)\leqslant\varlimsup x_n+\varlimsup y_n$.

(7) 在有意义时, $\varliminf(x_n+y_n)\geqslant\varliminf x_n+\varliminf y_n$.

(8) 在有意义时, $\varliminf(x_n+y_n)\leqslant\varliminf x_n+\varlimsup y_n\leqslant\varlimsup(x_n+y_n)$.

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. 为此注意到

$$\frac{n!}{(n-i)!n^i}=(1-\frac{i-1}{n})\cdots(1-\frac{1}{n})<1,$$

其中 $i=0,1,\cdots,n$. 当 $n\to\infty$ 时，上式左边极限为 1. 当 $m\leqslant n$ 时，

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{n!}{i!(n-i)!n^i}\leqslant\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!n^i}\leqslant\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}.$$

在上式中命 $n\to\infty$ 得 (相对于 n 而言， m 是固定的)

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{i!}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}.$$

注意到上下极限与 m 无关，可令 $m\to\infty$, 这得

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}.$$

因此上极限与下极限相等并且要证明的等式成立.

上例体现了用上下极限求极限时事先不必确立极限的存在性这一优点.

定理 2(Cauchy 收敛原理) 关于实数列 (x_n) 的以下三个条件等价：

(1) (x_n) 是收敛数列： $\exists x\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n>m:|x_n-x|<\varepsilon$.

(2) (x_n) 是基本数列： $\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n,l>m:|x_n-x_l|<\varepsilon$.

(3) (x_n) 是有界数列并且极限存在. 此时 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

此定理表明本节的极限概念与数学分析中的相关概念是相容的.

定理 3(单调完备性) 单调广义数列 (x_n) 有极限.

在递增情形， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sup\limits_{n\geqslant 1}x_n$; 在递减情形， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\inf\limits_{n\geqslant 1}x_n$.

定理 4 广义实数列 (x_n) 的上极限是其子列极限中的最大者，而 (x_n) 的下极限是其子列极限中的最小者.

有极限的广义实数列称为广义实数系的收敛序列，定理 4 蕴含以下定理.

定理 5(Bolzano-Weierstrass) 广义实数列都有收敛子列.

广义实数 x 都有正部 $x^+=x\vee 0$ 与负部 $x^-=(-x)\vee 0$, 这可统一写成 $x^\pm=(\pm x)\vee 0$. 因此 $x=x^+-x^-$ 且 $|x|=x^++x^-$. 任何复数 z 都有实部 $\operatorname{re}z$ 与虚部 $\operatorname{im}z$ 使 $z=\operatorname{re}z+\sqrt{-1}\operatorname{im}z$ 及 $\overline{z}=\operatorname{re}z-\sqrt{-1}\operatorname{im}z$.

数值项级数 设 $i \in I$ 时 $0 \leqslant u_i \leqslant +\infty$, 命

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup\{\sum_{i \in F} u_i | 有限集 F \subseteq I\}.$$

这可记为 $\sum(u_i : i \in I)$. 特别地, $\sum(u_i : i \in \varnothing) = 0$.

设 $i \in I$ 时 $-\infty \leqslant v_i \leqslant +\infty$. 下式右端有意义时规定

$$\sum_{i \in I} v_i = \sum_{i \in I} v_i^+ - \sum_{i \in I} v_i^-.$$

此时若某项 v_i 为 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时, 相应的和为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

设 $w_i : i \in I$ 都是复数. 在下式右端两个级数有限时规定

$$\sum_{i \in I} w_i = \sum_{i \in I} \mathrm{re}\, w_i + \sqrt{-1} \sum_{i \in I} \mathrm{im}\, w_i.$$

以上定义方式使级数和与求和顺序无关. 这样规定的级数都满足以下性质:

(1)$|\sum_{i \in I} x_i| \leqslant \sum_{i \in I} |x_i|$. 进而, $\sum_{i \in I} x_i$ 可和 — 和数有限当且仅当 $\sum_{i \in I} |x_i|$ 可和. 此时各项 x_i 都有限且非零项有可数个.

(2)$\sum_{i \in I}(ax_i + by_i) = a \sum_{i \in I} x_i + b \sum_{i \in I} x_i$ 在两边有意义时成立.

(3)$I = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ 时, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i \in I_\lambda} y_i$ 在左边有意义时成立.

(4) $\sum_{I \times J} x_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} x_{ij}$ 在左边有意义时成立.

(5)$J \subseteq I$ 时, 缺项级数 $\sum_{i \in J} x_i = \sum_{i \in I} x_i \chi_J(i)$.

例 5 当 J 是可数集时, 有一簇数 $(a_i : i \in J)$ 使每个 $a_i > 0$ 且 $\sum_{i \in J} a_i < +\infty$. 为此设 $J = \mathbb{Z}_+$, 命 $a_n = 2^{-n}$ 即可.

这个例子看似寻常, 但它对以后一些问题有重要作用.

例 6 考虑单调函数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, 无妨设它递增. 任取 $(0,1)$ 中有限个依小到大排列的数 $x_1, \cdots, x_n$. 命 $x_0 = 0$ 而 $x_{n+1} = 1$, 则

$$f(x_i+) - f(x_i-) \leqslant f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) - f(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}).$$

于是 $\sum_{i \leqslant n} (f(x_i+) - f(x_i-)) \leqslant f(1-) - f(0+)$. 因此,

$$\sum_{0<x<1} |f(x+) - f(x-)| \leqslant |f(1-) - f(0+)|.$$

因此使 $f(x+) \neq f(x-)$(使 f 不连续) 的点仅 x 有可数个.

以上有关级数的性质 (3) 和 (4) 的证明都依赖于以下定理, 这个定理与本书 §3.2 介绍的单调收敛定理在精神上是一致的.

定理 6(级数形式的单调收敛定理) 设 J 是定向集. 设 $i\in I$ 时非负函数 $u_i: J\to\overline{\mathbb{R}}$ 是递增的 — 当 $k\preceq l$ 时 $u_i(k)\leqslant u_i(l)$, 则

$$\sup_{j\in J}\sum_{i\in I}u_i(j)=\sum_{i\in I}\sup_{j\in J}u_i(j).$$

对于实数 x, 命 $[x]=\max\{n\in\mathbb{Z}|n\leqslant x\}$. 这是 x 的 **整数部分**— 不超过 x 的最大整数. 如 $[-2.3]=-3$ 而 $[2.3]=2$. 命 $(x)=x-[x]$. 这是 x 的 **小数部分**. 如 $[-2.3]=-3$ 而 $(-2.3)=0.7$. 当 n 是整数时, $[\cdot]$ 在区间 $[n,n+1)$ 内取常数值 n, 在 $(n,n+1)$ 内导数恒为 0.

小数 设整数 $p>1$ 而 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 是恒满足 $0\leqslant a_n<p$ 的整数列, 则

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p-1}{p^k}=1.$$

上式中第一个级数表示的实数 x 记为 $(0.a_1a_2\cdots)_p$ 或简记为 $0.a_1a_2\cdots$, 这称为一个 p 进制小数. 它满足 $0\leqslant x\leqslant 1$, 且当 $n\geqslant 1$ 时

$$0\leqslant x-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{p^i}\leqslant\sum_{i>n}\frac{p-1}{p^i}=\frac{1}{p^n}.$$

(1 $x=0$ 当且仅当 a_n 恒为 0; 而 $x=1$ 当且仅当 a_n 恒为 $p-1$.

(2) 无限项 a_n 不为 $p-1$ 时, $(0.a_1a_2\cdots)_p$ 称为一个 p 进制标准小数. 无限项 a_n 不为 0 时, $(0.a_1a_2\cdots)_p$ 称为一个 p 进制无限小数; 否则称为 p 进制有限小数.

(3) p 进制有限小数和 p 进制无限小数有可能表示一个实数. 如二进制有限小数 $(0.100\cdots)_2$ 与二进制无限小数 $(0.011\cdots)_2$ 都表示 $1/2$.

(4) $0\leqslant x<1$ 当且仅当有唯一整数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 使

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{p^i}\leqslant x<\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{p^i}+\frac{1}{p^n}:n\geqslant 1$$

这等价于 $(0.a_1a_2\cdots)_p$ 为 x 的 p 进制标准小数表示.

(5) $0<y\leqslant 1$ 当且仅当有唯一整数列 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 使

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{p^i}<y\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{p^i}+\frac{1}{p^n}:n\geqslant 1$$

这等价于 $(0.b_1b_2\cdots)_p$ 为 y 的 p 进制无限小数表示.

(6) 非负实数 x 都可表示为 p 进制实数 $(a_{-n}a_{-n+1}\cdots a_0.a_1a_2\cdots)_p$, 其中 $(a_i)_{i=-n}^{\infty}$ 为满足 $0\leqslant a_i<p$ 的整数列使 $x=\sum_{i=-n}^{\infty}\frac{a_i}{p^i}$.

(7) 有限小数也可写成无限小数. 如 $(0.1)_4=(0.0333\cdots)_4$.

标准 p 进制小数不允许从某一项起都是 $p-1$. 如 $(0.0222\cdots)_3$ 的标准三进制小数是 $(0.1)_3$. 这是有限小数.

习 题

练习 1 证明两个有交点的同型区间的交集还是同型区间.

练习 2 证明有公共交点的开区间簇 $(a_i,b_i):i\in J$ 之并 E 是开区间.

练习 3(Darboux) 可导函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 的导数值组成一个区间.

练习 4 作一个正项级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1}a_n$ 值其所有缺项级数的和构成闭区间 $[0,1]$.

练习 5 命 $\mathcal{B}=\{([x],[x]+1]|x\in\mathbb{R}\}$, 证明 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个划分.

练习 6 设 $0\leqslant x<1$. 如果 x 的标准十进制小数表示中含数字 1, 将此种 x 归为一个集合 E. 试用区间与并运算表达 E.

练习 7 设 $0<x<1$. 如果 x 的十进制小数表示中含数字 1(认为 $0.1=0.099\cdots$, 这不含 1), 将此种 x 归为一个集合 E. 试用区间运算表达 E.

练习 8 设 $0\leqslant x<1$, 用区间的运算表达使 x 的标准三进制小数 $0.a_1a_2\cdots$ 表示中出现数字 1 的 x 全体.

练习 9 设 (a_n) 是递减数列值级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1}a_n$ 的和 s 有限. 这个级数的所有缺项级数的和构成的集 E 是个区间当且仅当不等式 $a_n\leqslant\sum\limits_{i>n}a_i$ 恒成立.

练习 10 若正项级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1}a_n=+\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则这个级数的所有缺项级数的和构成区间 $[0,+\infty]$.

练习 11 广义实数系的子集 E 是可数个长度非零区间的无交并当且仅当每个 $x\in E$ 都对应至少一个长度非零的区间 I 使 $x\in I\subseteq E$.

练习 12 证明偏序集 $(2^X,\subseteq)$ 的任何子类 $\mathcal{S}$ 都有上确界与下确界.

§1.5 Euclid 空 间

线性空间 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 中任何两点 x 和 y 赋予 Euclid 距离

$$|x-y|=\sqrt{|x_1-y_1|^2+\cdots+|x_n-y_n|^2}$$

后分别称为实或复 Euclid 空间. Euclid 距离有以下性质:

非负对称性: $|y-x|=|x-y|\geqslant 0$, $|x-y|=0$ 当且仅当 $x=y$.

三角不等式: $|x-z|\leqslant|x-y|+|y-z|$ 或 $||x-z|-|y-z||\leqslant|x-y|$.

在 Euclid 空间中，以点 x 为球心以正数 r 为半径，定义

$$\begin{aligned}
\text{开球}O(x,r) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\},\\
\text{闭球}B(x,r) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| \leqslant r\},\\
\text{球面}S(x,r) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| = r\}.
\end{aligned}$$

在实直线上，它们分别是开区间 $(x-r,x+r)$ 、闭区间 $[x-r,x+r]$ 与两点集 $\{x-r,x+r\}$. 在平面上，它们分别是开圆盘、闭圆盘与圆周.

Euclid 空间的拓扑 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集 U 为 开集 是指任何 $x \in U$ 都拥有个 $r > 0$ 使 $O(x,r) \subseteq U$. 而 $\mathbb{R}^n$ 的子集 F 为 闭集 是指 $\mathbb{R}^n \setminus F$ 为开集. 任何开覆盖都有有限子覆盖的集合称为 紧集.

可列个开集的交集称为 G_δ- 型集，而可列个闭集的并集称为 F_σ- 型集.

(1) 空集与 Euclid 空间是开集；空集与 Euclid 空间是闭集.

(2) 任意个开集的并集是开集；任意个闭集的交集是闭集.

(3) 有限个开集的交集是开集；有限个闭集的并集是闭集.

(4) 开集减闭集是开集；闭集减开集是闭集.

(5) Euclid 空间的开集都是 F_σ- 型集而闭集都是 G_δ- 型集.

Euclid 空间中的有限子集 F 是闭集；开球是开集，闭球和球面是闭集.

定理 1(Heine-Borel) Euclid 空间的子集为紧集当且仅当它是有界闭集.

一般地， Euclid 空间中任何 F_σ- 型集都是可列个紧集之并.

定理 2(Cantor) 实直线上非空开集 U 可唯一地表示为至多可列个相互不交开区间的并. 这些开区间称为 U 的构成区间，它们的端点不在 U 中.

这个定理刻画了实直线上开集的结构，它表明实直线上的开区间是开集的基本构成单元. 它的作用类似于线性空间中线性基的作用.

例 1 开集 $(\sin > 0)$ 的构成区间是 $(2k\pi, 2k\pi+\pi) : k \in \mathbb{Z}$.

设 X 和 Y 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的非空点集. 函数 $f: X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 连续是指对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使 $x \in X$ 满足 $|x-x_0| < \delta$ 时, $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

定理 3 对于函数 $f: X \to Y$, 以下条件等价:

(1) f 是连续函数 — 逐点连续的函数.

(2) 对于 $\mathbb{R}^m$ 的开集 V, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 U 使 $f^{-1}(V \cap Y) = U \cap X$.

(3) 对于 $\mathbb{R}^m$ 的开集 F, 存在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 E 使 $f^{-1}(F \cap Y) = E \cap X$.

此时, f 将 X 中紧集映为紧集而 F_σ- 型集映为 F_σ- 型集.

对于 $\mathbb{R}^n$ 的点 x 与非空子集 S, 命 $d(x,S) = \inf\limits_{z \in S} |x - z|$. 这称为 x 到 S 的距离, 它是 x 的一致连续函数. 为此证明

$$|d(x,S) - d(y,S)| \leqslant |x - y|.$$

事实上, 不等式 $\inf\{|x-z| : z \in S\} \leqslant |x-y| + \inf\{|y-z| : z \in S\}$ 蕴含 $d(x,S) \leqslant |x-y| + d(y,S)$. 同样地, $d(y,S) \leqslant |x-y| + d(x,S)$.

例 2 设 E 是有限个相互不交闭集 $E_1, \cdots, E_k$ 的并. 如果函数 $f : E \to \mathbb{C}$ 在每个 E_i 上是常数 c_i, 则 f 是连续函数. 为此任取 $x \in E$, 则有 i 使 $x \in E_i \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j \neq i} E_j)$. 因此有 $r > 0$ 使 $O(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j \neq i} E_j$. 当 $z \in E$ 且 $|z - x| < r$ 时, z 只能在 E_i 中, 所以 $f(z) = f(x)$. 这样 f 在 x 连续.

设函数 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 的不连续点都是第一类的, 命 $\hat{g}(a) = g(a+)$ 与 $\hat{g}(b) = g(b-)$. 当 $a < x < b$ 时, 命 $\hat{g}(x) = \max\{g(x), g(x-), g(x+)\}$. 设 $a < x < y < b$ 使 $\hat{g}(x) < g(y)$, 称 x 为 g 的一个*右控点*,

引理 4(F. Riesz) 不连续点都是第一类的函数 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 的右控点全体 U 是开集且其构成区间 (u,v) 都满足不等式 $g(u+) \leqslant \hat{g}(v)$.

设 $a < y < x < b$ 使 $g(y) > \hat{g}(x)$, 则称 x 是 g 的一个 *左控点*.

引理 4'(F. Riesz) 不连续点都是第一类的函数 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ 的左控点全体 U 是开集且其构成区间 (u,v) 都满足不等式 $g(v-) \leqslant \hat{g}(u)$.

最后构造一个集合与函数, 它们常用来作为反例说明一些问题.

例 3(Cantor 集与 Cantor 函数) 将闭区间 [0,1] 三等分后移去中间的开区间 (0.1, 0.2), 其中小数为三进制的. 剩下的两个闭区间 $[0, 0.1]$ 与 $[0.2, 1]$ 分别三等分后各移去中间的开区间 (0.01,0.02) 和 (0.21,0.22).

如此下去, 这些被移去的开区间作为构成区间并成一个开集 O. 剩下的集 K 称为 Cantor 集. 等式 $K = [0,1] \setminus O$ 表明 K 是紧集. 第 n 次三等分移去的开区间形如 $(0.b_1 \cdots b_{n-1}1, 0.b_1 \cdots b_{n-1}2)$, 其中 $b_1, \cdots, b_{n-1}$ 非 0 即 2. 这些开区间有 2^{n-1} 个, 每个长度为 $1/3^n$.

设 $0 < x < 1$, 将 x 写成标准三进制小数 $0.a_1a_2\cdots$. 于是 $x \in O$ 当且仅当有位 a_n 为 1 且有个 $i > n$ 使 $a_i \neq 0$. 因此 $x \in K$ 当且仅当要么所有 a_n 非 0 即 2 要么只有一个 $a_n = 1$ 而 $i > n$ 时 $a_i = 0$(此时 x 可写成非标准形式 $0.a_1\cdots a_{n-1}022\cdots$) 当且仅当 x 能写成三进制小数使其中每一位非 0 即 2. 注意到 $0 = 0.00\cdots$ 及 $1 = 0.22\cdots$, 我们有

$$K = \{(0.a_1a_2\cdots)_3 | \forall n \geqslant 1 : a_n = 0, 2\}.$$

因此 Cantor 集 K 与 $\{0,2\}^{\mathbb{Z}_+}$ 对等. 它的势为 $2^{\aleph_0}$ 即 $\aleph$. 现命

$$\varphi(0.a_1a_2\cdots a_n\cdots)_3 = (0.\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\cdots\frac{a_n}{2}\cdots)_2,$$

这得 K 上函数 φ. 因为 $[0,1]$ 中数可用二进制小数表示, $\varphi(K) = [0,1]$. 当 $(0.b_1b_2\cdots)_3$ 与 $(0.a_1a_2\cdots)_3$ 是 K 中大小两数时,

$$\begin{aligned}&0 < (0.b_1b_2\cdots)_3 - (0.a_1a_2\cdots)_3\\ \leqslant&\frac{b_n - a_n}{3^n} + \sum_{i>n}\frac{2}{3^i} = \frac{b_n - a_n + 1}{3^n},\end{aligned}$$

其中 $n = \min\{i | a_i \neq b_i\}$. 上式表明 $a_n = 0$ 且 $b_n = 2$. 于是

$$\begin{aligned}&\varphi(0.a_1a_2\cdots)_3 - \varphi(0.b_1b_2\cdots)_3\\ =&\frac{-2}{2^{n+1}} + \sum_{i>n}\frac{a_i - b_i}{2^{i+1}} \leqslant \frac{-2}{2^{n+1}} + \sum_{i>n}\frac{2}{2^{i+1}} = 0.\end{aligned}$$

对于 $x \in O$, 补充定义 $\varphi(x) = \sup\{\varphi(y) | y \in K, y \leqslant x\}$. 显然 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$. 如果 φ 在某点 x_0 不连续, 因为 φ 递增, 可设 $\varphi(x_0) < \varphi(x_0+)$. 这样 $\operatorname{ran}\varphi$ 不含 $[0,1]$ 的非空子集 $(\varphi(x_0), \varphi(x_0+))$, 矛盾.

这样我们构造了所谓的 Cantor 函数 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, 它连续递增且当 x 在 O 的一个构成区间 (a,b) 中时, $\varphi(x) = \varphi(a)$.

下面讨论线性空间中的一些基本结论以备后面的应用.

线性组合 以 $\mathbb{K}$ 代表一个数域, 如 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 等. 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间. 如果 x, x_i 是 X 中向量而 a_i 是 $\mathbb{K}$ 中数使得

$$x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

称 x 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的 **线性组合**. 如果 $x = 0$ 必导致 $a_1 = \cdots = a_n = 0$, 称 $x_1, \cdots, x_n$ 是 **线性无关组**.

(1) 对线性组合封闭的子集称为线性子空间. 一般非空子集 S 的 线性包

$$\operatorname{span} S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i | a_i \in \mathbb{K}; x_i \in S \}.$$

这是包含 S 的最小线性子空间. 如 $\operatorname{span}\{0\} = \{0\}$, 它是 平凡空间.

(2) 称 S 为 线性无关集 是指 S 中任何有限个互异向量线性无关. 这即 S 对 $\operatorname{span} S$ 中向量都有唯一线性表示. 一个非零向量构成一个线性无关集.

(3) 对于 $a \in \mathbb{K}$, 命 $aS = \{ax | x \in S\}$, 如 $1S = S$. 对于 $S_i \subseteq X$, 作 代数和差 $S_1 \pm S_2 = \{x_1 \pm x_2 | x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$.

(4) 当 a_i 都非负且 $a_1 + \cdots + a_n = 1$ 时, 称 $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的 凸组合. 非空子集 E 对凸组合封闭当且仅当满足 $0 < t < 1$ 的实数 t 使 $tE + (1-t)E = E$ 当且仅当 a 和 b 是非负实数时 $aE + bE = (a+b)E$. 此时称 E 是 凸集.

(5) 包含非空子集 S 的所有凸集之交 $\operatorname{cov} S$ 是 S 的 凸包— 包含 S 的最小凸集:

$$\operatorname{cov} S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i | t_i \geqslant 0 : \sum_{i \leqslant n} t_i = 1; x_i \in S \}.$$

从线性代数知, 实线性空间 $\mathbb{R}^n$ 与复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 的线性基都有 n 个向量. 因此它们分别为实 n 维或复 n 维线性空间.

定理 5 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上非平凡线性空间 [而 S 是其线性无关集], 则 X 有个 [含 S 的] 线性基或 Hamel 基 — 使 $\operatorname{span} B = X$ 的线性无关集 B.

平移 对于线性空间 X 的子集 E 与向量 x, 作平移

$$x + E = \{x + y | y \in E\}.$$

这是 E 在双射 $X \to X, y \mapsto x + y$ 下的像集. 它有以下性质:

(1) 平移保持单调性: $E \subseteq F \Rightarrow x + E \subseteq x + F$.

(2) 平移保持并运算: $x + \bigcup\{E_i | i \in I\} = \bigcup\{x + E_i | i \in I\}$.

(3) 平移保持交运算: $x + \bigcap\{E_i | i \in I\} = \bigcap\{x + E_i | i \in I\}$.

(4) 平移保持差运算: $x + (E \setminus F) = (x + E) \setminus (x + F)$.

(5) 平移服从结合律: $x + (y + E) = (x + y) + E$.

(6) 凸集的平移还是凸集, 但线性子空间的平移不必是线性子空间.

习 题

练习 1 证明实直线上所有区间都是可列个紧集的并.

练习 2 证明: (1) 有限个 G_δ- 型集的并是 G_δ- 型集.

(2) 有限个 F_σ- 型集的交是 F_σ- 型集.

(3) 可列个 G_δ- 型集的交是 G_δ- 型集.

(4) 可列个 F_σ- 型集的并是 F_σ- 型集.

练习 3 证明: 实直线上所有区间都是 G_δ- 型集也都是 F_σ- 型集.

练习 4 如果 X_1 是线性空间 X 的线性子空间, 证明 X 有线性子空间 X_2 使 X 是 X_1 与 X_2 的代数直和: $X = X_1 \oplus X_2$.

练习 5(S. Kakutani 定理) 设 A 和 B 是线性空间 X 中不相交的凸集, 则有互补的凸集 C 和 D 使 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq D$.

练习 6(Euclid 空间的第二可数性) 证明 $\mathbb{R}^n$ 中有可列个开集 $B_k : k \in \mathbb{Z}_+$ 使 $\mathbb{R}^n$ 的每个开集 U 都形如 $\bigcup\{B_k | B_k \subseteq U\}$.

练习 7(Lindelölf) Euclid 空间的任何子集 A 具有 Lindelöf 性质: 它的任何开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$ 有可数子覆盖.

练习 8 求 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中开集全体 $\mathcal{O}$ 与闭集全体 $\mathcal{F}$ 的势.

练习 9 无限集 X 的有限子集全体 $\mathcal{F}(X)$ 与 X 对等.

练习 10 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间, 则 X 的任何两个 Hamel 基 E 和 F 有相同的势. 将 E 的势记为 $\dim_{\mathbb{K}} X$ 或 $\dim X$, 这称为 X 的线性维数.

练习 11 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间而 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{K}$ 的子域. 将 X 与 $\mathbb{K}$ 视为 $\mathbb{F}$ 上线性空间后, $\dim_{\mathbb{F}} X = \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \dim_{\mathbb{K}} X$.

* **练习 12(推广的 F. Riesz 引理)** 对于函数 $g : (a,b) \to \overline{\mathbb{R}}$, 命

$$\hat{g}(x+) = \overline{\lim_{z \to x+}} g(z) : a \leqslant x < b,$$

$$\hat{g}(x-) = \overline{\lim_{z \to x-}} g(z) : a < x \leqslant b,$$

$$\hat{g}(x) = g(x) \vee \hat{g}(x+) \vee \hat{g}(x-) : a < x < b,$$

$$\hat{g}(a) = \hat{g}(a+); \hat{g}(b) = \hat{g}(b-).$$

(1) 设 $a < x < y < b$ 使 $\hat{g}(x) < g(y)$, 称 x 为 g 的一个 *右控点*, 其全体 U 是开集且 U 的构成区间 (u,v) 都满足不等式 $\hat{g}(u+) \leqslant \hat{g}(v)$.

(2) 设 $a < y < x < b$ 使 $\hat{g}(x) < g(y)$, 称 x 是 g 的一个 *左控点*, 其全体 V 是开集且 V 的构成区间 (u,v) 都满足不等式 $\hat{g}(v-) \leqslant \hat{g}(u)$.

练习 13 符号同练习 12, 当 $a < x < b$ 时, 证明 $\overline{\lim_{z \to x}} \hat{g}(z) \leqslant \hat{g}(x)$.

练习 14 找一列正数 (x_n) 使集合 $\{\sum_{n \in J} x_n | J \subseteq \mathbb{Z}_+\}$ 为 Cantor 集 K.

练习 15 对于 Cantor 集 K, 证明 $K + K = [0,2]$ 且 $K - K = [-1,1]$.

练习 16 任取 Cantor 集 K 中的两个点 x 和 y, 其三进位小数形如 $0.a_1a_2\cdots$ 和 $0.b_1b_2\cdots$, 其中 a_n 和 b_n 非 0 即 2.

(1) 设 $a_n \neq b_n$ 且 $i < n$ 时 $a_i = b_i$, 则 $|y - x| \leqslant 3^{1-n}$.

(2) 设 $a_n < b_n$ 且 $i < n$ 时 $a_i = b_i$, 则 $y - x \geqslant 3^{-n}$.

(3) 设 $|y - x| < 3^{-n}$, 则 $i \leqslant n$ 时 $b_i = a_i$.

(4) 命 $f_n(x) = a_n$, 则 $f : K \to \{0, 1\}$ 是连续函数.

练习 17 证明: 可和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的所有缺项级数之和构成的集 E 是紧集.

练习 18 如果区间 X 上单射 $f : X \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 证明 f 严格单调.

练习 19 设 X 是实直线上的子集而 $f : X \to \mathbb{R}$ 是递增函数: 当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. 如果 f 的值域是区间, 则 f 是连续的.

练习 20 能否从区间 (0,1] 与 [0,1] 对等得连续双射 $f : (0, 1] \to [0, 1]$?

练习 21 设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, E 和 F 分别是它们的线性基. 证明映射 $A : X \to Y$ 是线性的当且仅当 K 中有唯一数族 $a_{vu} : u \in E, v \in F$ 满足以下条件:

(1) 任何 $u \in E$ 都使 $\{v | a_{vu} \neq 0\}$ 是有限集.

(2) 当 $x = \sum_{u \in E} u b_u$ 时 (其中 b_u 是系数且不为零的项数是有限的),

$$Ax = \sum_{v \in F} v \sum_{u \in E} a_{vu} b_u.$$

此时可将 A 写成矩阵形式 $[a_{vu}]_{v \in F, u \in E}$, 这简记为 $[a_{vu}]_{F \times E}$.

练习 22 设 E, F 和 G 分别线性空间 X, Y 和 Z 的线性基. 设映射 $A : X \to Y$ 和 $B : Y \to Z$ 都是线性的, 它们的表示矩阵分别是 $[a_{vu}]_{F \times E}$ 和 $[b_{wv}]_{G \times F}$. 证明复合 $BA : X \to Z$ 是线性的且其表示矩阵是 $[\sum_{v \in F} b_{wv} a_{vu}]_{G \times E}$.

第 2 章

测度与可测性

前面介绍了为建立实分析所需要的基本工具. 实分析的第一个重要概念是测度, 它是长度和面积等几何量的推广, 其重要特征是可列可加性, 这对应着集列的无交并运算和级数运算. 测度本身是一种函数, 因此先有必要清楚它的定义域.

§2.1 环与测度

设某些集合组成集类 $\mathcal{A}$ 使 $X=\bigcup\mathcal{A}$, 称 X 为 $\mathcal{A}$ 的基本空间.

(1) $\mathcal{A}$ 对有限并运算封闭是指: $E,F\in\mathcal{A}$ 时, $E\cup F\in\mathcal{A}$. 这可写成

$$\{E\cup F|E,F\in\mathcal{A}\}\subseteq\mathcal{A}.$$

(2) $\mathcal{A}$ 对有限无交并运算封闭是指: $E,F\in\mathcal{A}$ 且 $E\cap F=\varnothing$ 时, $E\cup F\in\mathcal{A}$.

(3) $\mathcal{A}$ 对有限交运算封闭是指 $\{E\cap F|E,F\in\mathcal{A}\}\subseteq\mathcal{A}$.

(4) $\mathcal{A}$ 对差运算封闭是指 $\{E\setminus F|E,F\in\mathcal{A}\}\subseteq\mathcal{A}$. 此时

$$\varnothing=E\setminus E\in\mathcal{A}.$$

(5) $\mathcal{A}$ 对补运算封闭是指 $\{X\setminus E|E\in\mathcal{A}\}\subseteq\mathcal{A}$.

(6) $\mathcal{A}$ 对可列并运算封闭是指 $\mathcal{A}$ 中序列 (E_n) 之并都在 $\mathcal{A}$ 中.

(7) $\mathcal{A}$ 对可列无交并运算封闭是指 $\mathcal{A}$ 中相互不交序列之并都在 $\mathcal{A}$ 中.

环与代数 对于集合差运算与有限无交并运算封闭的集类 $\mathcal{R}$ 称为一个环. 以基本空间 X 为其成员的环也称为一个代数.

(1) 空集是每个环的成员; 环对于有限个集的并运算与交运算封闭.

(2) 一簇环 $\mathcal{R}_i: i\in I$ 之交 $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{R}_i$ 还是环.

(3) 幂集 2^X 是 X 上最大的代数. 包含集类 $\mathcal{A}$ 的所有环 $\mathcal{R}$ 之交 $\mathbf{R}(\mathcal{A})$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小环 — 这称为 $\mathcal{A}$ 生成的环.

(4) 大的集类生成的环不会小: $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{F}\Rightarrow\mathbf{R}(\mathcal{E})\subseteq\mathbf{R}(\mathcal{F})$.

实直线中开集全体不是环, 因为开集 $(0,2)$ 与开集 $(0,1)$ 之差 $[1,2)$ 不再是开集.

例 1 两个有限集的并与差是有限集，所以 X 的全体有限子集组成环 $\mathcal{F}(X)$. 它由 X 的单点子集全体 $\mathcal{S}$ 生成. 事实上， $\mathbf{R}(\mathcal{S})$ 的最小性蕴含 $\mathbf{R}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{F}(X)$. 反向不等式源自有限子集是有限个单点子集之并.

初等分解与半环 集类 $\mathcal{A}$ 中有限个相互不交的成员 $E_1, \cdots, E_n$ 之并为 E 时，称 $\{E_i | i \leqslant n\}$ 是 E 相对于 $\mathcal{A}$ 的*初等分解*.

(1) 设集类 $\mathcal{A}$ 是半环 — 它对有限交运算封闭且 $\mathcal{A}$ 中两个成员之差可由 $\mathcal{A}$ 初等分解，则 $\mathbf{R}(\mathcal{A})$ 中成员都可由 $\mathcal{A}$ 初等分解.

(2) 设 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$ 是半环，则 $\mathcal{E} * \mathcal{F} := \{E \times F | E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F}\}$ 是半环.

例 2 以 $\mathbb{R}$ 为基本空间的集类 $\mathcal{P}_1 = \{(a,b] | -\infty < a \leqslant b < +\infty\}$ 是半环：

$$(a,b] \setminus (c,d] = (a, b \wedge c] \sqcup (a \vee d, b],$$
$$(a,b] \cap (c,d] = (a \vee c, b \wedge d].$$

(左端点比右端点大的区间理解为空集). 环 $\mathcal{R}_1 = \mathbf{R}(\mathcal{P}_1)$，其中成员 E 可由 $\mathcal{P}_1$ 初等分解： $E = (a_1, b_1] \sqcup \cdots \sqcup (a_n, b_n]$.

初等分解不唯一. 如 $\{(0,2]\}$ 与 $\{(0,1],(1,2]\}$ 都是 (0,2] 的初等分解. 但在区间数目最少的意义下， $\mathcal{R}_1$ 中成员都有唯一初等分解.

虽然不要求环对可列并运算封闭，但环中某些序列的并可以在这个环中. 如环 $\mathcal{R}_1$ 就包含其序列 $\{(2^{-n}, 2^{1-n}] | n \in \mathbb{Z}_+\}$ 之并 $(0,1]$.

例 3 以 $\mathcal{K}$ 记实直线中紧集全体. 它对并与交封闭，但它非半环. 这是因为 [0,2] 与 [0,1] 之差 (1,2] 不是紧集. 但 $\mathcal{K}_1 = \{E \setminus F | E, F \in \mathcal{K}\}$ 是半环：

$$(E_1 \setminus F_1) \cap (E_2 \setminus F_2) = (E_1 \cap E_2) \setminus (F_1 \sqcup F_2).$$

以 $E_2 \cap F_2$ 代替 F_2 后可设 $F_2 \subseteq E_2$，于是 $F_2 \cap E_2^{\mathrm{c}} = \varnothing$. 这得

$$\begin{aligned}&(E_1 \setminus F_1) \setminus (E_2 \setminus F_2) = E_1 \cap F_1^{\mathrm{c}} \cap (E_2 \cap F_2^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \\ =&E_1 \cap F_1^{\mathrm{c}} \cap (E_2^{\mathrm{c}} \sqcup F_2) = (E_1 \setminus (E_2 \cup F_1)) \sqcup ((E_1 \cap F_2) \setminus E_2).\end{aligned}$$

因此 $(E_1 \setminus F_1) \setminus (E_2 \setminus F_2)$ 可被 $\mathcal{K}_1$ 初等分解. 这样 $\mathcal{K}_1$ 是半环.

由 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \mathbf{R}(\mathcal{K})$ 知 $\mathbf{R}(\mathcal{K}) = \mathbf{R}(K_1)$. 于是

$$\mathbf{R}(\mathcal{K}) = \{\bigsqcup_{i \leqslant m} (E_i \setminus F_i) | E_i, F_i \in \mathcal{K}, m \geqslant 1\}.$$

测度 设环上集函数 $\mu:\mathcal{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ 满足以下条件:

(1) 空集是其零集 — 取值为零的集: $\mu(\varnothing)=0$.

(2) 非负性: $E\in\mathcal{R}$ 时, $0\leqslant\mu(E)\leqslant+\infty$.

(3) 可列可加性: $\mathcal{R}$ 中相互不交序列 (E_n) 之并 E 仍在 $\mathcal{R}$ 中时,

$$\mu(E)=\mu(E_1)+\mu(E_2)+\cdots,$$

则称 μ 为测度. 它有以下性质 (以下点集都来自 $\mathcal{R}$ 中).

(4) 有限可加性: $\mu(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n}E_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(E_i)$.

(5) 分割测量性 (与有限可加性等价): $\mu(F)=\mu(F\cap E)+\mu(F\setminus E)$.

(6) 单调性: 若 E 是 F 的子集, 则 $\mu(E)\leqslant\mu(F)$.

(7) 可减性: 若 E 是 F 的测度有限子集, 则 $\mu(F\setminus E)=\mu(F)-\mu(E)$.

(8) 可列次可加性: $\{E_n\}$ 覆盖 E 时, $\mu(E)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$

(9) 下连续性: (E_n) 递增至 E 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu(E)$.

(10) 上连续性: (E_n) 递减至 E 且某项测度有限时, 上式成立.

(11) 序列 (E_n) 的下限集为 E 时, $\mu(E)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$.

(12) $E=\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n$ 且有 k 使 $\mu(\bigcup\limits_{n\geqslant k}E_n)$ 有限时, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)\leqslant\mu(E)$.

任何环 $\mathcal{R}$ 上都有个计数测度 — 有限集 E 的计数测度 $|E|_0$ 是 E 中元素个数而无限集 E 的计数测度 $|E|_0=+\infty$.

引理 1(Borel-Cantelli 引理) 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上测度, 设 (E_n) 是 $\mathcal{R}$ 中序列使 $E=\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n$ 在 $\mathcal{R}$ 中. 若有 k 使 $\sum\limits_{n\geqslant k}\mu(E_n)<+\infty$, 则 $\mu(E)=0$.

下面提供一个判断可列可加性的标准.

定理 2 如果环上非负集函数 $\mu:\mathcal{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ 具有分割测量性 (相当于有限可加性) 与可列次可加性, 则它具有可列可加性.

取值恒为有限数的测度称为有限测度. 环 $2^{\mathbb{N}}$ 上计数测度不是有限测度, 它是 σ- 有限测度 — 环中任何成员可被一列测度有限集所覆盖. 环 $2^{\mathbb{R}}$ 上计数测度不是 σ- 有限的, 因为实直线不是可列个有限集之并. 代数上 $(\sigma\text{-})$ 有限测度也称为全 $(\sigma\text{-})$ 有限测度.

单调类与 σ- 环 (一) 对于单调集列的极限运算封闭的集类 $\mathcal{M}$ 称为单调类. 如幂集 2^X 是单调类. 一簇单调类 $\{\mathcal{M}_i|i\in I\}$ 之交 $\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i$ 还是单调类. 集类 $\mathcal{A}$ 生成的单调类 $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小单调类.

(二) 对于差运算与可列无交并运算封闭的集类 $\mathcal{S}$ 称为 σ- 环. 以基本空间为成员的 σ- 环也称为 σ- 代数. 幂集 2^X 是 X 上最大的 σ- 代数和单调类.

(1) 一簇 σ- 环 $\{\mathcal{S}_i|i\in I\}$ 之交 $\bigcap_{i\in I}\mathcal{S}_i$ 还是 σ- 环. 集类 $\mathcal{A}$ 生成的 σ- 环 $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ 是包含 $\mathcal{A}$ 的最小 σ- 环. 将 $\mathcal{A}$ 称为 σ- 环 $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ 的生成系.

(2) $\mathbf{S}(\mathcal{E})\subseteq\mathbf{S}(\mathcal{F})$ 的依据是 $\mathcal{E}\subseteq\mathbf{S}(\mathcal{F})$. 特别地, $\mathbf{S}(\mathbf{R}(\mathcal{A}))=\mathbf{S}(\mathcal{A})$.

(3) $\mathcal{S}$ 是单调环 — 既是单调类又是环 — 当且仅当它是 σ- 环. 此时 $\mathcal{S}$ 对集列的并运算与交运算封闭, 也对上限集与下限集封闭.

(4) 命 $\mathbf{H}(\mathcal{A})=\{E|\exists\{E_n|n\in\mathbb{Z}_+\}\subseteq\mathcal{A}:E\subseteq\bigcup_n E_n\}$, 它是包含 $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ 的 σ- 环且具有遗传性 — 如果 $E\subseteq F\in\mathbf{H}(\mathcal{A})$, 则 $E\in\mathbf{H}(\mathcal{A})$.

集类运算中一个有力方法是基于以下定理的单调类技巧.

定理 3(单调类定理) 包含环 $\mathcal{R}$ 的单调类 $\mathcal{M}$ 必包含 $\mathcal{R}$ 生成的 σ- 环 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$. 特别地, 环 $\mathcal{R}$ 生成的单调类 $\mathbf{M}(\mathcal{R})$ 与 σ- 环 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 相等.

单调类技巧是测度论中常用方法 — 通常对 σ- 有限测度有效. 单调类技巧也可视为一种数学归纳法, 它与真正的数学归纳法可作如下对比:

(1) 用数学归纳法证明一列命题 $P(n)$ 对所有自然数 n 成立的步聚: 证 $P(n)$ 在 $n=0$ 时为真; 设 $n=k$ 或 $n\leqslant k$ 时 $P(n)$ 为真, 证明 $P(k+1)$ 为真. 最后声明 $P(n)$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立.

(2) 设 $\mathcal{R}$ 是环, 用单调类技巧证明一簇命题 $P(E)$ 对所有 $E\in\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 成立的步聚: 先证 $P(E)$ 在 $E\in\mathcal{R}$ 时为真; 设 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 中单调集列 (E_n) 恒使 $P(E_n)$ 为真, 证明 (E_n) 的极限 E 使 $P(E)$ 为真 — 有时需要分递增或递减两种情形进行讨论. 最后声明 $P(E)$ 对所有 $E\in\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 为真.

外测度 环 $\mathcal{R}$ 上的非负集函数 ν 称为外测度是指 ν 在空集上取值为 0 且满足单调性与可列次可加性. 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上测度. 对任何 $E\in\mathbf{H}(\mathcal{R})$, 作其外测度

$$\mu^*(E)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)|\{E_i|i\geqslant 1\}\subseteq\mathcal{R}:E\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}.$$

(1) 外测度 μ^* 在空集上为零: $\mu^*(\varnothing)=0$.

(2) 外测度 μ^* 具有非负性: $0\leqslant\mu^*(E)\leqslant+\infty$.

(3) 外测度 μ^* 具有单调性: $E\subseteq F$ 蕴含 $\mu^*(E)\leqslant\mu^*(F)$.

(4) 外测度 μ^* 具有可列次可加性：设 $\mathbf{H}(\mathcal{R})$ 中序列 (E_n) 覆盖 E, 则

$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \cdots .$$

(5) 外测度 μ^* 是测度 μ 的集函数延拓： $E \in \mathcal{R}$ 蕴含 $\mu(E) = \mu^*(E)$.

(6) 对于 $E \in \mathbf{H}(\mathcal{R})$, $\mu^*(E) = \min\{\mu^*(F) | E \subseteq F \in \mathbf{S}(\mathcal{R})\}$.

(7) 如果 $\mathcal{R}$ 由半环 $\mathcal{A}$ 生成，则

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{n\geqslant 1} \mu(E_n) | \{E_n\} \subseteq \mathcal{A} : E \subseteq \bigsqcup_{n\geqslant 1} E_n\}.$$

例 4 以 $\mathcal{F}$ 记自然数集 $\mathbb{N}$ 的有限子集环，则 $\mathbf{H}(\mathcal{F}) = 2^{\mathbb{N}}$, 并且 $\mathcal{F}$ 上的计数测度 μ 诱导的外测度 μ^* 仍是计数测度.

为此，任取子集 $E \subseteq \mathbb{N}$ 及 $\mathcal{F}$ 中覆盖 E 的序列 (E_n). 应用 $2^{\mathbb{N}}$ 上的计数测度 $|\cdot|_0$ 的可列次可加性得 $|E|_0 \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |E_n|_0$. 因此 $|E|_0 \leqslant \mu^*(E)$. 反向不等式源自 $\{n\} : n \in E$ 是 $\mathcal{F}$ 中覆盖 E 的至多可列个成员.

例 5 命 $\mathcal{R} = \{\varnothing, \{0,1\}\}$, 则 $\mathbf{H}(\mathcal{R}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. 取环 $\mathcal{R}$ 上的计数测度 μ, 则 $\mu^*\{0\} = \mu^*\{0,1\} = \mu^*\{1\} = 2$. 因此 μ^* 不是测度.

因此外测度不一定是测度. 即使它是测度，也不一定是最大测度延拓.

例 6 取实直线 $\mathbb{R}$ 的有限子集全体 $\mathcal{F}$ 及其上计数测度 μ. 显然 $\mathbf{H}(\mathcal{F})$ 就是 $\mathbb{R}$ 的至多可列子集全体而 μ^* 仍是计数测度. 然而 $\mathbb{R}$ 的子集全体 $2^{\mathbb{R}}$ 上的计数测度仍是 μ 的测度延拓. 它明显地也是 μ^* 的测度延拓.

定理 4 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上测度而 $E \in \mathbf{H}(\mathcal{R})$. 如果 E 能分割测量 $\mathcal{R}$ 中所有成员，则 E 满足 Carathéodory 条件 — 对任何 $F \in \mathbf{H}(\mathcal{R})$,

$$\mu^*(F) = \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus E).$$

定理 5 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度. 全体 μ^*- 可测集组成一个包含 $\mathcal{R}$ 与一切 μ^*- 零集的 σ- 环 $\mathcal{R}^*$, 而 μ^* 限制在 $\mathcal{R}^*$ 上后是 μ 的一个完全测度延拓.

定理 6 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上 σ- 有限测度而 E 是 μ^*- 可测集，则 $\mathcal{R}$ 中有个测度有限的递增序列 (H_n) 覆盖 E(因而 μ^* 在 $\mathcal{R}^*$ 与 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 上都 σ- 有限). 进而,

(1) 有 $D, F \in \mathbf{S}(\mathcal{R})$ 使 $D \subseteq E \subseteq F$ 且 $\mu^*(F \setminus D) = 0$.

(2) $\mu^*(E) < +\infty$ 且 $\varepsilon > 0$ 时，有 $F \in \mathcal{R}$ 使 $\mu^*(E \Delta F) < \varepsilon$.

定理 7 环 $\mathcal{R}$ 上的 σ- 有限测度在 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 上有唯一测度延拓.

习题

练习 1 证明环 $\mathcal{R}$ 中有限个非空成员 $E_1, \cdots, E_n$ 可被 $\mathcal{R}$ 中至多 $2^n - 1$ 个相互不交的成员初等分解.

练习 2 以下区间中哪些是开闭集 — 一个开集与一个闭集的交集?

(1) $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$.

(2) $(-\infty, 0]$, $(0, 1]$.

(3) $(1, +\infty)$, $[0, 1]$.

(4) $[1, +\infty)$, $[0, 1)$.

练习 3 证明 $\mathbb{R}^n$ 的开闭集 (一个开集与一个闭集之交) 全体 $\mathcal{A}$ 是半环. 它生成的环与开集全体 $\mathcal{O}_n$ 和闭集全体 $\mathcal{F}_n$ 生成的环都相等.

练习 4 集类 $\mathcal{E}$ 在集合 A 上的 迹$\mathcal{E} \cap A = \{E \cap A | E \in \mathcal{E}\}$. 证明:

(1) $\mathcal{E}$ 是 (σ-) 环时, $\mathcal{E} \cap A$ 也是 (σ-) 环.

(2) $\mathbf{R}(\mathcal{E} \cap A) = \mathbf{R}(\mathcal{E}) \cap A$.

(3) $\mathbf{S}(\mathcal{E} \cap A) = \mathbf{S}(\mathcal{E}) \cap A$.

练习 5 (1) 设 X 是无限集, 证明 $\mathcal{A}$ 是 X 上的代数但非 σ- 代数, 其中

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X | E\text{或}E^{\mathrm{c}}\text{是有限集}\}.$$

(2) 设 X 不可数, 证明 $\mathcal{B}$ 是 σ- 代数 (称为可数 - 余可数代数), 其中

$$\mathcal{B} = \{E \subseteq X | E\text{或}E^{\mathrm{c}}\text{是可数集}\}.$$

练习 6 设 a 和 b 是集合 X 的一对元素. 证明: 同时包含 a 和 b 或同时不包含它们的 X 中子集 E 全体 $\mathcal{A}$ 是 σ- 代数.

练习 7 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上测度使 $\mu(E) < +\infty$, 则 F 是可数集, 其中

$$F = \{x \in E | \{x\} \in \mathcal{R}, \mu\{x\} > 0\}.$$

练习 8 设 (a_n) 是正数列使每个 $a_n = \sum\limits_{i>n} a_i$. 作 $2^{\mathbb{Z}_+}$ 上测度 $\mu(E) = \sum\limits_{i \in E} a_i$. 证明 μ 的值域 $\{\mu(E) | E \subseteq \mathbb{Z}_+\}$ 是个区间.

练习 9 设 $(\mu_i)_{i \in J}$ 是环 $\mathcal{R}$ 上一簇测度, 证明 σ 是测度, 其中

$$\sigma(E) = \sum_{i \in J} \mu_i(E); \mu(E) = \sup_{i \in J} \mu(E_i).$$

当 J 是定向集使 $i \leqslant j$ 蕴含 $\mu_i \leqslant \mu_j$ 时, 证明如上的 μ 也是测度.

练习 10 环 $\mathcal{R}$ 上取值恒为 $+\infty$ 的集函数 $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ 满足非负性与可列次可加性. 它是测度吗？

练习 11 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上的测度. 证明：μ- 零集全体 $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{R} | \mu(E) = 0\}$ 和 μ- 有限集全体 $\mathcal{B} = \{E \in \mathcal{R} | \mu(E) < +\infty\}$ 都是环.

练习 12 任何环 $\mathcal{R}$ 上集函数 $\delta_x : E \mapsto \chi_E(x)$ 是测度 — 这称为 Dirac 测度. 再命 $\delta_A(E) = \sum\limits_{x \in A} \delta_x(E)$. 证明 δ_A 也是测度.

练习 13 在 2^{N} 上定义集函数 μ, 它在有限集上取零；在无限集上取无穷大值. 说明 μ 具有有限可加性, 但无可列可加性.

练习 14 设 $\mu_1, \cdots, \mu_k$ 都是环 $\mathcal{R}$ 上 σ- 有限测度. 命 $\mu = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i$, 得 $\mathcal{R}$ 上测度 μ. 证明 μ 是 σ- 有限的.

练习 15 设 μ 是 σ- 环 $\mathcal{S}$ 上的测度. 证明 μ 零集全体 $\mathcal{S}_0$ 和测度是 σ- 有限的集全体 $\mathcal{S}_\sigma$ 都是 σ- 环.

练习 16 环 $\mathcal{R}$ 上 σ- 有限测度 μ 与 ν 在 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 上的测度延拓记为 $\tilde{\mu}$ 与 $\tilde{\nu}$.

(1) 证明 $\mu + \nu$ 在 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 上有唯一测度延拓 $\tilde{\mu} + \tilde{\nu}$.

(2) 当 $\mu \leqslant \nu$ 时, 证明 $\tilde{\mu} \leqslant \tilde{\nu}$.

练习 17 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 的上测度. 以下点集皆来自 $\mathbf{H}(\mathcal{R})$. 证明：

(1) $\mathbf{H}(\mathcal{R})$ 上有个等价关系：　$E \sim F$ 表示 $\mu^*(E \Delta F) = 0$.

(2) 对于 μ^*- 可测集 E 成立 $\mu^*(E \cup F) + \mu^*(E \cap F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$.

(3) 如果 (E_n) 是相互不交的 μ^*- 可测集列, 其并记为 E, 则

$$\mu^*(F \cap E) = \mu^*(F \cap E_1) + \mu^*(F \cap E_2) + \cdots.$$

(4) 设 $E \subseteq F$ 并且 $\mu^*(E) = \mu^*(F) < +\infty$. 如果 E 是 μ^*- 可测集, 则 F 也是 μ^*- 可测集.

(5) 设 E 是某个 μ^*- 可测集 F 的子集, 则 E 是 μ^*- 可测集当且仅当 E 能分割测量 F 的所有 μ^*- 可测子集.

(6) 设 E 是某个 μ^*- 可测集 F 的子集. 如果 $\mu^*(F) < +\infty$, 则 E 是 μ^*- 可测集当且仅当 $\mu^*(F) = \mu^*(E) + \mu^*(F \setminus E)$.

(7) 设 $E \cup F$ 是 μ^*- 可测集. 如果 $\mu^*(E) + \mu^*(F) = \mu^*(E \cup F) < +\infty$, 则 E 和 F 都是 μ^*- 可测集.

(8) 设 μ^*- 可测集列 (A_n) 与 μ^*- 可测集列 (B_n) 使 $A_n \subseteq E \subseteq B_n$ 且 $\lim \mu^*(B_n \setminus A_n)$=0, 则 E 是 μ^*- 可测集.

(9) 设 E_1 和 E_2 是不交的 μ^* 的可测集而 $A_i \subseteq E_i$, 则

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

(10) $\mu^*(E \cup F) + \mu^*(E \cap F) \leqslant \mu^*(E) + \mu^*(F)$.

(11) 如果 (E_n) 递增至 E, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(E_n) = \mu^*(E)$.

(12) 满足以下条件的双射 $T: X \to X$ 将 μ^*- 可测集映射为 μ^*- 可测集: $T(E) \in \mathbf{H}(\mathcal{R}) \Leftrightarrow E \in \mathbf{H}(\mathcal{R}); \mu^*(T(E)) = \mu^*(E)$.

(13) 若 $\delta > 0$ 时有 μ^*- 可测集 G 使 $\mu^*(E\Delta G) < \delta$, 则 E 是 μ^*- 可测集.

练习 18 集合 X 由这样的数列 $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ 组成: 每个分量 x_n 形如 $\dfrac{j}{n^2}: j = 0, 1, \cdots, n^2$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n} < +\infty$. 在 X 上规定等价关系 $\sim_n$ 使 $y \sim_n x$ 表示 $y_1 = x_1, \cdots, x_n = y_n$. 对应的等价类 $[x]_n$ 称为 n 级集, 由 $\{[x]_n | x \in X\}$ 生成的环记为 $\mathcal{R}_n$, 定义其上测度 μ_n 使

$$\mu_n([x]_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+i^2}.$$

证明: (1) $(\mathcal{R}_n)_{n=1}^{\infty}$ 是递增环列, 它们并为一个环 $\mathcal{R}$.

(2) $\mu_n: n \geqslant 1$ 可粘成 $\mathcal{R}$ 上一个具有有限可加性的集函数 μ.

(3) μ 不具有可列加可性.

练习 19 设 λ 是基本空间 X 上的 σ- 环 $\mathcal{S}$ 上外测度, 命

$$\mathcal{S}^{\#} = \{E \subseteq X | \lambda(F) = \lambda(F \cap E) + \lambda(F \cap E^c) : F \in \mathcal{S}\},$$

则 $\mathcal{S}^{\#}$ 是 σ- 代数 (请注意 $\mathcal{S}^{\#}$ 中成员可不在 $\mathcal{S}$ 中).

练习 20 设 $\mathcal{R}$ 是环, 证明 $\tilde{\mathcal{R}}$ 是包含 $\mathcal{R}$ 的一个代数, 其中

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{E | E \subseteq X \forall F \in \mathcal{R} : E \cap F \in \mathcal{R}\}.$$

证明: (1) 环 $\mathcal{R}$ 上任何测度 μ 在代数 $\tilde{\mathcal{R}}$ 上有个测度延拓 $\tilde{\mu}$ 使

$$\tilde{\mu}(E) = \sup\{\mu(E \cap F) | F \in \mathcal{R}\}.$$

(2) $E \in \mathbf{H}(\mathcal{R})$ 时, $(\tilde{\mu})^*(E) = \mu^*(E)$.

(3) $E \in \widetilde{\mathcal{R}^*}$ 当且仅当 $F \in \mathcal{R}$ 时, $\mu(F) = \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap E^c)$.

练习 21 不用单调类定理证明本节定理 7.

练习 22 设集类 $\mathcal{S}$ 的基本空间是 X, 记 $\mathcal{A}=\{E,E^c|E\in\mathcal{S}\}$. 当 $\mathcal{S}$ 是环时, 证明 $\mathcal{A}$ 是代数. 当 $\mathcal{S}$ 是 σ- 环时, 证明 $\mathcal{A}$ 是 σ- 代数.

练习 23(推广的 Borel-Cantelli 引理) 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上测度而 (E_n) 是 $\mathbf{H}(\mathcal{R})$ 中序列使有 k 满足 $\sum\limits_{n\geqslant k}\mu^*(E_n)<+\infty$, 则 $\mu^*(\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n)=0$.

练习 24 设集类 $\{A_i|i\in J\}$ 的基本空间是 A, 作集类

$$\mathcal{P}=\{\bigcap_{i\in J}E_i|E_i=A_i\text{或}E_i=A\setminus A_i\}.$$

说明 $\mathcal{P}$ 中成员相互不交且恒有 $A_i=\bigsqcup\{H\in\mathcal{P}|H\subseteq A_i\}$.

练习 25 设 $E_1,\cdots,E_n$ 是半环 $\mathcal{P}$ 中有限个成员, 则 $\mathcal{P}$ 中有相互不交的成员 $F_1,\cdots,F_l$ 使每个 E_i 有初等分解 $\{F_j|F_j\subseteq E_i\}$.

练习 26 设 $\mathcal{P}$ 是半环而 $\nu:\mathcal{P}\to\overline{\mathbb{R}}$ 满足以下条件:

(1) 空集是 ν 的零集: $\nu(\varnothing)=0$,

(2) 非负性: $0\leqslant\nu(E)\leqslant+\infty$,

(3) 有限可加性: E 有初等分解 $\{E_i\}$ 时, $\nu(E)=\sum\limits_{i=1}^{n}\nu(E_i)$,

称 ν 是容度. 它在环 $\mathbf{R}(\mathcal{P})$ 上有唯一容度延拓.

练习 27 设 $\mathcal{P}$ 是半环. 称 $\nu:\mathcal{P}\to\overline{\mathbb{R}}$ 为测度是指

(1) 空集是 ν 的零集: $\nu(\varnothing)=0$,

(2) 非负性: $0\leqslant\nu(E)\leqslant+\infty$,

(3) 可列可加性: E 有可测划分 $\{E_i\}$ 时, $\nu(E)=\sum\limits_{i}\nu(E_i)$.

此时 ν 在环 $\mathbf{R}(\mathcal{P})$ 上有唯一测度延拓.

练习 28 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上 σ- 有限可测. 将 $\mathcal{R}$ 中序列 (F_n) 之并的全体记为 $\mathcal{A}$. 证明: (1) $\mathcal{A}$ 对有限交运算和可列并运算封闭.

(2) $\mathcal{A}$ 中每个成员 F 是 $\mathcal{R}$ 中某个序列 (F_n) 的无交并. 此时记 $\mu(F)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)$, 它与 (F_n) 的取法无关.

(3) $E\in\mathcal{R}^*$ 当且仅当对任何 $\delta>0$ 存在 $F\in\mathcal{A}$ 使 $\mu^*(E\Delta F)<\delta$.

练习 29 设集类 $\mathcal{E}$ 的基本空间为 X. 将 X 上包含集类 $\mathcal{E}$ 的所有代数之交 $\alpha(\mathcal{E})$ 为 $\mathcal{E}$ 生成的代数, 它是包含 $\mathcal{E}$ 的最小代数. 将 X 上包含集类 $\mathcal{E}$ 的所有 σ- 代数之交 $\sigma(\mathcal{E})$ 称为 $\mathcal{E}$ 生成的 σ- 代数, 它是包含 $\mathcal{E}$ 的最小 σ- 代数.

证明 $\alpha(\mathcal{E})=\{E,X\setminus E|E\in\mathbf{R}(\mathcal{E})\}$ 且 $\sigma(\mathcal{E})=\{E,X\setminus E|E\in\mathbf{S}(\mathcal{E})\}$.

练习 30 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上 σ- 有限测度. 使 $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{M}\subseteq\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 的集类 $\mathcal{M}$ 对递增和首项测度有限的递减序列的极限都封闭时, 证明 $\mathcal{M}=\mathbf{S}(\mathcal{R})$.

练习 31 说明练习 30 与单调类定理互为推论.

§2.2 Lebesgue 测度

设 $a,b\in\mathbb{R}^n$ 使诸分量 $a_i\leqslant b_i$. 定义 n 维区间如下:

$$\begin{aligned}(a,b]&=\{x|a_1<x_1\leqslant b_1,\cdots,a_n<x_n\leqslant b_n\}\\&=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_n,b_n],\\(a,b)&=\{x|a_1<x_1<b_1,\cdots,a_n<x_n<b_n\}\\&=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n),\\[a,b)&=\{x|a_1\leqslant x_1<b_1,\cdots,a_n\leqslant x_n<b_n\}\\&=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n),\\[a,b]&=\{x|a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\cdots,a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\}\\&=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n].\end{aligned}$$

区间 $(a,b]$ 全体 $\mathcal{P}_n=\mathcal{P}_1*\cdots*\mathcal{P}_1$ 是半环, 它生成的环 $\mathcal{R}_n$ 中成员都可由 $\mathcal{P}_n$ 初等分解. 区间 (a,b) 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 而区间 $[a,b]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集.

定理 1 环 $\mathcal{R}_n$ 上有唯一有限测度 $\mathbf{m}$ 使任何 n 维区间 $(a,b]$ 的测度就是它的 n 维体积 — 各边长度之积 $(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n)$. 而 $\mathbf{m}$ 诱导的外测度是

$$\mathbf{m}^*(E)=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{m}(E_i):E_i\in\mathcal{P}_n,E\subseteq\bigsqcup_{i=1}^{\infty}E_i\}.$$

将以上定理中有限测度 $\mathbf{m}$ 按 Carathéodory 条件进行延拓, 得到 $\mathcal{R}_n^*$ 和 $\mathbf{m}^*$. 将 $\mathcal{R}_n^*$ 改记为 $\mathcal{L}_n$, 其成员称为 n 维 Lebesgue 可测集. 将 $\mathbf{m}^*$ 改记为 $\mathbf{m}$ 或 $|\cdot|_n$, 这称为 n 维 Lebesgue 测度, 它是全 σ- 有限的完全测度. 一维、二维与三维 Lebesgue 测度分别是长度、面积与体积的推广.

Euclid 空间的 Borel 集 将 σ- 环 $\mathbf{S}(\mathcal{R}_n)$ 记为 $\mathcal{B}_n$, 其成员称为 $\mathbb{R}^n$ 的 Borel 集. 另外 $\mathcal{B}_n$ 还有 5 个生成系: 区间 $[a,b]$ 全体, 区间 $[a,b)$ 全体, 区间 (a,b) 全体, 开集全体和紧集全体.

(1) n- 维区间都是 Borel 集且其 Lebesgue 测度是其各边长度之积. 如

$$\begin{aligned}\mathbf{m}(a,b)&=\lim_{k\to\infty}\mathbf{m}(a,b-e/k]=(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n),\\\mathbf{m}[a,b]&=\lim_{k\to\infty}\mathbf{m}(a-e/k,b]=(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n).\end{aligned}$$

(2) $\mathbb{R}^n$ 的 Borel 集都是 Lebesgue 可测集.

(3) Euclid 空间是 Borel 集且其测度为无穷大. 于是闭集与紧集都是 Borel 集. 同样无理数集是 Borel 集且其 Lebesgue 测度是无穷大.

(4) 实直线上所有区间是 Borel 集且其 Lebesgue 测度为其长度. 如

$$\mathbf{m}(0,+\infty)=\lim_{k\to\infty}\mathbf{m}(0,k]=+\infty.$$

(5) 因为 $\{x\}=[x,x]$, 单点集 $\{x\}$ 是 Borel 集且其 Lebesgue 测度为零. 至多可列集 (如 $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$) 是 Borel 集且其 Lebesgue 测度为零.

(6) 实直线上开集的 Lebesgue 测度是其构成区间的长度总和.

特请注意, $\mathbb{R}^n$ 的非空开集 V 的 Lebesgue 测度总是正的.

例 1 在构造 Cantor 集 K 时, 第 n 步移去了 2^{n-1} 个长度都是 3^{-n} 的开区间, 移去的开集 O 的 Lebesgue 测度 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{3^n}=1$, K 的 Lebesgue 测度是

$$\mathbf{m}(K)=\mathbf{m}([0,1])-\mathbf{m}(O)=0.$$

定理 2 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 则成立 外正则性:

$$\mathbf{m}^*(E)=\inf\{\mathbf{m}(U)|开集U\supseteq E\}.$$

进而以下条件相互等价:

(1) E 是 Lebesgue 可测集. 此时, 成立 内正则性:

$$\mathbf{m}(E)=\sup\{\mathbf{m}(K)|紧集K\subseteq E\}.$$

(2) 对任何 $\varepsilon>0$, 有开集 U 使 $E\subseteq U$ 且 $\mathbf{m}^*(U\setminus E)<\varepsilon$.

(3) 有包含 E 的 G_δ- 型集 U_0 使 $\mathbf{m}^*(U_0\setminus E)=0$.

(4) 对任何 $\varepsilon>0$, 有闭集 F 使 $F\subseteq E$ 且 $\mathbf{m}^*(E\setminus F)<\varepsilon$.

(5) 有含于 E 中的 F_σ- 型集 F_0 使 $\mathbf{m}^*(E\setminus F_0)=0$.

(6) 有 Borel 集 D 与 F 使 $D\subseteq E\subseteq F$ 且 $\mathbf{m}(F\setminus D)=0$.

此时若 $\mathbf{m}(E)$ 有限, 则 $\varepsilon>0$ 时有 $F\in\mathcal{R}_n$ 使 $\mathbf{m}(E\Delta F)<\varepsilon$.

下面讨论函数与 Borel 集的关系.

Borel 函数 设 X 和 Y 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的 Borel 集. 映射 $f:X\to Y$ 称为 Borel 函数是指 Y 中 Borel 集 F 的原像 $f^{-1}(F)$ 总是 Borel 集.

(1) 可逆映射 f 为 Borel 同构是指 f 与 f^{-1} 都是 Borel 函数. 换言之, E 是 Borel 集当且仅当 $f(E)$ 是 Borel 集.

(2) 当 f 连续时, 它是 Borel 函数. 若 f 还有连续反函数, 则它是 Borel 同构.

(3) 设 X 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集而 $f:X\to\mathbb{R}$ 是单调函数. 则 f 是 Borel 函数. 如果 E 是 X 的 Borel 集, 则 $f(E)$ 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集.

(4) 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的可数集，则任何函数 $f: X \to Y$ 是 Borel 函数.

如 $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数，它是 Borel 函数. 限制 $\sin: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ 有连续反函数，因此这个限制是 Borel 同构. 同样 $\exp: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是 Borel 同构.

熟练运用连续函数与 Borel 集的关系将有助于解决一些看似困难的问题，以下性质的证明就依赖于连续函数 (如平移和线性变换等).

性质 3 (1) 平移不变性：$\mathbf{m}^*(x+E) = \mathbf{m}^*(E)$. 如果 E 是 Lebesgue 可测集或 Borel 集，则 $x+E$ 是 Lebesgue 可测集或 Borel 集.

(2) Lebesgue 测度非零的集必包含一个非 Lebesgue 可测集.

(3) 设 E 与 F 分别是 k 维与 l 维 Lebesgue 可测 (Borel) 集. 命 $n = k+l$，则 $E \times F$ 是 n 维 Lebesgue 可测 (Borel) 集并且 $|E \times F|_n = |E|_k |F|_l$.

(4) 设 τ 是 $\mathbb{R}^n$ 上可逆实线性变换，则 $\mathbf{m}^*(\tau E) = |\det \tau| \mathbf{m}^*(E)$. 如果 E 是 Borel 集或 Lebesgue 可测集，则其像集 τE 也是.

(5) 设 τ 是 $\mathbb{C}^n$ 上可逆复线性变换，则 $\mathbf{m}^*(\tau E) = |\det \tau|^2 \mathbf{m}^*(E)$. 如果 E 是 Borel 或 Lebesgue 可测集，则其像集 τE 也是.

这里 $\det \tau$ 是线性变换 τ 表示为方阵时的行列式，(4) 和 (5) 体现了实线性变换和复线性变换对测度在形式上的不同影响，但在本质上 (5) 是 (4) 的推论.

例 2 求平面点集 $E := \{(x,y) | x - y \in \mathbb{Q}\}$ 的 Lebesgue 测度. 为此作可逆线性变换 $\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 使 $\tau(x,y) = (x-y, x+y)$，则 $E = \tau^{-1}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$. 因此

$$\mathbf{m}(E) = |\det \tau^{-1}| \mathbf{m}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) = 0.$$

称 $\mathbb{R}^n$ 的子集 X 为 k 维线性流形是指有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和一个 k 维线性子空间 L 使 $X = x + L$，这是一个线性子空间的平移. 平面上的直线是 1 维的线性流形，而 3 维空间中的平面是 2 维的线性流形.

例 3 当 $k < n$ 时，$\mathbb{R}^n$ 中的 k 维线性流形 X 是 Borel 集且是 n 维 Lebesgue 零集. 为此，取 $\mathbb{R}^n$ 上可逆线性变换 τ 使 $L = \tau(\mathbb{R}^k \times \{0\})$. 于是

$$|X|_n = |\det \tau| |\mathbb{R}^k|_k \times 0 = 0.$$

例 4 由 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个线性无关的向量 $b_1, \cdots, b_n$ 张成的平行 $2n$ 面体

$$E = \{t_1 b_1 + \cdots + t_n b_n | 0 \leqslant t_1, \cdots, t_n \leqslant 1\}$$

是紧集且其 Lebesgue 测度是 $|\det[b_1, \cdots, b_n]|$. 为此命 τ 是方阵 $[b_1, \cdots, b_n]$，则结论源自等式 $E = \tau([0,1]^n)$.

习题

练习 1 设 $0 < r < 1$ 及 $s = r/(1+2r)$. 移去位于 $I = [0,1]$ 中间位置的长度是 $s\mathbf{m}(I)$ 的开区间，剩下两个闭区间 I_1 和 I_2. 移去分别位于 I_1 和 I_2 中间位置的两个长度是 $s^2\mathbf{m}(I)$ 的开区间，剩下 4 个闭区间. 这个过程进行下去，剩下一个 Cantor 型集 E_r. 试求 E_r 的 Lebesgue 测度并证明 E_r 不包含长度非零的区间.

练习 2 设集 S 由 [0,1) 中这样的点 x 组成：在 x 的十进位小数 $0.p_1p_2\cdots$ 表示中，数字 2(如果存在) 的第一次出现比数字 3(如果存在) 的第一次出现早. 判断 S 是否是 Borel 集. 如果是，求出它的 Lebesgue 测度.

练习 3 设 $0 < c < 1$. 构造 Cantor 型集 K_c 如下：移去位于 [0,1] 中间位置的长度是 c 的开区间，剩下两个闭区间 I_1 和 I_2. 移去分别位于 I_1 和 I_2 中间位置的两个长度是 $c\mathbf{m}(I_i)$ 的开区间，各剩下两个闭区间. 这个过程进行下去，剩下集 K_c. 试求 K_c 的 Lebesgue 测度.

练习 4 移去单位正方形中间面积为 1/9 的开正方形，剩下 8 个等大正方形. 移去这 8 个正方形中间面积为 $(1/9)^2$ 的开正方形，剩下 64 个等大正方形. 如此下去，剩下的集 E 称为 Sierpinski 地毯. 求其面积并用三进位小数表示其中点的坐标分量.

练习 5 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 使 $\mathbf{m}^*(E) < +\infty$. 命 $f(x) = \mathbf{m}^*(E \cap (-\infty, x])$, 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续吗？

练习 6 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的 Lebesgue 可测 [或 Borel] 集. 证明 $\{\mu(F)|F\}$ 是一个区间，其中 F 取遍 E 的 Lebesgue 可测 [或 Borel] 集.

练习 7 是否有真含于 $[-1,1]$ 的闭集 F 使 $\mathbf{m}(F) = 2$?

练习 8 求 [0,1] 中 Lebesgue 测度为 1 的集列 $\{E_n\}$ 之交的 Lebesgue 测度.

练习 9 试作直线上一个 G_δ 型集 E 使当 $a < b$ 时，$(a,b) \cap E$ 与 $(a,b) \setminus E$ 的 Lebesgue 测度为正.

练习 10 设 $\{r_n|n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是直线中的有理数全体，作开集

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}).$$

证明对于直线的任何闭集 F, 对称差 $U\Delta F$ 的 Lebesgue 测度为正.

练习 11 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集, 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\mathbf{m}(E\cap(x+E))=\mathbf{m}(E)$.

练习 12 设 $\mathbf{m}(E)<+\infty$, 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\mathbf{m}((E+x)\Delta E)=0$.

练习 13 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集且 $\mathbf{m}(E)>0$, 证明:

(1) 存在 $x\in E$ 使 $r>0$ 时, $\mathbf{m}(E\cap O(x,r))>0$.

(2) 存在 $r>0$ 使 $O(0,r)\subseteq E-E=\{x-y|x,y\in E\}$.

(3) 存在 $x,y\in E$ 使 $x-y$ 有的坐标分量都为无理数.

(4) 存在 $x,y\in E$ 使 $x-y$ 有的坐标分量都为有理数.

练习 14 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 零集, 证明 $\mathbb{R}^n\setminus E$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密 — 对任何 $x\in\mathbb{R}^n$ 和任何 $r>0$, 存在 $z\in\mathbb{R}^n\setminus E$ 使 $|z-x|<r$.

练习 15 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集使对任何区间 $(a,b]$ 成立 $\mathbf{m}^*(E\cap(a,b])\leqslant\mathbf{m}(b-a]/2$, 试求 E 的 Lebesgue 测度.

练习 16 设 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的点集 E 和 F 能被两个不交开集 U 与 V 分离: $E\subseteq U$ 而 $F\subseteq V$, 证明 $\mathbf{m}^*(E\cup F)=\mathbf{m}^*(E)+\mathbf{m}^*(F)$.

练习 17 设 $\{E_i|i\leqslant n\}$ 是 [0,1] 中 Lebesgue 可测集使 $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{m}(E_i)>n-1$, 证明 $E=\bigcap\limits_{i=1}^{n}E_i$ 非 Lebesgue 零集.

练习 18 证明: 平面上位于坐标轴上的任何点集 X 的面积为零.

练习 19 证明: 设 $0\leqslant x\leqslant 1$, 使其十进位小数不含数字 7 的 x 组成一个 Borel 集 E 并求其测度 [将 0.7 这样的小数表示成 $0.6999\cdots$, 它不含 7].

练习 20 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 命

$$\overline{S}^c=\{x\in\mathbb{R}^n|\forall r>0:\mathbf{m}^*(O(x,r)\cap S)>0\}.$$

证明: 它是闭集且 $\mathbf{m}^*(S\setminus\overline{S}^c)=0$, 进而 $\overline{S_1\cup S_2}^e=\overline{S_1}^e\cup\overline{S_2}^e$.

练习 21 试作 $\mathbb{R}^n$ 的一个闭集 E 使 E 中的点都非有理点且 $\mathbf{m}(E)>0$.

练习 22 设 F 是 $[0,1]^n$ 的有限子集, 其计数为 k. 设 E 是 $[0,1]^n$ 的 Lebesgue 可测集使 $k\mathbf{m}(E)>2^n$. 证明: E 中有两点 x 和 y 且 F 中有两点 a 和 b 使

$$x-y=a-b\neq 0.$$

练习 23 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中 Lebesgue 可测集. 设 $a\in\mathbb{R}$ 而 $c>0$ 使当 $|x|<c$ 时, $a+x$ 和 $a-x$ 中有一点在 E 中. 证明 $\mathbf{m}(E)\geqslant c$.

练习 24(Vitali 覆盖定理) 设实直线上某些闭区间簇 $\mathcal{J}$ 是 Lebesgue 外测度有限集 E 的 Vitali 覆盖 — 对任何 $\delta>0$, 有

$$E\subseteq\bigcup\{I\in\mathcal{J}:|I|_1<\delta\},$$

则 $\mathcal{J}$ 中有有限个相互不交的成员 $I_1,\cdots,I_n$ 使

$$|E\setminus(I_1\sqcup\cdots\sqcup I_n)|_1^*<\delta.$$

练习 25(Sierpinski 覆盖定理) 设集类 $\mathcal{J}$ 中成员都为实直线上的长度非零的区间, 这些区间的左端点集包含有界集 S, 则对 $\delta>0$, 可取 $\mathcal{J}$ 中有限个相互不交的成员 $E_1,\cdots,E_n$ 使

$$|S\setminus(E_1\sqcup\cdots\sqcup E_n)|_1^*<\delta.$$

练习 26 当 E 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集时, 命 $\mu(E)$ 为 $E\cap\mathbb{Q}$ 的计数测度 $|E\cap\mathbb{Q}|_0$.

(1) 证明: $\mu:\mathcal{B}_1\to\overline{\mathbb{R}}$ 是全 σ- 有限测度.

(2) 找个 Borel 集 E 使 V 取遍包含 E 的开集时, $\mu(E)<\inf\mu(V)$.

练习 27 设实直线上有界闭区间 $[a,b]$ 有些子区间 $[a_i,b_i]:i=1,\cdots,n$ 使

$$(b_1-a_1)+\cdots+(b_n-a_n)=b-a.$$

如果 $i\neq j$ 时 $[a_i,b_i]$ 和 $[a_j,b_j]$ 相交至多一点, 则

$$[a,b]=\bigcup\{[a_i,b_i]|i\leqslant n\}.$$

练习 28 设 $a<b$ 且 $c<d$, 则 $[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]$.

练习 29 用练习 27-28 的结论证明 §1.4 练习 11 中 $K-K=[-1,1]$.

§2.3 可测映射

如果 σ- 环 $\mathcal{R}$ 的基本空间是 X, 则称 $(X,\mathcal{R})$ 为可测空间而 $\mathcal{R}$ 中成员为 X 的可测集. 可将 σ- 环视为 X 上一个可测结构, 可测结构对于可测空间的重要性就像线性结构对于线性空间的重要性.

基本空间不一定是可测集. 如 $\mathbb{R}^n$ 是可测空间 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_n)$ 的可测集但非可测空间 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{C})$ 的可测集, 其中 $\mathcal{C}$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 中全体可数子集.

可测子空间 如果 Y 是可测空间 $(Z,\mathcal{S})$ 的非空子集，则 $(Y,\mathcal{S}\cap Y)$ 也是一个可测空间. 这可视为 $(Z,\mathcal{S})$ 的一个子空间.

(1) 设 $X\subseteq Y\subseteq Z$, 则 $(\mathcal{S}\cap Y)\cap X=\mathcal{S}\cap X$. 因此 X 作为 Z 的子空间和作为 Y 的子空间有相同的可测结构.

(2) 对于 $\mathbb{R}^n$ 的子集 X, 命 $\mathcal{B}(X)=\mathcal{B}_n\cap X$, 其成员称为 X 的 Borel 集. $\mathcal{B}(X)$ 是由集类 $\{U\cap X|U$是 Euclid 空间的开集$\}$ 生成的 σ- 环. 于是 $(X,\mathcal{B}(X))$ 成为一个 (Borel) 可测空间.

设 E 与 F 分别是可测空间 $(X,\mathcal{R})$ 与 $(Y,\mathcal{S})$ 的可测集，称 $E\times F$ 是 $X\times Y$ 的可测矩形，其全体 $\mathcal{R}*\mathcal{S}$ 是半环.

乘积可测空间 设 $(X,\mathcal{R})$ 与 $(Y,\mathcal{S})$ 是可测空间. 由 $\mathcal{R}*\mathcal{S}$ 生成的环与 σ- 环分别记为 $\mathcal{R}\hat{\times}\mathcal{S}$ 与 $\mathcal{R}\times\mathcal{S}$. 环 $\mathcal{R}\hat{\times}\mathcal{S}$ 中成员 G 都有相对于可测矩形的初等分解.

(1) 有限个 σ- 环 $\mathcal{S}_1,\cdots,\mathcal{S}_n$ 的乘积 $\mathcal{S}_1\times\cdots\times\mathcal{S}_n$ 是由可测矩体全体

$$\mathcal{S}_1*\cdots*\mathcal{S}_n=\{E_1\times\cdots\times E_n|E_1\in\mathcal{S}_1,\cdots,E_n\in\mathcal{S}_n\}$$

生成的 σ 环. 将 $(X_1\times\cdots\times X_n,\mathcal{S}_1\times\cdots\times\mathcal{S}_n)$ 称为乘积可测空间.

(2) (截口保持可测性) 如果 W 是乘积可测空间 $(X\times Y,\mathcal{R}\times\mathcal{S})$ 中可测集，则其截口 W_x 与 W^y 分别是 Y 与 X 的可测集.

(3) 对于自然数 k 与 l, 命 $n=k+l$, 则 $\mathcal{B}_n=\mathcal{B}_k\times\mathcal{B}_l$. 进而

$$\mathcal{B}(X\times Y)=\mathcal{B}(X)\times\mathcal{B}(Y).$$

(4) 对于 Lebesgue 可测结构而言， $\mathcal{L}_k\times\mathcal{L}_l\subset\mathcal{L}_n$(这是真包含).

可测划分 如果可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 中至多可列个相互不交的可测集 $\{E_n\}$ 之并为可测集 E, 则称 $\{E_n\}$ 是 E 的一个可测划分. 如 $\{E\}$ 就是 E 的可测划分.

需要注意，可测划分与划分的区别：可测划分只有可数个成员且成员可为空集，划分可有任意个成员但成员不能为空集.

设 $\mathcal{D}'$ 和 $\mathcal{D}$ 是 E 的可测划分. 如果任何 $D\in\mathcal{D}$ 都有个可测划分 $\{D'\in\mathcal{D}'|D'\subseteq D\}$, 则称 $\mathcal{D}'$ 是 $\mathcal{D}$ 的细分. 记为 $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}'$ 或 $\mathcal{D}'\succeq\mathcal{D}$.

自反性： $\mathcal{D}$ 是 E 的可测划分时， $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}$.

反称性： $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}'$ 且 $\mathcal{D}'\preceq\mathcal{D}$ 时， $\mathcal{D}=\mathcal{D}'$.

传递性： $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}'$ 且 $\mathcal{D}'\preceq\mathcal{D}''$ 时， $\mathcal{D}\preceq\mathcal{D}''$.

定向性： $\mathcal{D}_1$ 与 $\mathcal{D}_2$ 有个细分 $\mathcal{D}_1\vee\mathcal{D}_2$. 当 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 不含空集时，

$$\mathcal{D}_1\vee\mathcal{D}_2=\{D_1\cap D_2|D_1\in\mathcal{D}_1,D_2\in\mathcal{D}_2\}\setminus\{\varnothing\};$$

当 $\mathcal{D}_1$ 或 $\mathcal{D}_2$ 以空集为成员时，

$$\mathcal{D}_1\vee\mathcal{D}_2=\{D_1\cap D_2|D_1\in\mathcal{D}_1,D_2\in\mathcal{D}_2\}.$$

在 Borel 空间 $(\mathbb{R},\mathcal{B}_1)$ 中，集类 $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ 是 $\{1,2,3\}$ 的可测划分，而 $\{(n-1,n]|n\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的可测划分. 集类 $\{\{x\}|x\in\mathbb{R}\}$ 不是实直线的可测划分，因其有不可数个成员. $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ 是 $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ 与 $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$ 的细分.

可测映射 设 $(X,\mathcal{R})$ 和 $(Y,\mathcal{S})$ 是带 σ- 代数的可测空间. 使 Y 的可测集 F 原像 $f^{-1}(F)$ 是 X 的可测集的映射 $f:X\to Y$ 称为可测映射. 有时也以表达式 $f:(X,\mathcal{R})\to(Y,\mathcal{S})$ 来表示 f 是可测映射.

判断可测性有以下方法.

(1)好集原理: 在映射 $f:X\to Y$ 下, 如果任何 $F\in\mathcal{G}$ 的原像是 X 的可测集, 则任何 $F\in\mathbf{S}(\mathcal{G})$ 的原像 $f^{-1}(F)$ 也是 X 的可测集.

(2)复合保持可测性: 设 $f:(X,\mathcal{R})\to(Y,\mathcal{S})$ 与 $g:(Y,\mathcal{S})\to(Z,\mathcal{T})$(是可测映射), 则 $gf:(X,\mathcal{R})\to(Z,\mathcal{T})$(是可测映射). 务请读者注意, 这里两个映射对于 Y 要求用同一个 σ- 代数 $\mathcal{S}$.

(3)限制保持可测性: 设 $g:A\to B$ 是可测映射 $f:X\to Y$ 的限制, 则 g 是可测映射, 其中 A 和 B 分别作为 X 与 Y 的可测子空间.

(4)黏接保持可测性: 设 $X_i:i\in J$ 是可测空间 X 中可数个可测集作为可测子空间, $Y_i:i\in J$ 是可测空间 Y 中可数个子集作为可测子空间. 可数个可测映射 $f_i:X_i\to Y_i(i\in J)$ 可黏成一个映射 $f:X\to Y$ 时, f 是可测映射.

(5)乘积保持可测性: 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=(f_1(x_1),\cdots,f_n(x_n))$, 则映射

$$f:X_1\times\cdots\times X_n\to Y_1\times\cdots\times Y_n$$

可测当且仅当每个 $f_i:X_i\to Y_i$ 是可测映射. 务请读者注意, 若无特别声明, 乘积空间上的可测结构只取乘积可测结构.

(6)乘积和投影保持可测性: 设 $f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$, 则映射

$$f:X\to Y_1\times\cdots\times Y_n$$

可测当且仅当其分量 $f_i:X\to Y_i$ 都可测.

(7)截口保持可测性: 设 $W\subseteq X\times Y$ 而 $f:W\to Z$ 是可测映射, 则截口 $f(a,\cdot):W_a\to Z$ 与截口 $f(\cdot,b):W^b\to Z$ 是可测映射.

如果 f 可测且将可测集映为可测集, 则称 f 为 双可测映射. 如果 f 是可逆的双可测映射, 则称 f 为 可测同构. 如恒等映射 $\mathrm{id}:X\to X$ 是可测同构.

例 1 对换 $\gamma:X\times Y\to Y\times X,(x,y)\mapsto(y,x)$ 是双射, 它还是可测同构: 对于 $Y\times X$ 的可测矩形 $F\times E,\gamma^{-1}(F\times E)=E\times F$ 是 $X\times Y$ 的可测矩形. 据好集原理, γ 是可测映射. 类似地可说明 γ^{-1} 也可测.

例 2 常值映射 $f:X\to Y,x\mapsto y_0$ 是可测映射. 这是因为 $y_0\in F$ 时, $f^{-1}(F)=X$; 而 $y_0\notin F$ 时, $f^{-1}(F)=\varnothing$.

例 3 投影 $\tau_j : Y_1 \times \cdots \times Y_n \to Y_j, (y_i) \mapsto y_j$ 是可测映射. 以 τ_1 为例. 当 F_1 是 Y_1 的可测集时, $\tau_1^{-1}(F_1) = F_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$ 是可测集.

可测函数 设 X 是带 σ- 代数的可测空间. 如果 Y 是 Euclid 空间的 Borel 集, 并且 Y 的任何 Borel 子集 F 在映射 $f : X \to Y$ 下的原像 $f^{-1}(F)$ 是 X 的可测集, 则称 $f : X \to Y$ 是 *可测函数*.

(1) Borel 函数当然是可测函数, 而可测函数又是可测映射. 一般 Borel 函数不一定连续. 如 $(0,1]$ 的特征函数 χ 是不连续的 Borel 函数. 这是因为 $\chi^{-1}(F)$ 只有 4 种可能: $\varnothing, (0,1], \mathbb{R} \setminus (0,1], \mathbb{R}$.

(2) (X 是 Borel 集时) 子集 E 的特征函数 χ 是 (Borel) 可测函数当且仅当 E 是可测 (Borel) 集. 这源自 $\chi^{-1}(F)$ 的四种可能: $\varnothing, E, X \setminus E$ 和 X.

(3) 可测函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 的实部 $\operatorname{re} f$ 与虚部 $\operatorname{im} f$, 符号 $\operatorname{sgn} f$ 与模 $|f|$, 共轭 $\overline{f}$ 都是可测函数. 另外, 可测函数的线性组合 $af + bg$, 点态积 fg 与点态商 f/g(要求 g 无零点) 也是可测函数.

上面出现的符号: 对于复数 $z = u + \sqrt{-1}v$, 以 $\overline{z}$ 与 $|z|$ 分别表示其共轭 $u - \sqrt{-1}v$ 与模 $\sqrt{u^2 + v^2}$. 以 $\operatorname{re} z$ 与 $\operatorname{im} z$ 分别表示其实部 u 与虚部 v. 这得到几个连续函数 $\operatorname{re} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 与 $\operatorname{im} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. 对于非零复数 z, 命 $\operatorname{sgn} z = z/|z|$ 而命 $\operatorname{sgn} 0 = 0$. 这得 Borel 函数 $\operatorname{sgn} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

例 4 以 Y 代表 Euclid 空间. 可测函数 $f : X \to Y$ 的图像 $\operatorname{gr} f$ 是可测集. 为此命 $h(x, y) = (f(x), y)$, 这得可测函数 $h : X \times Y \to Y \times Y$ 使 $\operatorname{gr} f = h^{-1}(F)$, 其中 F 是 $Y \times Y$ 的对角线 $\{(y,y) | y \in Y\}$. 因为 F 是闭集 (因而是 Borel 集), 所以 $\operatorname{gr} f$ 是可测集.

为积分理论与应用, 需要讨论可取无穷大值的可测函数. 作 $\overline{\mathbb{R}}$ 上 σ- 代数

$$\overline{\mathcal{B}} = \{E, E \cup \{-\infty\}, E \cup \{+\infty\}, E \cup \{\pm\infty\} | E \in \mathcal{B}_1\},$$

其成员是广义实数系 $\overline{\mathbb{R}}$ 的 Borel 集, 如 $\{-\infty\}$ 与 $\{+\infty\}$ 都是 Borel 集.

定理 1 对于可测空间上的函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, 以下条件等价:

(1) f 是可测函数: $\overline{\mathbb{R}}$ 的 Borel 集 F 的原像 $f^{-1}(F)$ 是可测集.
(2) 对于 $b \in \mathbb{R}$, $(f \leqslant b)$[或 $(f > b)$] 是 X 的可测集.
(3) 对于 $b \in \mathbb{R}$, $(f < b)$[或 $(f \geqslant b)$] 是 X 的可测集.
(4) 子集 $\{(x,y) | f(x) < y \leqslant +\infty\}$ 是 $X \times \overline{\mathbb{R}}$ 的可测集.
(5) 子集 $\{(x,y) | f(x) < y < +\infty\}$ 是 $X \times \mathbb{R}$ 的可测集.
(6) 对于 $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $(f \leqslant b)$[或 $(f > b)$] 是 X 的可测集.
(7) 对于 $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $(f < b)$[或 $(f \geqslant b)$] 是 X 的是可测集.
(8) 子集 $\{(x,y) | -\infty \leqslant y < f(x)\}$ 是 $X \times \overline{\mathbb{R}}$ 的可测集.
(9) 子集 $\{(x,y) | -\infty < y < f(x)\}$ 是 $X \times \mathbb{R}$ 的可测集.

例 5 设 $g,h:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是可测函数, 则 曲边梯形

$$E=\{(x,y)|g(x)\leqslant y\leqslant h(x)\}$$

是 $X\times\overline{\mathbb{R}}$ 的可测集. 这是因为

$$\begin{aligned}E=&\{(x,y)|g(x)\leqslant y\leqslant +\infty\}\\ &\cap\{(x,y)|-\infty\leqslant y\leqslant h(x)\}.\end{aligned}$$

(1) 命 $h=g$, 则 $E=\operatorname{gr}g$. 因此 g 的图像 $\operatorname{gr}g$ 是 X 的可测集.

(2) 子集 $(g<h)$ 是 X 的可测集 (同样 $(h<g)$ 是可测集). 这是因为

$$(g<h)=\bigcup\{(g<r)\cap(r<h)|r\in\mathbb{Q}\}.$$

(3) 子集 $(g\leqslant h)$ 和 $(g=h)$ 都是可测集. 这是因为

$$\begin{aligned}&(g\leqslant h)=X\setminus(h<g),\\ &(g=h)=(g\leqslant h)\setminus(g<h).\end{aligned}$$

例 6 设 X 是 Euclid 空间中的至多可列集, 则 X 上任何函数 f 都是 Borel 函数. 这是因为原像 $f^{-1}(F)$ 是至多可列集, 因而是 Borel 集.

例 7 Riemann 函数 R 是 Borel 函数. 这是因为限制 $(R:\mathbb{Q}\to\mathbb{R})$ 与限制 $(R:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R})$ 都是 Borel 函数.

又 Dirichlet 函数 D 是 Borel 函数. 这是因为 $D=\chi_{\mathbb{Q}}$.

性质 2 对于可测函数列 $f,f_1,f_2,\cdots:X\to\overline{\mathbb{R}}$, 以下函数可测:

(1) 上确界函数 $\sup\limits_{n\geqslant1}f_n$, 它在 x 处取值为 $\sup\limits_{n\geqslant1}f_n(x)$.

(2) 下确界函数 $\inf\limits_{n\geqslant1}f_n$, 它在 x 处取值为 $\inf\limits_{n\geqslant1}f_n(x)$.

(3) 上极限函数 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}f_n$, 它在 x 处取值为 $\inf\limits_{n\geqslant1}\sup\limits_{m\geqslant n}f_m(x)$.

(4) 下极限函数 $\varliminf\limits_{n\to\infty}f_n$, 它在 x 处取值为 $\sup\limits_{n\geqslant1}\inf\limits_{m\geqslant n}f_m(x)$.

(5) 正部 f^+ 与负部 f^-, 其中 $f^\pm(x)=(\pm f(x))\vee0$.

(6) 模函数 $|f|$, 它在 x 的取值为 $|f(x)|$.

(7) 积 f_1f_2 、和 f_1+f_2 与商 f_1/f_2(有意义时) 是可测函数.

函数的正负部提供了分解: $f=f^+-f^-$(且 $|f|=f^++f^-$). 这是 f 的所有正负分解中最小一对: 非负函数 f_i 使 $f=f_1-f_2$ 时, $f^+\leqslant f_1$ 且 $f^-\leqslant f_2$.

例 8 将 $[0,1)$ 中的数 x 用 2- 进位标准小数写成 $0.a_1a_2\cdots$. 定义 $b_n(x)=a_n$, 则 $b_n: X\to\mathbb{R}$ 是 Borel 函数. 事实上, 当 $a=0,1$ 时

$$(b_n=a)=\bigsqcup\{[0.a_1\cdots a_{n-1}a,0.a_1\cdots a_{n-1}a+2^{-n})|\forall i<n: a_i=0,1\}.$$

这是 Borel 集. 因此 $b_n:[0,1)\to\mathbb{R}$ 是 Borel 函数.

定理 3 可测函数列 (f_n) 的点态极限 f 是可测函数.

多项式是连续函数中比较好的函数. 求多项式的值只用到四则运算, 其导函数与不定积分也是多项式. 如果将连续函数换为可测函数, 那么与多项式相对应的角色就是 *离散函数*— 取可数个值的可测函数. 如 Riemann 函数是离散 Borel 函数. 取有限个值的可测函数也称为简单函数.

定理 4 设 $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是可测函数, 则有离散函数列 $(f_n: X\to\overline{\mathbb{R}})$ 使

(1) 当 $0\leqslant f(x)<+\infty$ 时, $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f(x)$,

(2) 当 $0\geqslant f(x)>-\infty$ 时, $0\geqslant f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots\geqslant f(x)$,

(3) 当 $f(x)=\pm\infty$ 时, $f_1(x)=f_2(x)=\cdots=\pm\infty$,

(4) 在可测集 $(|f|<+\infty)$ 上, (f_n) 一致逼近 f.

如果 f 有界或在 (4) 中要求点态收敛, 则每个 f_n 可取为简单函数.

本书中, “逼近” 就是 “收敛于” 的意思, 一致逼近就是一致收敛.

定理 5 设 $f: X\to\mathbb{C}$ 是可测函数, 则有一致逼近 f 的离散函数列 (f_n) 使

$$|f_1|\leqslant|f_2|\leqslant\cdots\leqslant|f|.$$

如果 f 是有界函数或仅要求点态收敛, 则每个 f_n 可取为简单函数.

一般地, 函数 f 是简单的当且仅当它形如 $\sum\limits_{k\leqslant n}a_k\chi_{X_k}$, 其中 $\{X_k\}$ 是有限多个 (相互不交) 的可测集. 为此设 $f(X)=\{a_k\}$, 命 $X_k=f^{-1}(\{a_k\})$ 即可.

定理 6 设 $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是可测空间 X 上非负可测函数, 则有非负实数列 (c_n) 与可测集列 (E_n) 使 $f=\sum\limits_n c_n\chi_{E_n}$.

本节最后介绍一些有关 σ- 环的性质.

性质 7 (1) $\mathbf{S}(\mathcal{E}\cap A)=\mathbf{S}(\mathcal{E})\cap A$, 其中 $\mathcal{E}\cap A=\{E\cap A|E\in\mathcal{E}\}$.

(2) $\mathbf{S}(\mathcal{A})=\mathbf{S}(\mathbf{R}(\mathcal{A}))=\mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathcal{A}))\subseteq\mathbf{H}(\mathcal{A})$.

(3) 设 $\mathcal{E}\subseteq 2^X$ 而 $\mathcal{F}\subseteq 2^Y$, 则 $\mathbf{S}(\mathcal{E})\times\mathbf{S}(\mathcal{F})=\mathbf{S}(\mathcal{E}*\mathcal{F})$.

(4) 设 $A\subseteq X$ 且 $B\subseteq Y$, 则 $(\mathcal{R}\cap A)\times(\mathcal{S}\cap B)=(\mathcal{R}\times\mathcal{S})\cap(A\times B)$.

习 题

练习 1 在实直线上，命 $f(x) = 1/x, f(0) = +\infty$, 证明 f 是 Borel 函数.

练习 2 设 $(X, \mathcal{R})$ 和 $(Y, \mathcal{S})$ 是可测空间，证明乘积 σ- 代数 $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ 是使两个投影 $\pi : X \times Y \to X$ 及 $\tau : X \times Y \to Y$ 都可测的最小 σ- 代数.

练习 3 设有可测空间 $(X_i, \mathcal{R}_i)$ 与有一簇映射 $\{f_i : X_i \to Y | i \in I\}$. 证明在 Y 上有个使每个 f_i 都可测的最大 σ- 代数 $\mathcal{S}$.

练习 4 设有可测空间 $(Y_i, \mathcal{S}_i)$ 与映射簇 $\{f_i : X \to Y_i | i \in I\}$, 命

$$\sigma(f_i | i \in I) = \mathbf{S}\{f_i^{-1}(F_i) | i \in I, F_i \in \mathcal{S}_i\},$$

证明它是使每个 f_i 都可测的最小 σ- 代数. 这称为 $\{f_i | i \in I\}$ 生成的 σ- 代数.

练习 5 证明以下函数将 Borel 集映为 Borel 集，并求它们作为可测函数时各自生成的 σ- 代数 $\mathcal{S}$.

(1) 符号函数 $\operatorname{sgn} x$(当 $x > 0$ 时，$\operatorname{sgn} x = 1$; 当 $x < 0$ 时，$\operatorname{sgn} x = -1$; $\operatorname{sgn} 0 = 0$. 这可统一定义为 $\operatorname{sgn} x = \lim\limits_{\delta \to 0+} x/(|x| + \delta)$).

(2) 取整函数 $[x]$ 或不超过 x 的最大整数：$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leqslant x\}$.

(3) 正弦函数 $\sin x$.

(4) 正切函数 $\tan x : X \to \mathbb{R}$, 其中 $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$.

(5) 指数函数 $\exp x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

(6) 取小数函数 (x), 即实数 x 的小数部分：$(x) = x - [x]$.

练习 6 证明以下函数是 Borel 函数 (其中 $\mathbb{K}$ 代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$):

(1) 和差：$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : (x, y) \mapsto x \pm y$.

(2) 数乘：$\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : (a, x) \mapsto ax$.

(3) 平移：$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto u + x$, 其中 $u \in \mathbb{K}^n$ 是固定的.

(4) 线性映射：$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : x \mapsto \tau x$, 其中 τ 是一个 $m \times n$ 矩阵.

(5) 取最大值：$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \max\{x, y\}$.

(6) 取最小值：$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \min\{x, y\}$.

(7) 模：$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$.

(8) 投影：$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K} : x \mapsto x_i$, 其中 x_i 是 x 的第 i 个分量.

练习 7 证明 E 是 Borel 集, 其中

(1) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|0\leqslant x+y\leqslant 2, 0\leqslant x-y\leqslant 1\}$.

(2) $E=\{(a,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n|\forall i:(-1)^i a x_i\leqslant 1\}$.

(3) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|\max\{x,y\}\leqslant 100, \min\{x,y\}\geqslant 10\}$.

(4) $E=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\in\mathbb{Q}\}$.

练习 8 如果 $g,f:X\to\mathbb{C}$ 是可测函数而 $p>0$, 证明 $|f|^p$, $\exp\circ f$ 与 $\sqrt{|f|^2+|g|^2}$ 是可测函数.

练习 9 设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是 Borel 函数, 证明:

(1) 函数 $(x,y)\mapsto f(x\pm y)$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上的 Borel 函数.

(2) 函数 $(x,y)\mapsto f(xy)$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上的 Borel 函数.

(3) 函数 $(x,y)\mapsto f(x/y)$ 是 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^\times$ 上的 Borel 函数.

(4) 函数 $(x,y)\mapsto f(|x|^2+|y|^2)$ 是 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 上的 Borel 函数.

(5) 函数 $(x,y)\mapsto f(\max\{x,y\})$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的 Borel 函数.

(6) 函数 $(x,y)\mapsto f(\min\{x,y\})$ 是 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上的 Borel 函数.

练习 10 设 $f:X\to\mathbb{R}$ 的平方 $f^2:X\to\mathbb{R}$ 是可测函数并且 $(f>0)$ 是可测集. 证明 f 是可测函数.

练习 11 设函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 满足: 对任何有理数 b, 点集 $(f<b)$ 是可测集. 证明 f 是可测函数.

练习 12 证明: 实直线上以下四个集类生成的 σ- 环都是 $\mathcal{B}_1$.

(1) $\mathbb{R}$ 中全体区间 $(a,+\infty)$.

(2) $\mathbb{R}$ 中全体区间 $[a,+\infty)$.

(3) $\mathbb{R}$ 中全体区间 $(-\infty,b)$.

(4) $\mathbb{R}$ 中全体区间 $(-\infty,b]$.

练习 13 设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是 σ- 有限测度空间, 证明任何可测集 E 都有个测度有限可测划分 $\{E_n\}$, 也有个以 E 为极限的测度有限递增可测集列 (F_n).

* **练习 14** 证明: 闭区间 [0,1] 和 Cantor 集 K 是 Borel 同构的.

练习 15 设 $\{f_i:X\to\mathbb{R}|i\in I\}$ 是 Borel 集 X 上一些连续函数, 证明 $\sup\limits_{i\in I} f_i$ 与 $\inf\limits_{i\in I} f_i$ 是 Borel 函数. 如果每个 f_i 仅是 Borel 函数, 结论又会怎样?

练习 16 证明: 有无限个可测集的可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 至少有 $\aleph$ 个可测集.

练习 17 可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 的非空可测集 E 称为原子是指它无非空可测真子集. 证明两个有交点的原子 E_1 和 E_2 必相等.

* **练习 18** 设可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 是可数生成的 — 有集列 (A_n) 使

$$\mathcal{S}=\mathbf{S}(\{A_n|n\geqslant 1\}).$$

证明: (1) X 是原子空间 — 它为其原子之并.

(2) X 的每个非空可测集 B 是与 B 有交点的原子的无交并.

(3) X 的原子都形如 $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} H_n$, 其中每个 H_n 是 A_n 或补集 $A_n^{\mathbf{c}}$.

(4) X 至 Cantor 集 K 的某个子集 Y 有一个满的双可测函数 $f:X\to Y$ 使 $f(x_1)=f(x_2)$ 当且仅当 x_1 和 x_2 在 X 的同一个原子中.

练习 19 设 X 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的非空 Borel 集. 证明:

(1) X 的 Borel 集类 $\mathcal{B}(X)$ 是可数生成的且其原子都是单点集.

(2) X 至 Cantor 集 K 的某个子集 Y 有个 Borel 同构 $f:X\to Y$.

练习 20(A- 运算) 以 $\mathbb{S}$ 代表正整数列 $a=(a_1,a_2,\cdots)$ 全体. 设 $\mathcal{E}$ 是一个集类, 记 $F(\mathcal{E})=\{f:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{S}\to\mathcal{E}\}$. 对于 $f\in F(\mathcal{E})$, 记

$$M(f)=\bigcup_{a\in\mathbb{S}}\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}f(i,a);\mathbf{A}(\mathcal{E})=\{M(f)|f\in F(\mathcal{E})\}.$$

证明: (1) $\mathbf{A}(\mathcal{E})$ 对可数并与可数交运算封闭.

(2) $\mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathcal{E}))=\mathbf{A}(\mathcal{E})$(即 $\mathbf{A}$ 是个幂等运算).

(3) 设 g 是正则的 — 恒有 $g(i+1,a)\subseteq g(i,a)$, 则

$$\bigcup_{l\in\mathbb{Z}_+}\bigcup_{a\in\mathbb{S}}\bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}g(i+k+1,a_1,\cdots,a_i,l,a_{i+1},\cdots)=\bigcup_{b\in\mathbb{S}}\bigcap_{k\in\mathbb{Z}_+}g(i+k,b).$$

(4) 设 $\mathcal{E}$ 对有限交运算封闭, 有一个正则 $g\in F(\mathcal{E})$ 使 $M(f)=M(g)$.

练习 21 证明: 可导函数 $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ 的导函数 f' 是 Borel 函数.

练习 22 证明: 可测空间 X 上函数 f 是离散的当且仅当它形如 $\sum\limits_k a_k\chi_{E_k}$, 其中 $\{E_k\}$ 是至多可列个相互不交的可测集.

练习 23 设 $f:X\to\mathbb{C}$ 是可测函数, 证明有可测函数 $\theta:X\to\mathbb{R}$ 使

$$f(x)=|f(x)|\exp(\sqrt{-1}\theta(x)):x\in X.$$

练习 24 设 $f:X\to Y$ 是两个可测空间之间的可测映射. 如果 μ 是 X 上测度, 证明 f 诱导了 Y 上一个测度 ν 使 F 为 Y 的可测集时 $\nu(F)=\mu f^{-1}(F)$.

练习 25 设 $X\subseteq\mathbb{R}$ 使 $x\in X$ 时有 $y>x$ 满足不等式 $[x,y)\subseteq X$. 对于函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$, 命 $f_1(x)=\overline{\lim\limits_{z\to x+}}f(x)$ 及 $f_2(x)=\underline{\lim\limits_{z\to x+}}f(z)$. 证明 f_1 和 f_2 是 X 上 Borel 函数.

§2.4 测度空间

前面讨论的可测函数主要基于可测空间. 以后讨论的可测函数主要基于测度空间 —— 带测度的可测空间 $(X, \mathcal{S}, \mu)$, 这可简记为 (X, μ).

例 1 使 $P(\Omega) = 1$ 的测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 称为概率空间. 如命

$$\Omega_1 = \{(i,j,k)|i,j,k = 1,2,3,4,5,6\},$$

其中 (i,j,k) 代表掷 3 次骰子后依次得到的点数, 它发生的概率为 1/216. 又命

$$\Omega_2 = \{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTH}, \mathrm{THH}, \mathrm{HTT}, \mathrm{THT}, \mathrm{TTH}, \mathrm{TTT}\},$$

其中 HTH 代表掷 3 次硬币所到的面依次为正面、反面和正面, 它发生的概率为 1/8, 其他字符串有类似的解释.

当言及测度空间 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是 (全) 有限或 (全)σ- 有限或完全测度空间时是指测度 μ 具有相应的性质. 以后总要求 $\mathcal{S}$ 是 σ- 代数.

几乎处处 设命题 P 与测度空间 (X, μ) 的点 x 有关. 称 P 在 X 上 *几乎处处成立* 是指使 P 不成立的 x 全体 D 含于一个零集中. 这相当于 $\mu^*(D) = 0$. 请注意, 不要求 D 是可测集, 因 X 本身可测, D 有外测度.

(1) 对于测度空间 (X, μ) 上的函数 f 与 g, 式子 $f \doteq g$ 表示 f 与 g 几乎处处相等 — 它们在一个零集外处处取值相等. 这等价于 $\mu^*(f \neq g) = 0$. 如在 Lebesgue 测度下, Dirichlet 函数和 Riemann 函数都几乎处处等于 0.

式子 $f \dot{<} g$ 表示 f 几乎处处小于 g: 存在零集 E 使 $x \in X \setminus E$ 时, $f(x) < g(x)$. 这相当于 $\mu^*(f \geqslant g) = 0$. 同样可解释 $f \dot{\leqslant} g$.

(2) 对于 (X, μ) 上函数列 (f_n), 式子 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \doteq f$ 或 $\lim f_n = f$, a.e. 表示 (f_n) 几乎处处收敛于 f: 有个零集 E 使 $x \in X \setminus E$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

在积分理论中发挥重要作用的是以下收敛性.

依测度收敛 称测度空间上函数列 $(f_n : X \to \mathbb{C})$ 依测度收敛于函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 是指对任何 $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) = 0$. 这意味着

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists l \geqslant 1, \forall n \geqslant l : \mu^*(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) < \delta.$$

也意味着对于事先指定的任何误差 ε, 函数 f_n 与 f 的误差不小于 ε 的点全体 $(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)$ 渐近地为 "空集"— 其测度趋向于零.

(1) 测度空间上函数列 $(f_n : X \to \mathbb{C})$ 依测度收敛当且仅当它是依测度基本序列 — 对任何 $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{m,n\to\infty} \mu^*(|f_m - f_n| \geqslant \varepsilon) = 0$. 此时, 如果 (f_n) 是可测函数列, 则它依测度逼近一个可测函数.

(2) 在几乎处处相等的意义下，函数列依测度收敛的极限是唯一的.

(3) 线性组合与取模保持依测度收敛与几乎处处收敛.

(4) 依测度收敛 (和几乎处处收敛) 保持几乎处处小于等于关系.

(5) 在几乎处处相等的意义下，函数列几乎处处收敛的极限是唯一的.

(6) 几乎处处收敛的可测函数列几乎处处逼近一个可测函数.

例 2 区间 (0,1) 上的函数列 $(f_n : x \mapsto x^n)$ 依 Lebesgue 测度逼近 0. 为此设 $0 < \varepsilon < 1$, 则 $(|f_n| \geqslant \varepsilon) = [\varepsilon^{1/n}, 1)$, 其 Lebesgue 测度趋向于 0.

例 3 取区间 $(0,1]$ 中子集 $((i-1)/n, i/n]$ 的特征函数 f_{ni}. 将它们排成一列

$$f_{11}, f_{21}, f_{22}, \cdots, f_{n1}, f_{n2}, \cdots, f_{nn}, \cdots.$$

函数 f_{ni} 在此序列中排在第 $k = n(n-1)/2 + i$ 位, 将它记为 g_k. 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时, $(|g_k| \geqslant \varepsilon) = ((i-1)/n, i/n]$, 其长度 $1/n$. 当 k 趋向无穷大时, n 也趋向无穷大. 因此 (g_k) 依 Lebesgue 测度逼近零函数.

依测度收敛不蕴含几乎处处收敛. 为此考察例 3. 任意固定 $x_0 \in (0,1]$. 当 $n \geqslant 2$ 时, 总有 i_n 和 j_n 使 $f_{ni_n}(x_0) = 1$ 而 $f_{nj_n}(x_0) = 0$. 因此 (g_k) 有两个子列：一个在 x_0 的极限为 0 而另一个在 x_0 的极限为 1. 因此 (g_k) 点点不收敛. 但 (g_k) 的子列 (f_{n1}) 点态逼近 0. 这有以下理论基础.

定理 1(F. Riesz) 如果测度空间上函数列 $(f_n : X \to \mathbb{C})$ 依测度收敛于函数 $f : X \to \mathbb{C}$, 则有子列 (f_{k_n}) 几乎处处收敛于 f.

(几乎) 处处收敛自然不蕴含一致收敛. 然而在一定条件下, 几乎处处收敛差不多就是一致收敛. 这个 “差不多” 指的是差一个测度任意小的集.

定理 2(Д. Ф. Егоров) 设全有限测度空间上可测函数列 $(f_n : X \to \mathbb{C})$ 几乎处处收敛于可测函数 $f : X \to \mathbb{C}$. 对任何 $\delta > 0$, 有可测集 E 使 $\mu(E) < \delta$ 而 (f_n) 在 $X \setminus E$ 上一致收敛于 f.

几乎处处收敛不蕴含依测度收敛. 为此取 $[0, n]$ 的特征函数 f_n. 函数列 (f_n) 点态逼近 1. 当 $0 < \varepsilon < 1$ 时, $(|f_n - 1| \geqslant \varepsilon) = (n, +\infty)$, 其 Lebesgue 测度恒为无穷大. 因此 (f_n) 不依 Lebesgue 测度逼近 1.

定理 3(Lebesgue) 如果全有限测度空间上可测函数列 $(f_n : X \to \mathbb{C})$ 几乎处处收敛于可测函数 $f : X \to \mathbb{C}$, 则 (f_n) 依测度收敛于 f.

依测度收敛有如下重要特征.

定理 4 设有测度空间 $(X,\mathcal{R},\mu)$ 上函数列 $f,f_1,f_2,\cdots:X\to\mathbb{C}$.

(1) 函数列 (f_n) 依测度收敛于 f 当且仅当 (f_n) 的任何子列 (f_n') 都有子列 (f_n'') 使 $\delta>0$ 时, 有子集 E 使 $\mu^*(E^c)<\delta$ 且 (f_n'') 在 E 上一致收敛于 f.

(2) 如果 $\mu(X)<+\infty$ 且 f 与 f_n 都可测, 则 (f_n) 依测度收敛于 f 当且仅当 (f_n) 的任何子列 (f_n') 都有几乎处处收敛于 f 的子列 (f_n'').

推论 5 设全有限测度空间上的可测函数列 (f_n) 与 (g_n) 分别依测度收敛于可测函数 f 与 g, 则 (1) (f_ng_n) 依测度收敛于 fg.

(2) 对任何 $p>0$, $(|f_n|^p)$ 依测度收敛于 $|f|^p$.

(3) 当 g_n 与 g 处处非零时, (f_n/g_n) 依测度收敛于 f/g.

称 $f:X\to Y$ 是 Lebesgue 可测函数是指: X 是 Lebesgue 可测集, 而 Y 是 (Euclid 空间或广义实数系的)Borel 集使 Y 的任何 Borel 子集 F 的原像 $f^{-1}(F)$ 是 X 的 Lebesgue 可测子集.

例 4 如果 X 是 Lebesgue 零集, 则 X 上任何函数 f 都是 Lebesgue 可测函数. 这是因为原像 $f^{-1}(F)$ 总是 Lebesgue 零集.

Dirichlet 函数是 Lebesgue 可测函数. 它无连续点, 但它限制在无理数集 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 上是连续函数且 $|\mathbb{Q}|_1=0$. 请注意无理数集不是实直线的闭集.

定理 6(H. H. Лузин) 设 f 是 X 上的 Lebesgue 可测函数. 对于 $\delta>0$, 有含于 X 的闭集 E 使 $\mathbf{m}(X\setminus E)<\delta$ 并且 f 限制在 E 上是连续函数.

需要注意的是 Лузин 定理并没有说 E 的点 x 是 f 的连续点, 而只是说 x 是限制 $(f:E\to\mathbb{C})$ 的连续点 — 对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $z\in E$(注意不是 $z\in X$) 且 $|z-x|<\delta$ 时, $|f(z)-f(x)|<\varepsilon$.

定理 7(H. H. Лузин) 对于 Lebesgue 可测函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 和任意 $\delta>0$, 存在连续函数 $g:X\to\mathbb{R}$ 使 $\mathbf{m}(f\neq g)<\delta$ 且 $\sup|g|(X)\leqslant\sup|f|(X)$.

Borel 集是 Lebesgue 可测集表明 Borel 函数也是 Lebesgue 可测函数. 由于存在非 Lebesgue 可测集, 所以存在非 Lebesgue 可测函数. 由于存在非 Borel 集的 Lebesgue 可测集, 所以存在非 Borel 函数的 Lebesgue 可测函数. 以下定理表明 Lebesgue 可测函数本质上是 Borel 函数.

定理 8 Lebesgue 可测函数 $f:X\to\mathbb{C}$ 在一个零集外是 Borel 函数.

习 题

练习 1 设 (X,μ) 是全有限测度空间. 可测函数列 $(f_n : X \to \mathbb{C})$ 几乎处处逼近可测函数 f 当且仅当 $\varepsilon > 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\sup\limits_{m\geqslant n} |f_m - f| > \varepsilon) = 0$.

练习 2 设对任何 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 成立 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 试证明 Lebesgue 可测函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是连续函数.

练习 3 将 $\mathbb{R}^n$ 看成 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间, 取其基 B. 每个 $x \in \mathbb{R}^n$ 有唯一线性组合 $x = \sum\limits_{e\in B} \alpha_e(x)e$ (系数 $\alpha_e(x)$ 都是有理数且不为零的系数仅有有限项).

(1) 证明: 对任何有理数 r 与 s 和对任何向量 x 与 y 成立

$$\alpha_e(rx + sy) = r\alpha_e(x) + s\alpha_e(y).$$

(2) 证明: 函数 $\alpha_e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 不是 Lebesgue 可测函数.

(3) 证明: 当 b 是实数时, $(\alpha_e < b)$ 非 Lebesgue 可测集.

(4) 证明: 当 b 是实数时, $(\alpha_e \leqslant b)$ 非 Lebesgue 可测集.

(5) 证明: 当 b 是有理数时, $(\alpha_e = b)$ 非 Lebesgue 可测集.

(6) 说明 B 的势为 $\aleph$(这保证了以下结论合理性).

(7) 对于自然数 k, 找出 $k+1$ 个有理线性无关的实数.

练习 4 设函数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 使 $a < x < y < b$ 时

$$f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

如果 f 在开区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 有上界, 证明 f 在 x_0 连续.

练习 5 设 Lebesgue 可测函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 对任何实数 x 与 y 成立

$$f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

证明 f 是连续的下凸函数.

练习 6 找个闭集 F 使 $\mathbf{m}(\mathbb{R} \setminus F) < 0.1$ 并且函数 $[x]$ 在 F 上连续.

练习 7 写出并证明 Лузин 定理的逆命题.

练习 8 构造一个非 Borel 集的 Lebesgue 可测集.

练习 9 证明两个 Borel 函数 $f : X \to Y$ 和 $h : Y \to Z$ 的复合 hf 是 Borel 函数. 将 Borel 函数换成 Lebesgue 可测函数后的结论对吗?

练习 10 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 测度有限集上的 Lebesgue 简单函数而 $\delta > 0$, 证明有连续函数 $h: X \to \mathbb{R}$ 使 $\min f \leqslant h \leqslant \max f$ 且 $\mathbf{m}(f \neq h) < \delta$.

练习 11 设 $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测函数, 证明:

(1) 存在一列有理系数多项式 (f_n) 在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处逼近 f.

(2) 存在一列有理系数三角多项式 (g_n) 在 $[0, 2\pi]$ 上几乎处处逼近 f.

练习 12 证明存在 $[0, 2\pi]$ 上的连续函数项级数 $h_1 + h_2 + \cdots$, 将其添加括号后可以几乎处处逼近事先指定的任何 Lebesgue 可测函数 $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$.

练习 13 考虑 Lebesgue 可测集 X 上的函数, 证明:

(1) 与一个 Lebesgue 可测函数几乎处处相等的函数也 Lebesgue 可测.

(2) Lebesgue 可测函数列的几乎处处收敛的极限是 Lebesgue 可测函数.

(3) Lebesgue 可测函数列依测度收敛的极限是 Lebesgue 可测函数.

(4) Lebesgue 可测集上几乎处处连续的函数是 Lebesgue 可测函数.

(5) 与一个连续函数几乎处处相等的函数是否几乎处处连续?

练习 14 求 Lebesgue 可测函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 全体 L 的势.

练习 15 设 $\mu(X) < +\infty$, 证明对于可测函数列 $(f_n: X \to \mathbb{C})$ 存在正数列 (c_n) 使 $(c_n f_n)$ 几乎处处逼近 0.

练习 16 证明: 对于全有限测度空间 (X, μ) 上几乎处处逼近 0 的可测函数列 (f_n), 存在数列 (c_n) 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| = +\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n f_n(x)| \dot{<} \infty$.

练习 17 设 (X, μ) 是全有限测度空间. 设可测函数列 $(f_n: X \to \mathbb{K})$ 依测度收敛于可测函数 $f: X \to \mathbb{K}$. 如果 $\varphi: \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ 是连续函数, 证明复合函数列 (φf_n) 依测度逼近复合函数 φf, 其中 $\mathbb{K}$ 代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

练习 18 设测度空间 (X, μ) 上函数列 $(f_{ij})_{j=1}^{\infty}$ 依测度逼近函数 f_i, 而函数列 $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ 依测度逼近函数 f, 证明 (f_{ij}) 有子列依测度逼近 f.

练习 19 设测度空间 (X, μ) 上可测函数列 (f_n) 依测度逼近可测函数 f, 而且当 $n \geqslant 1$ 时 $f_n \dot{\leqslant} f_{n+1}$, 证明 (f_n) 几乎处处逼近 f.

练习 20 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是 σ- 有限测度空间. 将 $\mathcal{S}$ 中成员称为可测集, 而将 $\mathcal{S}^*$ 中成员称为 μ^*- 可测集. 设 E 是 μ^* 可测集而 f 是 E 上 μ^*- 可测函数 — 当 F 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 中 Borel 集时, $f^{-1}(F)$ 是 E 中 μ^*- 可测集, 证明 E 有可测集 G 使 $\mu^*(E \setminus G) = 0$ 且 f 限制在 G 上是可测函数.

练习 21 设函数序列 $(f_n : X \to \overline{\mathbb{R}})_{n=1}^{\infty}$ 点态递增至函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. 当 c 是实数时，证明集列 $((f_n > c))_{n=1}^{\infty}$ 递增至 $(f > c)$.

练习 22 证明：集列 $(f \leqslant 1 - 1/n) : n = 1, 2, \cdots$ 递增且其极限是 $(f < 1)$.

练习 23 设 (c_n) 是正实数列使 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$. 设 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 是非负可测函数，证明有可测集列 (E_n) 使 $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}$.

练习 24 设 λ 是 2^X 上的外测度. 称 X 的子集 E 为 λ- 可测的是指

$$\lambda(F) = \lambda(F \cap E) + \lambda(F \setminus E) : F \subseteq X.$$

对于函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, 证明以下条件等价：

(1) f 是 λ- 可测函数：b 是实数时，$(f \geqslant b)$ 是 λ- 可测集.

(2) F 是 X 的子集且当 $-\infty < a < b < +\infty$ 时，

$$\lambda(F(f \leqslant a)) + \lambda(F(f \geqslant b)) \leqslant \lambda(F).$$

练习 25 设概率空间 (X, μ) 中可测集列 (E_n) 的并为 E 而交为 F.

(1) 当 $0 < c < 1$ 时总有个 n 满足 $\mu(E_n) > c$, 证明 $\mu(E) = 1$.

(2) 设恒有 $\mu(E_n) = 1$, 证明 $\mu(F) = 1$.

(3) 设 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \mu(E_n) = 1$ 而 $0 < c < 1$, 则 $\mathbb{Z}_+$ 有可数子集 J 使

$$\sum_{i\in J}(1 - \mu(E_i)) < +\infty, \mu(\bigcap_{i\in J} E_i) > c.$$

练习 26 设 (X, μ) 是完全概率空间. 设 F 是 X 中非可测集，证明有常数 c 使 $0 < c < 1$ 且当 E 是满足 $\mu(E) \geqslant c$ 的可测集时，$F \cap E$ 非可测集.

练习 27 设 $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n=1}^{\infty}$ 是全有限测度空间 (X, μ) 上的可测函数列，证明：(f_n) 几乎处处逼近 0 当且仅当 (g_n) 依测度逼近 0, 其中 $g_n = \sup\limits_{k\geqslant n} |f_k|$.

练习 28 证明：测度空间 (X, μ) 上函数列 (f_n) 依测度逼近 f 当且仅当 $\varepsilon > 0$ 时，有个 m 使 $n > m$ 时 $\mu^*(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) < \varepsilon$.

练习 29 计数测度空间 $(X, 2^X, |\cdot|_0)$ 上函数列 (f_n) 依测度逼近 f 当且仅当 (f_n) 一致逼近 f.

练习 30 设 (X, μ) 是测度空间. 证明：

(1) $\doteq$ 具有自反性、对称性与传递性.

(2) $\dot{\leqslant}$ 具有自反性与传递性，但不一定有反称性.

(3) $f \doteq g$ 当且仅当 $f \dot{\leqslant} g$ 与 $g \dot{\leqslant} f$.

第 3 章

积分与可积性

形式上，Riemann 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 中需要一个被积函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 和小区间的 dx. 它还有一个本质的因素 — 积分的定义方式. 在第二章中，小区间的长度被推广为测度，而 Riemann 可积函数则被推广为可测函数. 因此推广 Riemann 积分就只剩下定义方式了.

§3.1 积分及其性质

本节讨论的积分有多种定义方式，下面用其特征来定义.

非负可测函数的积分与其性质 测度空间 (X,μ) 上非负可测函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 都对应唯一非负广义实数 $\int_X f(x)\mu(dx)$ 满足以下 (1) 和 (2):

(1) 当 f 是可测集 E 的特征函数时：$\int_X f(x)\mu(dx)=\mu(E)$,

(2) 当 f_n 都是非负可测函数且 $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 时,

$$\int_X f(x)\mu(dx)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n(x)\mu(dx).$$

将 $\int_X f(x)\mu(dx)$ 简记为 $\int_X fd\mu$, 这称为 f 在 X 上的积分. 它有以下性质：

(3) 当 $0\leqslant c\leqslant+\infty$ 时，$\int_X cf(x)\mu(dx)=c\int_X f(x)\mu(dx)$.

(4) 当 $c_n\geqslant 0$ 且 E_n 是可测集使 $f=\sum_n c_n\chi_{E_n}$ 时 (见 §2.3 定理 6),

$$\int_X fd\mu=\sum_n c_n\mu(E_n).$$

这可视为非负可测函数积分的定义. 据以上性质，以后在证明有关积分的某些通用结论时，常可设 f 是可测集 E 的特征函数.

符号 $\mu(dx)$ 可直观地理解为"无穷小可测集 dx 的测度", 而 $f(x)\mu(dx)$ 可理解为"无穷小曲边梯形 $\{(t,y)|t\in dx, 0\leqslant y\leqslant f(t)\}$ 的面积".

例 1 Dirichlet 函数 $D=\chi_{\mathbb{Q}}$ 关于 Lebesgue 测度的积分

$$\int\limits_{\mathbb{R}} D(x)\mathbf{m}(dx)=\mathbf{m}(\mathbb{Q})=0.$$

据积分的性质 (4), 当要说明一个关于积分的结论对于所有非负可测函数成立时, 只要说明结论对于可测集的特征函数成立就可以了.

例 2 计数测度空间 $(X,|\cdot|_0)$ 上非负可测函数的积分 $\int\limits_X f(x)|dx|_0=\sum\limits_{x\in X} f(x)$. 为此可设 $f=\chi_E$, 上式两端为 $|E|_0$ 和 $\sum\limits_{x\in X}\chi_E(x)$. 它们相等.

上例表明级数为函数关于计数测度的积分, 因此积分是级数的推广.

例 3 设 (M,μ) 是全 σ- 有限测度空间使 $\mu(M)>0$, 证明 M 上有可测函数 w 使 $0<w<+\infty$ 且 $\int\limits_M wd\mu=1$. 这可视为 1.4 例 5 的积分形式.

为此取 M 的测度有限可测划分 $\{E_n|n\in J\}$, 将其中零集并至一个非零集上后可设 E_n 都非零集. 取 $a_n>0$ 使 $\sum\limits_{n\in J} a_n=1$, 命 $w=\sum\limits_{n\in J}\dfrac{a_n\chi_{E_n}}{\mu(E_n)}$, 则

$$\int\limits_M wd\mu=\sum_{n\in J}\frac{a_n}{\mu(E_n)}\int\limits_M \chi_{E_n}d\mu=\sum_{n\in J}a_n=1.$$

将非负可测函数 f 限制在可测集 E 上后同样可定义积分 $\int\limits_E fd\mu$. 特别地, $\int\limits_{\varnothing} fd\mu=0$. 本书约定, 在任何情形下积分有限的函数称为 *可积函数*.

一般可测函数的积分与性质 (一) 设 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是可测函数而 E 是 X 的可测集. 如果 f 的正部 f^+ 或负部 f^- 在 E 上可积, 规定 f 在 E 上的积分

$$\int\limits_E fd\mu=\int\limits_E f^+d\mu-\int\limits_E f^-d\mu.$$

(二) 设 $f:X\to\mathbb{C}$ 的实部与虚部在 E 上可积, 规定 f 在 E 上的积分

$$\int\limits_E fd\mu=\int\limits_E \mathrm{re}\, fd\mu+\sqrt{-1}\int\limits_E \mathrm{im}\, fd\mu.$$

(三) 以上规定的积分有以下性质:

(1) 可列可加性：设 f 在测度空间 (X,μ) 上的积分存在，则 f 在每个可测子集上积分存在. 进而当 $\{E_n\}$ 是 E 的可测划分时，

$$\int_E f(x)\mu(dx)=\sum_n \int_{E_n} f(x)\mu(dx).$$

(2) 单调性：设可测函数 $g,h:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 满足 $g\dot{\leqslant}h$.

(2a) 设 g 的负部在 X 上可积，则 h 的负部在 X 上可积.

(2b) 设 h 的正部在 X 上可积，则 g 的正部在 X 上可积.

(2c) 设 g 与 h 在 X 上的积分存在，则 $\int_X gd\mu\leqslant\int_X hd\mu$.

(2d) 设 g 与 h 在 X 上积分有限且相等，则 g 与 h 几乎处处相等.

(3) f 在 X 上可积时，$(|f|>0)$ 是 σ- 有限集且 f 几乎处处有限.

(4) $|f|$ 在 X 上积分为零当且仅当 f 在 X 上几乎处处为零.

(5) 线性性：设 a 和 b 是有限数，下式在右边有意义时成立

$$\int_X (af+bg)d\mu=a\int_X fd\mu+b\int_X gd\mu.$$

(6) 共轭性：设 $f:X\to\mathbb{C}$ 可积，则 $\int_X \overline{f}d\mu=\overline{\int_X fd\mu}$.

(7) 绝对性与绝对可积性：设 f 在 X 上积分存在，则

$$\left|\int_X f(x)\mu(dx)\right|\leqslant\int_X |f(x)|\mu(dx).$$

进而，f 在 X 上可积当且仅当 $|f|$ 在 X 上可积.

(8) 正则性：设 $g:X\to\mathbb{C}$ 是可积函数而 $\varepsilon>0$，则 X 有个测度有限集 E 使 g 在 E 上有界且 $\int_{X\setminus E}|g|d\mu<\varepsilon$.

(9) 绝对连续性：设 $g:X\to\mathbb{C}$ 是可积函数而 $\varepsilon>0$，则有 $\delta>0$ 使 X 的可测集 F 满足 $\mu(F)<\delta$ 时，$\int_F |g|d\mu<\varepsilon$.

例 4 零集 E 上可测函数 f 的积分都为 0. 事实上，

$$\int_E |f|d\mu\leqslant(+\infty)\mu(E)=0.$$

可见，增加或减去个零集后不影响积分的值. 这为积分理论与应用带来方便.

例 5 在可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上取 Dirac 测度 $\delta_a: E\mapsto \chi_E(a)$, 则 X 上任何可测函数 f 的积分都存在且 $\int\limits_X f d\delta_a = f(a)$, 即 f 在 a 赋值.

为此设 f 为可测集 E 的特征函数, 则上式两端分别是 $\delta_a(E)$ 与 $\chi_E(a)$.

Lebesgue 可测函数关于 Lebesgue 测度的积分 $\int\limits_X f(x)\mathbf{m}(dx)$ 存在时称为 Lebesgue 积分, 这可简记为 $\int\limits_X f(x)dx$. 对于 Riemann 函数 R 而言,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} R(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} 0dx + \int\limits_{\mathbb{Q}} R(x)dx = 0.$$

定理 1(Lebesgue) 有界函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 Riemann 可积的当且仅当其不连续点全体是 Lebesgue 零集. 此时其 Lebesgue 积分与 Riemann 积分相等.

一般区间上广义 Riemann 可积函数都几乎处处连续, 因而是 Lebesgue 可测函数. 现设 I 是任意区间而 $f:I\to\mathbb{R}$ 几乎处处连续. 如果 $|f|$ 广义 Riemann 可积, 则 f 是 Lebesgue 可积. 此时, 两个积分相同. 仅由广义 Riemann 可积性不能说明 Lebesgue 可积性. 尽管如此, 有时可利用广义 Riemann 积分来计算 Lebesgue 积分.

例 6 设 $a>0$ 且 b 是实数. 因为非负可测函数的积分总存在, 所以

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}(bx)^{2n}}{(2n)!}dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{b^{2n}x^{2n-1}}{2a(2n)!}de^{-ax^2}$$

$$= -\frac{b^{2n}x^{2n-1}}{2a(2n)!e^{ax^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{b^2}{4an}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}(bx)^{2n-2}}{(2n-2)!}dx$$

$$= \cdots = \frac{b^{2n}}{(4a)^n n!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{b^2}{4a}\right)^n\frac{1}{n!}.$$

上例中用了广义 Riemann 积分的分部积分公式, 下面再用它算一例积分.

例 7 命 $f(x)=(\sin x)/x$ 及 $f(0)=1$. 据数学分析知 f 在 $\mathbb{R}$ 上的广义 Riemann 积分为 π 但 $|f|$ 不是广义 Riemann 可积的, 因此 f 不是 Lebesgue 可积函数. 但 $|f|^2$ 是 Lebesgue 可积函数:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = 2\lim_{p\to\infty}\int\limits_0^p(\sin x)^2 d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=2\lim_{p\to\infty}\int\limits_0^p\frac{\sin 2x}{x}dx = 2\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi.$$

习 题

练习 1 设 f 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上非负可测函数. 若 J 是定向集而 $\mu_i(i\in J)$ 是 $\mathcal{S}$ 上一簇测度使 $i\leqslant j$ 时 $\mu_i\leqslant\mu_j$, 命 $\mu(E)=\sup\limits_{i\in J}\mu_i(E)$, 证明 μ 是测度且

$$\sup_{i\in J}\int\limits_X fd\mu_i=\int\limits_X fd\mu.$$

练习 2 设 (X,μ) 是全有限测度空间, 证明可测函数 $f:X\to\mathbb{C}$ 可积当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mu(n\leqslant|f|<n+1)$ 可和当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(|f|\geqslant n)$ 可和.

练习 3 设 g 是测度空间 (X,μ) 上复值可测函数.

(1) 如果 E 是测度有限集且 g 在 E 上有界, 证明 g 在 E 上可积.

(2) 当 X_0 是 σ- 有限集时, 证明有递增至 X_0 的测度有限序列 (E_n) 使 g 在每个 E_n 上有界.

练习 4 设全 σ- 有限测度空间 (X,μ) 上可测函数 $g,h:X\to\mathbb{R}$ 满足: 当 E 是使 $g(E)\cup h(E)$ 有界的测度有限集时, $\int\limits_E gd\mu\leqslant\int\limits_E hd\mu$. 证明 $g\dot{\leqslant}h$.

练习 5 设 K 是 Cantor 集而 O 是构造 K 时移去的开集. 以下分段定义的函数 f 是否 Riemann 可积或 Lebesgue 可积? 在可能情形下求它的积分.

(1) 当 $x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ 时, $f(x)=\sin x$; 当 $x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 时, $f(x)=x$.

(2) 当 $x\in K$ 时, $f(x)=x^2$; 当 x 在 O 的某个第 n 级构成区间时, $f(x)=2^{-n}$.

(3) 当 x 在 $K\cap E$ 中时, $f(x)=\cos x$(其中 E 是个非 Lebesgue 可测集); 当 x 是 [0,1] 中其它点时, $f(x)=x^4$.

(4) 当 x 在 K 中时, $f(x)=100$; 当 x 在 O 的构成区间 (a,b) 中时,

$$f(x)=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}-(x-\frac{a+b}{2})^2}.$$

练习 6 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足: $0<a<b<1$ 时, f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 证明 f 在 [0,1] 上几乎处处连续.

练习 7 设 [0,1] 上 Riemann 可积函数列 (f_n) 一致逼近 f, 证明 f 也 Riemann 可积且

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx=\int\limits_0^1 f(x)dx.$$

练习 8 设 f 是全 σ- 有限测度空间 (X,μ) 上有界非负可测函数. 设常数 $c>0$ 和 $a>-1$ 使 $t>0$ 时, $\mu(f>t)<ct^a$. 证明 f 可积.

练习 9 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可积函数并且在原点可导. 如果 $f(0)=0$, 证明函数 $g(x)=f(x)/x$ 是 Lebesgue 可积函数.

练习 10 设 f 是测度空间 (X,μ) 上只取正值的可测函数而 $0<\delta<1$. 证明有常数 c 使 $\mu(E)\geqslant\delta$ 的可测集 E 满足不等式: $\int\limits_E fd\mu\geqslant c$.

练习 11 对于有界函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. 以 a_{ni} 和 b_{ni} 分别记 f 在区间 $[(i-1)/n!,i/n!]$ 上的下确界与上确界. 定义 $[a,b]$ 上的阶梯函数的递增序列 (g_n) 和递减序列 (h_n) 使 $g_n(0)=h_n(0)=f(0)$ 且

$$\begin{aligned} g_n(x) &= a_{ni} : \\ h_n(x) &= b_{ni} : \end{aligned}\ \frac{i-1}{n!}<x\leqslant\frac{i}{n!}.$$

函数列 (g_n) 和 (h_n) 的极限分别记为 g 和 h. 证明 (1) 函数 f 是 Riemann 可积的当且仅当 (2)$g\doteq h$ 当且仅当 (3)f 几乎处处连续.

练习 12 设 f 是 $(0,+\infty)$ 上非负 Lebesgue 可积函数, 证明 $(0,+\infty)$ 上有非负 Lebesgue 可测函数 g 使 fg 可积且 $\lim\limits_{x\to0+}g(x)=+\infty$.

练习 13 设 (X,μ) 是全有限测度空间而 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是非负可测函数. 如果 $\delta>0$, 记 $E_n=(n\delta-\delta\leqslant f<n\delta)$ 和 $E=(f=+\infty)$, 证明

$$\begin{aligned} &\sum_{n\geqslant1}n\delta\mu(E_n)+(+\infty)\mu(E)-\delta\mu(X) \\ \leqslant&\int_X fd\mu\leqslant\sum_{n\geqslant1}n\delta\mu(E_n)+(+\infty)\mu(E). \end{aligned}$$

练习 14 将 $[0,1)$ 中数 x 写成 p- 进制标准小数 $0.a_1a_2\cdots$ 后, a_n 记成 $b_n(x)$. 试证明 $b_n:[0,1)\to\mathbb{R}$ 是右连续的 Borel 函数并求 $\int_0^1 b_n(x)dx$.

练习 15 设全限测度空间 (X,μ) 上可积函数列 (f_n) 一致收敛于 f, 证明 f 可积且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X|f_n-f|d\mu=0$.

练习 16 设 $f:X\to\mathbb{R}$ 是全限测度空间 (X,μ) 上非负可测函数, 证明

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i-1}{n}\mu(\frac{i-1}{n}\leqslant f<\frac{i}{n}) \\ =&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{n}\mu(\frac{i-1}{n}\leqslant f<\frac{i}{n})=\int_X fd\mu. \end{aligned}$$

练习 17 设 f 是有限测度空间 (X,μ) 上非负可测函数. 当 $\mathcal{D}$ 取遍 X 的由有限个可测集组成的可测划分时, 证明 $\sup\limits_{\mathcal{D}} L(f,\mathcal{D}) = \int\limits_X f d\mu$, 其中

$$L(f,\mathcal{D}) = \sum_{A\in\mathcal{D}} \inf f(A)\mu(A).$$

练习 18(积分第一均值定理) 设测度空间 (X,μ) 上函数 $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ 的积分存在. 设 $-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$ 使 $a\dot{\leqslant}f\dot{\leqslant}b$, 则

$$a\mu(X)\leqslant\int_X f d\mu\leqslant b\mu(X).$$

练习 19 试证明 $f: X\to\mathbb{C}$ 是一个子集 E 的特征函数当且仅当 $f^2=f$.

练习 20 设 f 是全 σ- 有限测度空间 (X,μ) 上复值可测函数使

$$\int_X f^i\overline{f^j}d\mu = 100 : i,j=1,2,\cdots,$$

证明 f 与一个可测集 E 的特征函数几乎处处相等.

§3.2 积分极限定理

称测度空间 X 上函数 g 是函数簇 $\{f_i|i\in I\}$ 的控制函数是指每个 $i\in I$ 使 $|f_i|\dot{\leqslant}g$.

定理 1(Lebesgue 控制收敛定理) 设测度空间 (X,μ) 上可测函数列 (f_n) 依测度收敛或几乎处处收敛于可测函数 f. 如果 $\{f_n\}$ 有个可积的控制函数 g, 则 f_n 与 f 都可积, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

例 1 因为 $n\ln(1+1/(n+nx^2))\leqslant 1/(1+x^2)$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} n\ln(1+\frac{1}{n(1+x^2)})dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}dx = \pi.$$

定理 1 中的控制可积函数不可省. 如实直线上函数列 $n/(n^2+x^2)$ 点态收敛于零, 但其积分序列极限不为 π. 其原因在于它没有控制可积函数.

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x/n)^n\sqrt[n]{x}}$. 为此将被积函数记为 f_n. 设 $n\geqslant 2$. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f_n(x)\leqslant 1/\sqrt{x}$. 当 $x\geqslant 1$ 时, $f_n(x)\leqslant 4/x^2$. 因此, 若记

$$g(x)=\{1/\sqrt{x}:0<x<1;4/x^2:x\geqslant 1\},$$

则 $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可积函数且是 $(f_n)_{n\geqslant 2}$ 的控制函数. 因为 (f_n) 点态收敛于 $\exp(-x)$, 从而所求极限是 1.

控制收敛定理有个简单推论 —**有界收敛定理**: 设全有限测度空间 (X,μ) 上可测函数列 (f_n) 依测度收敛或几乎处处收敛于可测函数 f. 如果有限非负实数 c 使每个 $|f_n|\leqslant c$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\mu(dx)=\int\limits_X f(x)\mu(dx).$$

例 3 据有界收敛定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{\pi}(\sin x)^n dx=\int\limits_0^{\pi}0dx=0.$

事实上, 控制收数定理也可作为有界收敛定理的推论.

定理 2(单调收敛定理, Levi 引理) 设 f_n 和 f 是测度空间 (X,μ) 上可测函数.

(1) 如果负部可积函数列 $(f_n:X\to\overline{\mathbb{R}})$ 递增至 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\mu(dx)=\int\limits_X f(x)\mu(dx).$$

(2) 如果正部可积函数列 (f_n) 递减至 f, 则上式成立.

例 4 用单调收敛定理求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{n}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx$. 请注意这时的积分区域不是固定的, 但我们可用特征函数将它变成固定区域上的积分:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{n}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\infty}\chi_{[0,n]}(x)(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}\chi_{[0,n]}(x)(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx=\int\limits_0^{\infty}e^{-x}dx=1.$$

单调收敛定理中的负部可积或正部可积可视为一种控制条件.

定理 3(Fatou 引理) 设 $(f_n : X \to \overline{\mathbb{R}})$ 是测度空间 (X,μ) 上可测函数列.

(1) 如果有个负部可积函数 g 使每个 $f_n \geqslant g$, 则

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx).$$

(2) 如果有个正部可积函数 g 使每个 $f_n \leqslant g$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) \leqslant \int_X \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)\mu(dx)..$$

可将 Fatou 引理简述为：上限上控；下限下控；双限双控． Fatou 引理中的不等号一般是不能改成等号的．如下式两边分别为 0 与 π:

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+x^2} dx < \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{n^2+x^2} dx.$$

定理 4 设 (f_n) 是测度空间 (X,μ) 上可测函数列使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |f_n| d\mu$ 可和，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 几乎处处可和于一个可积函数 f, 并且

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx).$$

以上诸定理 1 ~4 都互为推论，它们可以视为一个命题的 4 种等价陈述形式． Fatou 引理的主要应用是判断函数的可积性．这见下举例．

例 5 设可测函数列 (f_n) 几乎处处逼近可测函数 f. 如果 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \int\limits_X |f_n| d\mu < +\infty$, 则 f 可积．为此去个零集后可设 (f_n) 处处逼近 f. 据 Fatou 引理得

$$\int_X |f| d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_X |f_n| < +\infty.$$

这里用 Fatou 引理的理由在于 $|f_n| \geqslant 0$ 而函数 0 是可积的.

例 6 设 $a > 0$. 利用 §3.1 例 6 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \frac{(bx)^{2n}}{(2n)!} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\frac{b^2}{4a}).$$

于是可对级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-ax^2} \frac{(bx)^{2n}}{(2n)!}$ 逐项积分：

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-ax^2) \cos bx dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(-\frac{b^2}{4a}).$$

习 题

练习 1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^\infty \frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx$.

练习 2 用 Егоров 定理证明有界收敛定理.

练习 3 用有界收敛定理证明控制收敛定理与单调收敛定理.

练习 4 设非负可积函数列 $(f_n : X\to\mathbb{R})$ 依测度收敛于非负可积函数 $f: X\to\mathbb{R}$. 如果 $\lim\int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X |f_n - f| d\mu$.

练习 5 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 的 Lebesgue 积分为 10. 求证函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n^2x)$ 几乎处处收敛于一个可积函数 $g(x)$, 并求 g 的 Lebesgue 积分.

练习 6 设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测函数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^n dx = \mathbf{m}(f^{-1}(\mathbb{Z})).$$

练习 7 求 (1)$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ 和 (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^n (1-\frac{x}{n})^n \exp\frac{x}{2}dx$.

练习 8 设测度空间 (X,μ) 上可测函数列 (f_n) 恒满足 $\int\limits_X |f_n| d\mu \leqslant \frac{1}{n^2}$, 证明 (f_n) 几乎处处收数于 0.

练习 9 设 (E_n) 是概率空间 (X,μ) 中可测集列恒使 $\mu(E_n)\geqslant 0.2$. 设 (a_n) 是非负数列使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_{E_n}$ 几乎处处收敛, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

练习 10 设 l 是正整数, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b (\cos nx)^{2l} dx$.

练习 11 设 f 和 f_n 是全 σ- 有限测度空间 (X,μ) 上可积函数使对任何可测集 E, 数列 $(\int\limits_E f_n d\mu)_{n=1}^{\infty}$ 递增至 $\int\limits_E f d\mu$. 证明 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 几乎处处递增至 f.

练习 12 设 f 是测度空间 (X,μ) 上广义实值可测函数. 如果有 X 上可积函数 g 和可积函数 h 使 $g\dot{\leqslant} f\dot{\leqslant} h$, 证明 f 可积.

练习 13 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界函数. 对于 $[a,b]$ 的分点组

$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

命 M_i 和 m_i 分别是 f 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界和下确界并命

$$L=\sup_P\Big(L(P)=\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})\Big),$$

$$U=\inf_P\Big(U(P)=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})\Big).$$

分别称为 f 的 Darboux 下积分和上积分. 设 ω 是 f 的振幅函数

$$\omega(x)=\inf_{r>0}\sup\{|f(x_1)-f(x_2)|:|x_i-x|<r\},$$

证明 $\omega:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ 是非负 Borel 函数且

$$\int_a^b\omega(x)dx=U-L.$$

以此证明关于 Riemann 可积函数的 Lebesgue 定理.

练习 14 设 a 和 b 是实数. 当 $x>0$ 时, 命 $f(x)=x^a\sin x^b$.

(1) 求 a 和 b 的范围使 f 在 $(0,1]$ 上 Lebesgue 可知?

(2) 求 a 和 b 的范围使 f 在 $[1,+\infty)$ 上 Lebesgue 可积?

§3.3 重积分与累次积分

计算重积分 — 关于乘积测度的积分 — 需要用到累次积分. 这相当于在积分号下求积分, 它能把“多维”积分化为“一维”积分.

定理 1 设 $(X,\mathcal{R},\mu)$ 和 $(Y,\mathcal{S},\nu)$ 是 σ- 有限测度空间而 G 是乘积可测空间 $(X\times Y,\mathcal{R}\times\mathcal{S})$ 的可测集, 则 X 上函数 $x\mapsto\nu(G_x)$ 非负可测且 Y 上函数 $y\mapsto\mu(G^y)$ 非负可测使

$$\int_X\nu(G_x)\mu(dx)=\int_Y\mu(G^y)\nu(dy).$$

上式记为 $(\mu\times\nu)(G)$, 则 $\mu\times\nu$ 是 $\mathcal{R}\times\mathcal{S}$ 上唯一测度使每个可测矩形 $E\times F$ 的测度为 $\mu(E)\nu(F)$. 对换 $X\times Y\to Y\times X,(x,y)\mapsto(y,x)$ 是保测变换.

测度 $\mu\times\nu$ 是 σ- 有限的, 称为乘积测度. 需要注意的是完全测度的乘积测度不必完全. 如 n 维 Lebesgue 测度 $|\cdot|_n$ 它是完全的, 但

$$(\mathbb{R}^k,\mathcal{L}_k,|\cdot|_k)\times(\mathbb{R}^{n-k},\mathcal{L}_{n-k},|\cdot|_{n-k})\neq(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}_n,|\cdot|_n).$$

上式左端的乘积测度空间是不完全的. 这样高维 Lebesgue 可测函数的截口不一定是 Lebesgue 可测函数. 如果不考虑完全性, 对于 Borel 空间, 则有

$$(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}_k,|\cdot|_k)\times(\mathbb{R}^{n-k},\mathcal{B}_{n-k},|\cdot|_{n-k})=(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_n,|\cdot|_n).$$

因此高维 Borel 可测函数的截口仍然是 Borel 函数.

例 1(非负可测函数积分的几何意义) 设 f 是 X 上非负可测函数, 记

$$G=\{(x,y)|x\in X,0\leqslant y\leqslant f(x)\}.$$

这是 $X\times\overline{\mathbb{R}}$ 的可测集, 其乘积测度就是积分 $\int\limits_X fd\mu$. 事实上,

$$G=(X\times[0,+\infty])\cap\{(x,y)|y\leqslant f(x)\}.$$

据 §2.3 定理 1 知 G 可测, 其在 x- 截口是 $[0,f(x)]$. 用定理 1 即可.

定理 2(Tonelli) 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是 σ- 有限测度空间. 设 f 是乘积测度空间 $(X\times Y,\mu\times\nu)$ 上非负可测函数, 则

(1) 函数 $x\mapsto\int\limits_Y f(x,y)\nu(dy)$ 在 X 上非负可测.

(2) 函数 $y\mapsto\int\limits_X f(x,y)\mu(dx)$ 在 Y 上非负可测.

(3) $\int\limits_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int\limits_X d\mu\int\limits_Y fd\nu=\int\limits_Y d\nu\int\limits_X fd\mu.$

对于 $X\times Y$ 上一般可测函数 f, 形式地记 $g(x)=\int\limits_Y f(x,y)\nu(dy)$. 如果有 μ 的零集 X_0 使 g 在 $X\setminus X_0$ 上积分存在, 记

$$\int\limits_X\mu(dx)\int\limits_Y f(x,y)\nu(dy)=\int\limits_{X_0}g(x)\mu(dx),$$

这称为 f 的一个二次积分. 同样可以定义另一个二次积分 (若它存在):

$$\int\limits_Y\nu(dy)\int\limits_X f(x,y)\mu(dx)=\int\limits_{Y_0}h(y)\nu(dy),$$

其中形式地定义 $h(y)=\int\limits_X f(x,y)\mu(dx)$.

定理 3(Fubini) 乘积测度空间 $(X\times Y,\mu\times\nu)$ 上函数 f 的积分存在时,

$$\int\limits_{X\times Y} fd(\mu\times\nu)=\int\limits_X d\mu\int\limits_Y fd\nu=\int\limits_Y d\nu\int\limits_X fd\mu.$$

仅由可测函数 f 的两个二次积分有限且相等不能保证 f 关于乘积测度可积. 如设 $X=Y=[-1,1]$, 取 Lebesgue 测度. 作函数 $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ 使

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2},x^2+y^2\neq0,\\ 0,x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Borel 函数 $f: X\times Y\to\mathbb{R}$ 的两个二次积分都有限且相等:

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{-1}\frac{xy}{x^2+y^2}dx=0.$$

由于 f 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上不可积 (见下式), 因此它在 $X\times Y$ 上就不可积.

$$\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}dy=\int_{0}^{1}(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^2+1)})dx=+\infty.$$

注记 例 1 前的说明似乎表明 Tonelli 定理和 Fubini 定理不适用于 Lebesgue 积分. 但 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}_n,|\cdot|_n)$ 是 $(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}_k,|\cdot|_k)$ 与 $(\mathbb{R}^{n-k},\mathcal{B}_{n-k},|\cdot|_{n-k})$ 的乘积测度空间且 Lebesgue 可测函数本质上是 Borel 函数, 对 Lebesgue 积分仍可用 Tonelli 定理和 Fubini 定理.

若要计算乘积测度空间上任意可测集上函数的积分, 可考虑以下公式.

定理 4 设 G 是乘积测度空间 $(X\times Y,\mu\times\nu)$ 的可测集, 则 $\{x|\nu(G_x)>0\}$ 是 X 的可测集而 $\{y|\mu(G^y)>0\}$ 是 Y 的可测集. 当 f 在 G 上的积分存在时,

$$\begin{aligned}\int_G fd(\mu\times\nu)&=\int_{x:\nu(G_x)>0}\mu(dx)\int_{G_x}f(x,y)\nu(dy)\\&=\int_{y:\mu(G^y)>0}\nu(dx)\int_{G^y}f(x,y)\mu(dx).\end{aligned}$$

如设 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant r\}$, 这是平面上圆盘. 显然 D_x 不空当且仅当 $-r\leqslant x\leqslant r$. 此时 D_x 是区间 $[-\sqrt{r^2-x^2},\sqrt{r^2-x^2}]$. 而 $m(D_x)>0$ 当且仅当 $-r<x<r$. 因此关于 Lebesgue 测度

$$\int_D f(x,y)dxdy=\int_{-r}^{r}dx\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y)dy.$$

这与数学分析中的有关公式是一致的.

定理 5 设 X 和 Y 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空开集而 $f:X\to Y$ 连续可微. 如果 E 是 X 中 Lebesgue 可测集, 则 $f(E)$ 是 Lebesgue 可测集且

$$\mathbf{m}(f(E))\leqslant\int_E|\det f'(x)|\mathbf{m}(dx).$$

若 g 是 Y 上非负 Borel 函数, 则

$$\int_{f(X)}g(y)\mathbf{m}(dy)\leqslant\int_X g(f(x))|\det f'(x)|\mathbf{m}(dx).$$

上下定理中的 Jacobi 矩阵 $f'(x)=[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}]_{n\times n}$. 如果 f 可逆且 f 和 f^{-1} 都连续可微, 则称 f 为 C^1- 同胚.

定理 6 设 $f: X \to Y$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空开集之间的 C^1- 同胚，则 E 是 X 的 Lebesgue 可测集当且仅当 $f(E)$ 是 Y 的 Lebesgue 可测集. 此时

$$\mathbf{m}(f(E)) = \int_E |\det f'(x)|\mathbf{m}(dx).$$

当 g 是 Y 上的 Lebesgue 可测函数时，下式在一边有意义时成立：

$$\int_Y g(y)\mathbf{m}(dy) = \int_X g(f(x))|\det f'(x)|\mathbf{m}(dx).$$

以上定理的简单推论是 Lebesgue 积分的平移不变性：

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+u)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的极坐标是 $x = ry$, 其中 $r = |x|$ 而 y 在单位球面 S^{n-1} 上. 在 Borel 集代数 $\mathcal{B}(S^{n-1})$ 上有唯一测度 $\sigma_{n-1}(dy)$ 使

(1) 对于正交阵 τ 和 S^{n-1} 的 Borel 集 E, $\sigma_{n-1}(\tau(E)) = \sigma_{n-1}(E)$.

(2) $\sigma_{n-1}(S^{n-1}) = 2^{[0.5n+0.5]}\pi^{[0.5n]}n/n!!$, 其中 $[x]$ 表示取整数而

$$n!! = \begin{cases} 1\times 3\times\cdots\times n, n\text{是奇数}, \\ 2\times 4\times\cdots\times n, n\text{是偶数}. \end{cases}$$

当 $n=2$ 时，S^1 就是平面上的圆周，其上的测度 σ_1 就是它的弧长测度，它的总长度为 2π. 而 S^2 是三维空间中的单位球面，其面积为 4π.

以下是任意维数 Euclid 空间上的极坐标公式：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathbf{m}(dx) &= \int_{S^{n-1}} \sigma(dy)\int_0^\infty f(ry)r^{n-1}dr \\ &= \int_0^\infty r^{n-1}dr\int_{S^{n-1}} f(ry)\sigma(dy).\end{aligned}$$

在平面 $\mathbb{R}^2$ 的极坐标 $x = r\cos\theta$ 与 $y = r\sin\theta$ 下，

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^\infty g(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

在空间 $\mathbb{R}^3$ 的球坐标 $x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$ 下，

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^\infty f(x,y,z)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

定理 7 设 $f: X \to Y$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的开集之间的全纯映射. 如果 E 是 X 的 Lebesgue 可测集, 则 $f(E)$ 是 Y 的 Lebesgue 可测集且

$$\mathbf{m}(f(E)) \leqslant \int_E |\det f'(z)|^2 \mathbf{m}(dz).$$

此处 $f'(z) = [\frac{\partial f_i(z)}{\partial z_j}]_{n\times n}$. 当 g 是 $f(X)$ 上非负 Borel 函数时,

$$\int_{f(X)} g(w)\mathbf{m}(dw) \leqslant \int_X g(f(z))|\det f'(z)|^2 \mathbf{m}(dz).$$

如果 $f: X \to Y$ 还是 $\mathbb{C}^n$ 的开集之间的双全纯映射, 则 E 是 X 的 Lebesgue 可测集当且仅当 $f(E)$ 是 Y 的 Lebesgue 可测集, 此时

$$\mathbf{m}(f(E)) = \int_E |\det f'(z)|^2 \mathbf{m}(dz).$$

进而当 g 是 Y 上的 Lebesgue 可测函数时, 下式在一边有意义时成立:

$$\int_Y g(w)\mathbf{m}(dw) = \int_X g(f(z))|\det f'(z)|^2 \mathbf{m}(dz).$$

习 题

练习 1 证明平面子集 $E = \{(x,y)|xy \in \mathbb{Q}\}$ 是 Borel 集并求其 Lebesgue 测度.

练习 2 求平面子集 E 的 Lebesgue 测度, 其中

$$E = \{(x,y)|0 \leqslant x, y \leqslant 1 : \sin x < 1/2, \cos(x+y) \notin \mathbb{Q}\}.$$

练习 3 设 E 与 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel 集. 证明 $x \mapsto \mathbf{m}((E-x)\cap F)$ 是非负 Borel 函数并用 E 和 F 的 Lebesgue 测度表达积分 $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{m}((E-x)\cap F)dx$.

练习 4 设 (X,μ) 是概率空间而函数 $f: X \to [1,+\infty)$ 是可测函数, 证明

$$\int_X f d\mu \int_X \ln f d\mu \leqslant \int_X f \ln f d\mu.$$

练习 5 计算积分 $\int_{\mathbb{Z}_+} \mu(di) \int_{\mathbb{Z}_+} f(i,j)\mu(dj)$ 和 $\int_{\mathbb{Z}_+} \mu(dj) \int_{\mathbb{Z}_+} f(i,j)\mu(di)$. 其中 μ 是计数测度, 而 $f(i,i) = -2^{-i}; f(i,i+1) = 2^{-i}$, 在其余情形 $f(i,j) = 0$.

练习 6 设 $f(x)=x^3$. 试证明 f 将实直线上的 Lebesgue 可测集 (或 Lebesgue 零集) 映射成为 Lebesgue 可测集 (或 Lebesgue 零集).

练习 7 求积分 $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(-|x|^2)dx$, 其中 $|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$.

练习 8(Sard) 设 X 和 Y 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空开集而 $\phi: X\to Y$ 是连续可微, 证明 ϕ 将其临界点 (使 $\phi'(x)$ 不可逆的点 x) 全体 C 映为 Lebesgue 零集.

练习 9 设 D 为 Dirichlet 函数而 R 为 Riemann 函数, $Z=(0,1]\times(0,1]$, 求积分

$$\int\limits_{Z}(R(xy)+D(xy))dxdy.$$

练习 10 设 Y 是可测空间, 函数 $f:\mathbb{R}\times Y\to\mathbb{C}$ 使 $a\in\mathbb{R}$ 时截口 $f(a,\cdot)$ 是可测函数; $b\in Y$ 时截口 $f(\cdot,b)$ 是连续函数. 证明 f 是可测函数.

练习 11 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是全 σ- 有限测度空间而 $f: X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ 是可测函数. 设关于 μ 的几乎所有 $x\in X$ 使截口 $f(x,\cdot)$ 关于 ν 几乎处处有限, 试证明关于 ν 的几乎所有 $y\in\mathbb{R}$ 使截口 $f(\cdot,y)$ 关于 μ 几乎处处有限.

练习 12 判断以下函数在正方形 $(0,1]\times(0,1]$ 上是否可积

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

练习 13 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是概率空间而 E 是乘积测度空间 $(X\times Y,\mu\times\nu)$ 的可测集使 $\mu\{x\in X|\nu(E_x)\geqslant 0.5\}=1$, 证明 $\nu\{y\in Y|\mu(E^y)\geqslant 0.5\}>0$.

练习 14 全 σ- 有限测度空间 (X,μ) 上可测函数 f 的 分布函数$\lambda_f: t\mapsto \mu(|f|>t)$ 是正半轴上右连续的非负递减函数. 证明: 当 $0<p<+\infty$ 时,

$$\int\limits_X |f|^p d\mu=\int\limits_0^{\infty} p\lambda_f(t)t^{p-1}dt.$$

练习 15(祖暅 (Zu Geng, Tsu Keng) 原理 或Cavalieri 原理) 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是 σ- 有限测度空间. 如果 G 和 H 是 $(X\times Y,\mu\times\nu)$ 的可测集使 $\nu(G_x)=\nu(H_x)$ 对 [几乎] 所有 $x\in X$ 成立, 则 $(\mu\times\nu)(G)=(\mu\times\nu)(H)$.

练习 16 作计数测度空间 $(\mathbb{Z},2^{\mathbb{Z}},\mu)$ 和概率空间 $([0,1),\mathcal{B}[0,1),\mathbf{m})$, 证明

$$(\mathbb{Z},2^{\mathbb{Z}},\mu)\times([0,1),\mathcal{B}[0,1),\mathbf{m})\cong(\mathbb{R},\mathbf{B}_1,\mathbf{m}).$$

练习 17 作概率空间 $(X_i,\mathcal{S}_i,\mu_i)=(\{0,1\},2^{\{0,1\}},\mu_i)$ 使

$$\mu_i\{0\}=\mu_i\{1\}=0.5: i=1,2,\cdots$$

作乘积空间 $(X,\mathcal{S},\mu)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}(X_i,\mathcal{S}_i,\mu_i)$. 将 $\mathcal{S}$ 中成员称为 X 的 Borel 集.

(1) 对于 $x\in X$, 证明单点集 $\{x\}$ 是 Borel 集且 $\mu\{x\}=0$.

(2) 设 $\pi_i: X\to X_i$ 是向第 i 个分量的投影, 命

$$F=\{x\in X|\exists n\forall i\geqslant n:\pi_i(x)=1\}$$

及 $Y=X\setminus F$, 证明它们是 X 的 Borel 集且 $\mu(F)=0$.

(3) 对于 $x\in Y$, 作二进位标准小数 $f(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x_n}{2^n}$. 证明 $f:Y\to[0,1)$ 是 Borel 同构且当 G 为 $[0,1)$ 中 Borel 集时, $\mu f^{-1}(G)=\mathbf{m}(G)$.

§3.4 几个积分不等式

设 $0<p<+\infty$. 对于测度空间 (X,μ) 上可测函数 f, 命

$$\|f\|_p=(\int\limits_X|f(x)|^p\mu(dx))^{\frac{1}{p}}.$$

这称为 f 的 L^p- 模, 它有限时称 f 为 *p-方可积函数*. 如 $p>1$ 时, $[1,+\infty)$ 上函数 $g:x\mapsto 1/x$ 关于 Lebesgue 测度的 L^p- 模为 $\|g\|_p=(p-1)^{\frac{-1}{p}}$. 现命

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty&=\min\{a\in[0,+\infty]:|f|\dot{\leqslant}a\text{即}\mu(|f|>a)=0\}\\&=\min\{b_E=\sup_{x\in X\setminus E}|f(x)|:\mu(E)=0\},\end{aligned}$$

这称为 f 的 *本性最大模*, 它有限时称 f 为 *本性有界函数*.

例 1 设 $X=[0,1]\cup\{2\}$. 命 $f(2)=1$ 而当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 命 $f(x)=0$. 则 $f:X\to\mathbb{C}$ 是连续函数, 且 $\|f\|_\infty=0$ 而 $\sup\{|f(x)|:x\in X\}=1$.

可见即使 f 是连续函数, f 的本性最大模与其上确界也不一定相等.

性质 1 以下函数是测度空间 (X,μ) 上的可测函数.

(1) 非负性: $0\leqslant\|f\|_p$ 且此式等号成立当且仅当 $f\doteq 0$;

(2) 齐次性: 设 a 是复数, 则 $\|af\|_p=|a|\|f\|_p$.

(3)**Чебышев** 不等式: 设 $0<p<+\infty$, 则 $\varepsilon^p\mu(|f|\geqslant\varepsilon)\leqslant\|f\|_p^p$.

(4) 插值不等式: 设 $0<p_1<p<p_2\leqslant\infty$ 及 $\theta=\dfrac{p_1(p_2-p)}{p(p_2-p_1)}$, 则

$$\|f\|_p\leqslant\|f\|_{p_1}^{\theta}\|f\|_{p_2}^{1-\theta}\leqslant\max\{\|f\|_{p_1},\|f\|_{p_2}\}.$$

(5)**Hölder** 不等式：设 $0 < p, p_1, \cdots, p_n \leqslant +\infty$ 使 $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}$, 则

$$\|f_1 \cdots f_n\|_p \leqslant \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

在 p_i 与 $\|f_i\|_{p_i}$ 都有限时，上式为等式当且仅当

$$\left(\frac{|f_1|}{\|f_1\|_{p_1}}\right)^{p_1} \doteq \cdots \doteq \left(\frac{|f_n|}{\|f_n\|_{p_n}}\right)^{p_n}.$$

(6)**Minkowski** 不等式：设 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, 则

$$\|f_1 + f_2\|_p \leqslant \|f_1\|_p + \|f_2\|_p.$$

在 $p < +\infty$ 且 $\|f_i\|_p$ 都有限时，上式取等式当且仅当 $f_1/\|f_1\|_p \doteq f_2/\|f_2\|_p$.

(7)**Minkowski** 不等式：设 f 是全 σ- 有限乘积测度空间 $(X \times Y, \mu \times \nu)$ 上的可测函数而 $1 \leqslant p < +\infty$, 则 (积分的 L^p- 模不超过 L^p- 模的积分)

$$\Big(\int_X \Big(\int_Y |f(x,y)|\nu(dy)\Big)^p \mu(dx)\Big)^{1/p} \leqslant \int_Y \Big(\int_Y |f(x,y)|^p \mu(dx)\Big)^{1/p} \nu(dy).$$

这可简记为 $\|\int_Y |f(\cdot,y)|\nu(dy)\|_p \leqslant \int_Y \|f(\cdot,y)\|_p \nu(dy)$.

一般地，使 $1/p + 1/q = 1$(此时 $pq = p + q$) 的广义实数对 p 和 q 称为共轭数对. 如 $(2,2)$ 和 $(3,1.5)$ 是两对共轭数. 又 1 和 $+\infty$ 也是共轭数对.

定理 2 设 f 是测度空间 (X,μ) 上可测函数. 设 $1 < p < +\infty$ 而 q 是 p 的共轭数. 在 $0 < \|f\|_p < +\infty$ 情形，存在 g_0 使 $\|g_0\|_q = 1$ 且 $\|f\|_p = \int_X f g_0 d\mu$.

在 $(|f| > 0)$ 是 σ- 有限集情形，

$$\|f\|_p = \sup\{\|fg\|_1 : \|g\|_q \leqslant 1\}.$$

这表明 L^p- 模可用共轭配对还原出来. 此性质在泛函分析中有重要作用.

设 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, 测度空间 (X,μ) 上使 $\|f\|_p$ 有限的可测函数 f 全体记为 $L^p(X,\mu)$, 其中几乎处处相等的函数可视为一个函数.

定理 3 设 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. 对于 $L^p(X,\mu)$ 中序列 (f_n), 以下条件等价：

(1) 函数列 (f_n) 是基本序列： $\lim\limits_{n,l\to\infty} \|f_n - f_l\|_p = 0$.

(2) 有个 $f \in L^p(X,\mu)$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$(在 p 有限时，称 (f_n) 依 p 方平均收敛于 f. 在 p 无限时，称 (f_n) 几乎匀敛于 f).

(3) 在 $p = +\infty$ 时， (f_n) 在一个零集外一致逼近某个可测函数 f.

称 g 为 $\mathcal{R}$- 简单函数是指有环 $\mathcal{R}$ 有有限个成员 E_i 使 $g = \sum c_i \chi_{E_i}$.

定理 4 设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间而 $\mathcal{R}$ 是某些测度有限集组成的环使 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}^*$. 设 $1\leqslant p_1\leqslant p_2<+\infty$ 而 $0<\varepsilon<1$. 设 X 上函数 f 既 p_1 方可积又 p_2 方可积, 则有 $\mathcal{R}$- 简单函数 g 使

$$\max\{\|f-g\|_p : p_1\leqslant p\leqslant p_2\}<\varepsilon.$$

当 X 是 Lebesgue 可测集而 μ 是 Lebesgue 测度时, 有连续函数 h 使

$$\max\{\|f-h\|_p : p_1\leqslant p\leqslant p_2\}<\varepsilon.$$

当 Lebesgue 可测集 X 上取 Lebesgue 测度 m 时, $L^p(X,\mathbf{m})$ 简记为 $L^p(X)$. 对于 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 和 $u\in\mathbb{R}^n$, 以 $f(u+\cdot)$ 表示函数 $x\mapsto f(u+x)$.

定理 5(Lebesgue 积分的平均连续性) 设 $1\leqslant p<+\infty$ 而 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{v-u\to 0}\|f(u+\cdot)-f(v+\cdot)\|_p=0.$$

当 f 是 X 上的 p 方 Lebesgue 可积函数时, 可在 X 外补充定义 $f(x)=0$ 使 f 成为 $\mathbb{R}^n$ 上 p 方 Lebesgue 可积函数.

例 2 设 $\mathbb{R}$ 上函数 f 的 Lebesgue 积分存在, 则

$$\lim_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|\sin xy|f(y)dy=\frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}}f(y)dy.$$

(1) 当 g 是区间 $(a,b]$ 的特征函数时, 取 $(bx-ax)/\pi$ 的整数部分 k, 则

$$\frac{bx-\pi-ax}{\pi x}\leqslant\frac{k}{x}\leqslant\frac{bx-ax+\pi}{\pi x},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)|\sin xy|dy=\int_a^b|\sin xy|dy=\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}|\sin y|dy$$

$$=\int_{ax}^{ax+k\pi}\frac{|\sin y|}{x}dy+\int_{ax+k\pi}^{bx}\frac{|\sin y|}{x}dy=\frac{2k}{x}+J.$$

因为 $|J|\leqslant 2/x$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{x}=\dfrac{b-a}{\pi}$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}g(y)|\sin xy|dy=\int_{\mathbb{R}}g(y)dy.$$

(2) 当 g 是相对于 $\mathcal{R}_1$ 的简单函数时, 上式成立.

(3) 在 f 可积时, 记 $\varphi(f)=\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\left|\int_{\mathbb{R}}(|\sin xy|-\frac{2}{\pi})f(y)dy\right|$, 则

$$\varphi(f)\leqslant\varphi(f-g)+\varphi(g)\leqslant 2\|f-g\|_1.$$

据定理 4, 可使 $\|f-g\|_1$ 任意地小. 于是 $\varphi(f)=0$.

(4) 在 f 非负且积分为 $+\infty$ 时, 若 $|x|\leqslant n$ 且 $f(x)\leqslant n$, 命 $f_n(x)=f(x)$; 否则, $f_n(x)=0$. 于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)|\sin xy|dy \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)|\sin xy|dy.$$

对上式右边用可积情形的结论, 命 $x\to\infty$. 用单调收敛定理, 命 $n\to\infty$ 得

$$\varliminf_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)|\sin xy|dy \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy=+\infty.$$

(5) 在 f 的积分为 $+\infty$ 时, 对 f_+ 与 f_- 分别用 (4) 和 (3) 即可.

为讨论偏导数, 下面设 e_i 是第 i 位是 1 其它位为 0 的 n 维向量.

定理 6 设 $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 是 Borel 函数使 $g=\partial_i f$.

(1) 设 $1\leqslant p<+\infty$ 使 f 和 g 都 p 方可积, 则 g 是 f 的 L^p-偏导数:

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(\cdot+te_i)-f(\cdot)}{t}-g(\cdot)\right\|_p=0.$$

(2) 设 g 关于第 i 个变量一致连续, 则 g 是 f 的 L^∞-偏导数:

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(\cdot+te_i)-f(\cdot)}{t}-g(\cdot)\right\|_\infty=0.$$

当 f 与 g 都连续且 g 是 f 的 L^∞- 偏导数时, g 也是 f 的常规意义下的导数. 归纳地可定义高阶 L^p- 偏导数 $\partial^\beta f$, 其中 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$.

定理 7(Jensen 不等式) 设 (X,μ) 是概率空间而 Y 和 Z 是 $\mathbb{R}$ 中区间. 设可测函数 $f:X\to Y$ 与连续上凸函数 $\psi:Y\to Z$ 使 f 与 ψf 的积分存在, 则

$$\psi\Big(\int_X f(x)\mu(dx)\Big)\leqslant\int_X \psi(f(x))\mu(dx).$$

注意到级数是计数测度空间上的积分, Hölder 不等式有以下级数形式:

$$\sum|x_iy_i|\leqslant\Big(\sum|x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum|y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

读者不难写出定理 3 的级数形式. 同样 Minkowski 不等式有以下级数形式:

$$\Big(\sum|x_i+y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant\Big(\sum|x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum|y_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 8 p 方可积函数列 $(f_n:X\to\mathbb{C})$ 依 p 方平均收敛当且仅当

(1) 对于 $\varepsilon>0$, 存在测度有限集 E 使每个 $\|f_n\chi_{X\setminus E}\|_p<\varepsilon$;

(2) 对于 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使 $\mu(F)<\delta$ 时恒有 $\|f_n\chi_F\|_p<\varepsilon$;

(3) 对于 $\varepsilon>0$ 和测度有限集 E, 有 $\lim\limits_{n,l\to\infty}\mu(E(|f_n-f_l|\geqslant\varepsilon))=0$.

这三条依次称为等度正则性, 等度连续性, 依有限测度收敛性.

习 题

练习 1 在 $\mathbb{Z}$ 上取一维 Lebesgue 测度，求其上函数 f 的本性上确界.

练习 2 设 f 是全有限测度空间上可测函数，证明 $\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

练习 3 设 $a<b$, 证明没有严格递增正整数列 (k_n) 使函数列 $(\cos k_n x)_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 0.

练习 4 设概率空间 (X,μ) 上可测函数 f 满足 $0.1<|f|<10$, 证明

$$\lim_{p\to 0+}(\int\limits_X |f|^p)^{1/p}=\exp(\int\limits_X \ln|f|d\mu).$$

练习 5 设 f 是概率空间上可测函数，证明 $\|f\|_1\leqslant\|f\|_2\leqslant\|f\|_3\cdots$.

练习 6 证明：对于概率空间上可测函数 $f:X\to(0,+\infty)$ 成立

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx)\int\limits_X\frac{\mu(dx)}{f(x)}\geqslant 1.$$

练习 7 设 $1\leqslant p<+\infty$ 且 $(f_n:[a,b]\to\mathbb{C})$ 是 p 方可积函数列使 $\lim\|f_n-f\|_p=0$, 证明 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$\lim\int\limits_a^x f_n(t)dt=\int\limits_a^x f(t)dt$.

练习 8(Schur) 设 (X,μ) 与 (Y,ν) 是全 σ- 有限测度空间而 $1\leqslant p\leqslant+\infty$. 设有非负实数 c 使非负可测函数 $K:X\times Y\to\mathbb{R}$ 满足

$$\int\limits_X K(x,y)\mu(dx)\leqslant c:y\in Y,$$

$$\int\limits_Y K(x,y)\nu(dy)\leqslant c:x\in X.$$

对于 X 上非负可测函数 f, 如下定义的 g 满足 $\|g\|_p\leqslant c\|f\|_p$.

$$g(y)=\int\limits_Y f(x)K(x,y)\mu(dx):y\in Y.$$

练习 9(Schur) 设 (X,μ) 是全 σ- 有限测度空间. 设 $1<p,q<+\infty$ 是一对共轭数. 设 A 是 $X\times Y$ 上非负可测函数而 h 是 X 上可测函数使 $0<h<+\infty$ 且

$$\int\limits_X A(x,y)h(y)^q\mu(dy)\leqslant\beta^q h^q(x):x\in X,$$

$$\int\limits_X h(x)^p A(x,y)\mu(dx)\leqslant\gamma^p h^p(y):y\in X.$$

设 f 是 X 上非负可测函数，则以下定义的 g 满足 $\|g\|_p\leqslant\beta\gamma\|f\|_p$:

$$g(x)=\int\limits_X A(x,y)f(y)\mu(dy).$$

练习 10 设 (E_n) 是全 σ- 有限测度空间 (X,μ) 中测度有限集列而 f 是 X 上可测函数使 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X |\chi_{E_n}-f|d\mu=0$, 证明有个测度有限集 E 使 $f\doteq\chi_E$.

练习 11 设全限测度空间 (X,μ) 上非负可积函数列 (f_n) 依测度逼近非负可积函数 f, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu=\int\limits_X f d\mu$ 当且仅当 $\varepsilon>0$ 时, 存在 $\delta>0$ 使对正整数 n 和对满足 $\mu(E)<\delta$ 的可测集 E, 有 $\int\limits_E f_n d\mu<\varepsilon$.

练习 12 设 f_n 和 g_n 是有限测度空间 (X,μ) 上可积函数使 $|f_n|\leqslant g_n$. 如果 (f_n) 逐点逼近 f 而 (g_n) 逐点逼近可积函数 g 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X g_n d\mu=\int\limits_X g_0 d\mu$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu=\int\limits_X f_0\mu$.

练习 13 设 f 是概率空间 (X,μ) 上可测函数使 $0<\|f\|_\infty<+\infty$, 证明

$$\lim_{p\to\infty}(\|f\|_{p+1}^{p+1}\div\|f\|_p^p)=\|f\|_\infty.$$

练习 14(反向 Hölder 不等式) 设 $0<p<1$ 而 q 是 p 的共轭数. 设 g 几乎处处非零且 $0<\|g\|_q<+\infty$, 证明 $\|fg\|_1\geqslant\|f\|_p\|g\|_q$.

练习 15(反向 Minkowski 不等式) 设 $0<p<1$ 而 f_i 非负可测, 证明

$$\|f_1\|_p+\|f_2\|_p\leqslant\|f_1+f_2\|_p.$$

练习 16(推广的 Чебышев 不等式) 设 f 是测度空间 (X,μ) 上可测函数, 设 $\psi:[0,+\infty]\to[0,+\infty]$ 是递增函数而 $\varepsilon>0$, 证明

$$\psi(\varepsilon)\mu(|f|\geqslant\varepsilon)\leqslant\int\limits_X\psi(|f(x)|)\mu(dx).$$

练习 17(Clarkson 不等式) 设 $1<p\leqslant 2$ 而 q 是 p 的共轭数, 证明

(1) $g,h\in L^p$ 时, $(\|g+h\|_p^q+\|g-h\|_p^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^{\frac{1}{q}}(\|g\|_p^p+\|h\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$.

(2) $g,h\in L^p$ 时, $(\|g+h\|_p^p+\|g-h\|_p^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant 2^{\frac{1}{q}}(\|g\|_p^p+\|h\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$.

(3) $g,h\in L^q$ 时, $(\|g+h\|_q^p+\|g-h\|_q^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant 2^{\frac{1}{p}}(\|g\|_q^q+\|h\|_q^q)^{\frac{1}{q}}$.

(4) $g,h\in L^q$ 时, $(\|g+h\|_q^q+\|g-h\|_q^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^{\frac{1}{p}}(\|g\|_q^q+\|h\|_q^q)^{\frac{1}{q}}$.

练习 18 设 $X_i : i \in J$ 是一簇相互不交的非空集合, $\mathcal{S}_i : i \in J$ 是 X_i 上 σ-环而 μ_i 是 $\mathcal{S}_i$ 上测度. 命 $X = \bigsqcup_{i \in J} X_i$ 及

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{\bigsqcup_{i\in J} A_i | \forall i \in J : A_i \in \mathcal{S}_i; \{i|A_i \neq \varnothing\}\text{是可数集}\} \\ &= \{E \subseteq X | \forall i \in J : E \cap X_i \in \mathcal{S}_i; \{i|E \cap X_i \neq \varnothing\}\text{是可数集}\}.\end{aligned}$$

证明: (1) $\mathcal{S}$ 是 X 上 σ- 环, 它是代数当且仅当 J 是可数集且 $\mathcal{S}_i$ 都是代数.

(2) $\mathcal{S}$ 上有个测度 μ 使 $\mu(E) = \sum_{i \in J} \mu_i(E \cap X_i)$, 它是 σ- 有限的当且仅当每个 μ_i 是 σ- 有限的.

(3) 当 J 可数时, $f : X \to \mathbb{C}$ 可测当且仅当每个 $f_i = f|_{X_i}$ 可测. 此时

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p &= \sum(\|f_i\|_p^p : i \in J) : 1 \leqslant p < +\infty, \\ \|f\|_\infty &= \sup(\|f_i\|_\infty : i \in J).\end{aligned}$$

* **练习 19** 设 (X, μ) 是概率空间使所有可测函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 都可积, 证明 f 本性有界. 进而, f 与某个简单函数几乎处处相等.

练习 20 设 f 是测度空间 (X, μ) 上可测函数.

(1) 构造可测函数 h 使 $\|h\|_\infty \leqslant 1$ 且 $\|f\|_1 = \int fhd\mu$.

(2) 在 $(|f| > 0)$ 是 σ- 有限集情形, $\|f\|_\infty = \sup\{|\int fg| : \|g\|_1 \leqslant 1\}$.

练习 21 用插值不等式证明使 $p \mapsto \|f\|_p$ 有限的 p 全体是个 (可能空的) 区间.

§3.5 含参变量的积分

对于 $X \times Y$ 上函数 h, 形式地记 $f(x) = \int\limits_Y h(x, y)\nu(dy)$. 它有意义时称为含参变量积分.

定理 1(积分号下求极限) 设 X 是 Euclid 空间的一个点集, (Y, ν) 是全 σ- 有限测度空间. 函数 $h : X \times Y \to \mathbb{C}$ 满足以下条件:

(1) 对于所有 $x \in X$, 截口 $h(x, \cdot) : Y \to \mathbb{C}$ 是可测函数,

(2) 函数族 $\{h(x, \cdot)|x \in X\}$ 有个控制可积函数 $g : Y \to \mathbb{R}$,

(3) 使 $\lim\limits_{x \to x_0} h(x, y) = h(x_0, y)$ 不成立的 y 全体是个零集,

则 f 在 x_0 连续: $\lim\limits_{x \to x_0} \int\limits_Y h(x, y) = \int\limits_X h(x_0, y)\nu(dy)$.

以后用 $\partial^\beta f$ 表示混合偏导数 $\partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n} f$, 其中 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 的每个分量 β_i 都是非负整数. 约定 $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$ 而 $\beta! = \beta_1! \cdots \beta_n!$. 无限可

微的函数也称为光滑函数. 约定 $\alpha \leqslant \beta$ 表示诸分量 $\alpha_i \leqslant \beta_i$, 回顾一下 Leibniz 公式: 设 f,g 都 k 阶连续可微, 则 $|\beta| \leqslant k$ 时

$$\partial^\beta(fg) = \sum_{\alpha \leqslant \beta} \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!} \partial^\alpha f \partial^{\beta-\alpha} g.$$

定理 2(积分号下求导数) 设函数 $h:(a,b)\times Y \to \mathbb{C}$ 满足以下条件

(1) 所有 $x \in (a,b)$ 使函数 $y \mapsto h(x,y)$ 在 Y 上可积,

(2) 函数族 $\{y \mapsto \dfrac{h(x,y)-h(x_0,y)}{x-x_0} | x \neq x_0\}$ 有个控制可积函数,

(3) 几乎所有 $y \in Y$ 使偏导数 $(\partial_x h)(x_0,y)$ 存在,

则 f 在 x_0 可导且 $f'(x_0) = \int\limits_Y \partial_x h(x_0,y)\nu(dy)$.

设 $g,h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是 Borel 函数, 形式地作卷积

$$(g*h)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y)h(y)dy.$$

性质 3 设 $1 \leqslant p,q,r \leqslant +\infty$ 使 $1/r = 1/p + 1/q - 1$. 设 $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 及 $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 则成立 Young 不等式 $\|g*h\|_r \leqslant \|g\|_p\|h\|_q$.

(1) 在 p 有限且 q 是 p 的共轭数时, $g*h$ 有界且一致连续. 进而

$$|g*h(x) - g*h(y)| \leqslant \|g(x+\cdot) - g(y+\cdot)\|_p\|h\|_q.$$

(2) 若 s 是 r 的共轭数且 $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(g*h)(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x+y)g(x)h(y)dxdy.$$

(4) 结合律: $(g*f)*h = g*(f*h)$.

(5) 交换律: $g*h = h*g$.

(6) 分配律: $f*(g+h) = f*g + f*h$.

(7) 如果 g 有 L^p- 偏导数 $\partial_i g$, 则在 L^r- 意义下 $\partial_i(g*h) = (\partial_i g)*h$.

尽管卷积类似于数的乘法, 但它没有单位. 然而据以下定理知它有近似单位.

定理 4 设非负 Borel 函数 $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的 Lebesgue 积分为 1. 当 $r>0$ 且 $x \in \mathbb{R}^n$ 时, 命 $\varphi_r(x) = \dfrac{1}{r^n}\varphi(\dfrac{x}{r})$. 对于函数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

(1) 若 f 有界且 (一致) 连续, 则 $r \to 0$ 时 $f*\varphi_r$(一致) 逼近 f.

(2) 若 $1 \leqslant p < +\infty$ 且 f 为 p 方可积, 则 $\lim\limits_{r\to 0}\|f*\varphi_r - f\|_p = 0$.

(3) 若 $|y|>1$ 时 $\varphi(y)=0$, 则 $f*\varphi_r(x) = \int\limits_{|z|\leqslant 1} f(x-rz)\varphi(z)dz$.

这表明 $(\varphi_r)_{r>0}$ 是卷积的近似单位. 以后常用光滑近似单位.

例 1 当 $|x| \geqslant 1$ 时，命 $\varphi(x) = 0$; 当 $|x| < 1$ 时，命

$$\varphi(x) = c\exp(-\frac{1}{1-|x|^2}),$$

其中常数 $c > 0$ 使 $\int \varphi(x)dx = 1$. 据数学分析知 φ 是光滑函数. 函数 φ_r 的所有偏导数 $\partial^\alpha \varphi_r$ 都是其 L^q- 偏导数，其中 $1 \leqslant q \leqslant +\infty$.

对于 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 作其数量积 $x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是 Lebesgue 可积函数，作 f 的 *Fourier* 变换 $\hat{f}$ 与 *Fourier* 逆变换 $\tilde{f}$ 如下

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi\sqrt{-1}x \cdot y)f(y)dy,$$

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(2\pi\sqrt{-1}x \cdot y)f(y)dy.$$

例 2 当 $r > 0$ 时，命 $\varphi_r(x) = \exp(-\pi|x/r|^2)/r^n$. 据 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi_r}(x) =& \frac{1}{r^n}\prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{y_j^2}{r^2} - 2\pi\sqrt{-1}x_jy_j)dy_j \\ =& \exp(-\pi r^2|x|^2) = \varphi_{1/r}(x)/r^n \text{ (此据 §3.2 例 6)}.\end{aligned}$$

同样 $\widetilde{\varphi_r}(x) = \varphi_{1/r}(x)/r^n$. 请注意，$(\varphi_r)_{r>0}$ 是卷积的近似单位.

上例的方法可引出一个公式：当 $g(x) = g_1(x_1)\cdots g_n(x_n)$ 时，g 的 Fourier 变换可用分离变量法求：$\hat{g}(x) = \hat{g_1}(x_1)\cdots\hat{g_n}(x_n)$.

性质 5 设 $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 是 Lebesgue 可积函数.

(1) $\tilde{f}(x) = \hat{f}(-x)$, $\tilde{\tilde{f}} = \overline{\hat{\bar{f}}}$ 及 $\hat{\tilde{f}} = \overline{\tilde{\bar{f}}}$.

(2) $\hat{f}$ 与 $\tilde{f}$ 是一致连续函数且 $|\hat{f}|, |\tilde{f}| \leqslant \|f\|_1$.

(3) $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$(因此，Fourier 变换将卷积化为乘积).

(4) $f * \tilde{g} = \widetilde{\hat{f}g}$, $\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$ 且 $\int \tilde{f}g = \int f\tilde{g}$.

(5) k 是正整数使 $x \mapsto |x|^k f(x)$ 可积，则 $|\alpha| \leqslant k$ 时 $\xi^\alpha f$ 可积并且

$$\partial^\alpha F_\pm f = (\pm 2\pi\sqrt{-1})^{|\alpha|}F_\pm \xi^\alpha f,$$

其中约定 $(\xi^\alpha f)(x) = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}f(x)$.

(6) $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 时，$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|\tilde{f}\|_2$.

(7) $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 时，$\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle = \langle f, g\rangle$, 其中

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx.$$

有些书定义 Fourier(逆) 变换不用 2π 因子，此时应将以上 (6) 与 (7) 中的等式右边分别乘上 $\sqrt{(2\pi)^n}$ 与 $(2\pi)^n$.

定理 6(Fourier 变换的反演) Lebesgue 可积函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 也 Lebesgue 可积当且仅其 Fourier 逆变换 $\tilde{f}$ 也 Lebesgue 可积. 此时

$$f(x)\doteq\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)\hat{f}(y)dy.$$

$$f(x)\doteq\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)\tilde{f}(y)dy.$$

这即 $f\doteq\tilde{\hat{f}}=\hat{\tilde{f}}$. 此式在 f 连续时恒为等式.

这说明了称 $\tilde{f}$ 为 Fourier 逆变换的理由.

定理 7(Riemann-Lebesgue 引理) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 是 Lebesgue 可积函数, 则

$$\lim_{|x|\to\infty}\hat{f}(x)=\lim_{|x|\to\infty}\tilde{f}(x)=0.$$

习 题

练习 1 称函数 $g:\Omega\to\mathbb{C}$ 是紧支撑的是指有紧集 L 使

$$(g\neq0)\subseteq L\subseteq\Omega.$$

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集而 $1\leqslant p_1\leqslant p\leqslant p_2<+\infty$.

(1) 设 U 是 Ω 的开集而 K 是非空紧集使 $K\subset U$, 则有紧支撑的光滑函数 $g:\Omega\to\mathbb{C}$ 使 $\chi_K\leqslant g\leqslant\chi_U$.

(2) 若 $f\in L^{p_1}(\Omega)\cap L^{p_2}(\Omega)$, 则有紧支撑的光滑函数 g 使

$$\|f-g\|_p<\varepsilon:p_1\leqslant p\leqslant p_2.$$

(3) 设 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 局部 p 方可积: A 取遍 Ω 中紧集时,

$$\|f\|_{p,A}=(\int\limits_A|f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

当 r(与 A 有关地) 足够小时, $f*\varphi_r$ 有意义且 $\lim\limits_{r\to0}\|f*\varphi_r-f\|_{p,A}=0$.

练习 2 命 $g(x)=f(x+u)$, 证明 $\hat{g}(x)=\exp(2\pi\sqrt{-1}u\cdot x)\hat{f}(x)$.

练习 3 设 $\tau:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是可逆线性变换, 证明 $\widehat{f\circ\tau^{-1}}=|\det\tau|\hat{f}\circ\tau^{\mathrm{T}}$.

练习 4 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是 Lebesgue 可积函数且 $c>0$, 证明 $(\dfrac{f(n\cdot)}{n^c})_{n=1}^\infty$ 几乎处处逼近 0.

练习 5 设 E 和 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中 Lebesgue 可测集使 $E+F\subseteq G$.

(1) 当 E 和 F 都非 Lebesgue 零集时，证明 G 包含一个非空开集 U.

(2) 当 E 和 F 都是 Lebesgue 零集时， G 也可能包含一个非空开集.

练习 6 设 $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是周期为 T 的有界可测函数使 $\int\limits_0^T\psi(x)dx=I$, 证明对任何 Lebesgue 可积函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 成立

$$\lim_{x\to+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\psi(xy)f(y)dy=\frac{I}{T}\int\limits_{\mathbb{R}}f(y)dy.$$

以此结论证明 §3.4 例 2 和 §3.5 中 1 维情形的 Riemann-Lebesgue 引理.

练习 7 试证明没有 Lebesgue 可积函数 $e:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 使 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 为紧支撑的光滑函数时， $e*f=f$.

练习 8 设 f 与 g 分别是一维区间 $(a,b]$ 与 $(r,s]$ 的特征函数. 求它们的 Fourier 变换并直接证明

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}}f(x)\overline{g(x)}dx.$$

练习 9 当 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 可测集且 $f:X\to\mathbb{C}$ 是 Lebesgue 可积函数时，证明

$$\lim_{|x|\to\infty}\int\limits_X\begin{pmatrix}\cos(x\cdot y)f(y)\\ \sin(x\cdot y)f(y)\end{pmatrix}\mathbf{m}(dy)=0.$$

练习 10 设 $(X_i,\mathcal{S}_i,\mu_i):i=1,\cdots,n$ 是全 σ- 有限测度空间， $\mathcal{R}_i$ 是 $\mathcal{S}_i$ 的子环使 $\mathcal{S}_i\subseteq\mathcal{R}_i^*$. 设 $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1*\cdots*\mathcal{R}_n$, 设 $1\leqslant p_1\leqslant p_2<+\infty$.

如果 $f:X_1\times\cdots\times X_n\to\mathbb{C}$ 是 p_1 方可积的又是 p_2 方可积的，则有简单函数 $g=\sum a_i\chi_{E_i}$ 使 E_i 都是 $\mathcal{R}$ 的成员且

$$\max\{\|f-g\|_p:p_1\leqslant p\leqslant p_2\}<\varepsilon.$$

练习 11 用 1 维情形的 Riemann-Lebesgue 引理证明多维情形的 Riemann-Lebesgue 引理.

第 4 章

微分与不定积分

在 Riemann 积分的范畴中，一些函数可用其导函数的不定积分表达．本章的主要内容是先将这种想法推广至 Lebesgue 积分的范畴中，然后讨论一般测度的不定积分问题．

§4.1 有界变差函数

对于 $[a,b]$ 的分点组 $P: a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 函数 $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ 关于 P 的 *变差* $V(f,P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1}) - f(x_i)|$.

全变差与其性质 当 P 取遍 $[a,b]$ 的分点组时，得 f 的 *全变差* 如下：

$$\bigvee_a^b f = \sup_P V(f,P) = \varlimsup_{\delta_P \to 0} V(f,P).$$

如设 f 是递增函数，则 $\bigvee_a^b f = V(f,P) = f(b) - f(a)$.

(1) 非负性： $\bigvee_a^b f \geqslant 0$. 它为零当且仅当 f 是常数函数.

(2) 齐次性： $\bigvee_a^b (\gamma f) = |\gamma| \bigvee_a^b f$, 其中 γ 为复数.

(3) 次可加性： $\bigvee_a^b (f+g) \leqslant \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$.

(4) 次可减性：在全变差有限的情形下， $|\bigvee_a^b f - \bigvee_a^b g| \leqslant \bigvee_a^b (f-g)$.

(5) $\max\{\bigvee_a^b \operatorname{re} f, \bigvee_a^b \operatorname{im} f, \bigvee_a^b |f|\} \leqslant \bigvee_a^b f = \bigvee_a^b \overline{f}$.

(6) 若 f 在 (a,b) 内是常数，则 $\bigvee_a^b f = |f(a+) - f(a)| + |f(b) - f(b-)|$.

(7) 下半连续性：如果 (f_i) 点态逼近 f, 则 $\bigvee_a^b f \leqslant \varliminf_i \bigvee_a^b f_i$.

(8) 对区间的可加性：若 $a < c < b$, 则 $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$.

(9) 记 $\|f\| = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$, 则

$$\bigvee_a^b (f_1 f_2) \leqslant \|f_1\| \bigvee_a^b f_2 + \|f_2\| \bigvee_a^b f_1.$$

(10) 若有正数 c 使 $|f| \geqslant c$, 则 $\bigvee_a^b(1/f) \leqslant (\bigvee_a^b f)/c^2$.

(11) 当 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续时, $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^b \exp(\sqrt{-1}f)$.

若将 f 视为复平面上一条参数曲线, 则 $\bigvee\limits_a^b f$ 为其长度. 以上 (11) 表明落于实轴上的连续曲线 f 与落于单位圆周的曲线 $\exp(\sqrt{-1}f)$ 是等长的.

例 1 命 $f(t)=\exp(\sqrt{-1}t)$, 据 (11) 得 $\bigvee_0^{2\pi} f = 2\pi$. 这是单位圆周的长度.

任意区间 X 上函数 $g:X\to\mathbb{C}$ 的全变差 $\bigvee\limits_X g = \sup\{\bigvee\limits_s^t g|[s,t]\subseteq X\}$. 当 X 分别是 $(a,b),(a,b],[a,b)$ 时, 这可分别记为 $\bigvee\limits_{a+}^{b-} g, \bigvee\limits_{a+}^{b} g, \bigvee\limits_{a}^{b-} g$. 同样规定 g 的全变差函数 $\bigvee g$ 使其在 a 的值为 0 而在 b 的值为 g 的全变差.

有界变差函数 全变差有限的函数 f 称为*有界变差函数*. 相应的递增函数 $\bigvee f: x\mapsto \bigvee_a^x f$ 称为 f 的*全变差函数*.

(1) 有界变差函数是有界 Borel 函数.

(2) 函数有界变差当且仅当其实部与虚部有界变差.

(3) 有界变差函数的共轭与模都有界变差.

(4) 有界变差函数的线性组合与点态乘积都是有界变差函数.

(5) 有界变差函数的不连续点都是第一类的且它们有可数个.

(6) 有界变差函数与其全变差函数有相同的左连续点和右连续点.

(7) 有界变差函数不必连续. 连续函数不必有界变差.

有界变差函数的大多数性质可从考察单调函数而得到, 这基于以下定理.

定理 1(Jordan 分解) 设 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是有界变差函数, 则有唯一一对递增函数 $v_\pm$ 使 $g=g(a)+v_+-v_-$ 且 $\bigvee g = v_+ + v_-$.

以上分解中的 $v_\pm$ 称为 g 的正负变差函数, 它们由下式确立:

$$v_\pm(x) = \frac{(\bigvee g)(x) \pm (g(x)-g(a))}{2}.$$

例 2 设 D 是 $\mathbb{R}$ 的可列子集而 $\sum\limits_{r\in D}(|\alpha_r|+|\beta_r|)<+\infty$. 作*跳跃函数*

$$f(x) = \sum_{r\in D}(\alpha_r\theta(x-r)+\beta_r\theta_1(x-r)).$$

(1) 不在 D 中的实数 x_0 是 f 的连续点. 为此将上式中第 r 项记为 $g_r(x)$, 它在 x_0 连续. 级数 $\sum\limits_{r\in D} g_r$ 一致逼近 f. 于是 f 在 x_0 连续.

(2) 函数 f 在 r 的左方跳跃度 $f(r)-f(r-)=\alpha_r$, 而其在 r 的右方跳跃度 $f(r+)-f(r)=\beta_r$. 事实上，据 (1) 知跳跃函数 $f-g_r$ 在 r 连续. 于是 f 与 g_r 在 r 有相同的左右方跳跃度.

(3) 若 f 在 (c,d) 内连续，则它在 (c,d) 内是常数：当 $c<x<d$ 时，

$$f(x)=\sum_{r\in D:r\leqslant c}\alpha_r+\sum_{r\in D:r<c}\beta_r.$$

(4) 跳跃函数 f 在 $[a,b]$ 上的全变差

$$\bigvee_a^b f=\sum_{r\in D}(|\beta_r|\chi_{[a,b)}(r)+|\alpha_i|\chi_{(a,b]}(r)).$$

为此取递增至 D 的有限集序列 (D_n) 并命 $f_n=\sum\limits_{r\in D_n}g_r$, 则 f_n 在 (a,b) 内的不连续点与区间端点形成一个分点组 $y_0,\cdots,y_l$, 则 f_n 在 (y_{i-1},y_i) 内是常数. 至多有一个 $r\in D_n$ 使 $y_{i-1}\leqslant r<y_i$ 且至多有一个 $s\in D$ 使 $y_{i-1}<s\leqslant y_i$, 于是

$$\begin{aligned}\bigvee_a^b f_n&=\sum_{i=1}^n|f_n(y_{i-1}+)-f_n(y_{i-1})|+|f_n(y_i)-f_n(y_i-)|\\&=\sum_{i=1}^n(\sum_{r\in D_n}|\beta_r|\chi_{[y_{i-1},y_i)}(r)+\sum_{r\in D_n}|\alpha_r|\chi_{(y_{i-1},y_i]}(r))\\&=\sum_{r\in D_n}(|\alpha_r|\chi_{(a,b]}(r)+|\beta_r|\chi_{[a,b)}(r)).\end{aligned}$$

因为 (f_n) 一致逼近 f, 据全变差的下半连续性 $(\bigvee_a^b f\leqslant\underline{\lim}\bigvee_a^b f_n)$ 知

$$\bigvee_a^b f\leqslant\sum_{r\in D}(|\alpha_r|\chi_{(a,b]}(r)+|\beta_r|\chi_{[a,b)}(r)).$$

将上式中 f 换为跳跃函数 $f-f_n$ 且将对应的 D 换为 $D\setminus D_n$ 得

$$\begin{aligned}|\bigvee_a^b f-\bigvee_a^b f_n|&\leqslant V_a^b(f-f_n)\\&\leqslant\sum_{r\in D\setminus D_n}(|\beta_r|\chi_{[a,b)}(r)+|\alpha_r|\chi_{(a,b]}(r)).\end{aligned}$$

可见，对 f_n 的全变差取极限即得 f 的全变差.

(5) 跳跃函数 f 的全变差函数 $(\bigvee f)(x)=g(x)-g(a)$, 其中

$$\begin{aligned}g(x)&=\sum_{r\in D}(|\alpha_r|\theta(x-r)+|\beta_r|\theta_1(x-r))\\&=\sum_{r\in D}(|\alpha_r|\chi_{(-\infty,x]}(r)+|\beta_r|\chi_{(-\infty,x)}(r)).\end{aligned}$$

这是跳跃函数. 因此实值跳跃函数的正负变差函数都是跳跃函数.

上例充分应用了全变差的基本性质来解决问题.

定理 2(Helly 选取原理) 区间 $[a,b]$ 上逐点有界并且全变差一致有界的函数列 (f_n) 有子列 (f_{k_n}) 逐点逼近一个有界变差函数 f.

以后常用右连续的有界变差函数, 一般的有界变差函数可右连续化如下.

定理 3 设 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是有界变差函数. 命 $g(a)=f(a)$ 而 $g(b)=f(b)$; 当 $a<x<b$ 时, 命 $g(x)=f(x+)$. 函数 g 是在 (a,b) 右连续且在区间端点及 f 的连续点与 f 等值的唯一函数. 进而 $\bigvee g\leqslant\bigvee f$.

对于函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 与实数 y, 方程 $f(x)=y$ 的实根个数记为 $\gamma(y)$, 其取值范围是 $0,1,2,\cdots,\infty$. 称 γ 为 f 的 Banach 指示函数.

定理 4(Banach) 连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 的 Banach 指示函数 $\gamma:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ 是非负 Borel 函数且

$$\bigvee_a^b f=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma(y)dy.$$

据此定理, f 有界变差当且仅当 γ 可积. 此时几乎所有 y 使方程 $f(x)=y$ 有有限个解, 使 $f(x)=y$ 有无限个解的 y 组成一个 Lebesgue 零集.

例 3 函数 $\sin:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ 的 Banach 指示函数的值

$$\gamma(y)=\{0:|y|>1;1:|y|=1;2:0<|y|<1;3:y=0\}.$$

所以 $\int\gamma(y)dy=4$. 这也是 sin 在 $[0,2\pi]$ 的全变差.

Dini 导数 对于函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 和 $[a,b]$ 中不同两点 x 与 y, 命

$$\Delta_f(x,y)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

(1) 当 $a\leqslant x<b$ 时, 定义 f 在 x 在两个右 Dini 导数如下:

$$D^+f(x)=\overline{\lim_{y\to x+}}\Delta_f(x,y)=\inf_{r>0}\sup_{x<y<x+r}\Delta_f(x,y),$$
$$D_+f(x)=\underline{\lim_{y\to x+}}\Delta_f(x,y)=\sup_{r>0}\inf_{x<y<x+r}\Delta_f(x,y);$$

它们相等时记为 $f'_+(x)$. 这称为 f 在 x 的右导数.

(2) 当 $a<x\leqslant b$ 时, 定义 f 在 x 的两个左 Dini 导数如下:

$$D^-f(x)=\overline{\lim_{y\to x-}}\Delta_f(x,y)=\inf_{r>0}\sup_{x-r<y<x}\Delta_f(x,y),$$
$$D_-f(x)=\underline{\lim_{y\to x-}}\Delta_f(x,y)=\sup_{r>0}\inf_{x-r<y<x}\Delta_f(x,y);$$

它们相等时记为 $f'_-(x)$, 这称为 f 在 x 的左导数.

(3) 命 $\underline{D}f(x)$ 与 $\overline{D}f(x)$ 分别是 f 在 x 的最小 Dini 导数与最大 Dini 导数, 它们相等时记为 $f'(x)$. 这称为 f 在 x 的导数, 此地导数允许取值为 $\pm\infty$. 而 f 在 x 可导是指 $-\infty < f'(x) < +\infty$.

(4) 将 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 的连续点集记为 A 而不连续点集记为 D.

(4a) t 是广义实数时, $A(D^{\pm}f \geqslant t)$ 与 $A(D_{\pm}f \leqslant t)$ 都是 G_δ 型集.

(4b) t 是广义实数时, $A(\overline{D}f \geqslant t)$ 与 $A(\underline{D}f \leqslant t)$ 都是 G_δ- 型集.

(4c) f 的不可导连续点全体 A_1 是 $\mathrm{G}_{\delta\sigma}$- 型集 — 可数个 G_δ 型集的并.

(4d) f 的左右导数都存在但不相等的点有可数个.

(4e) Dini 导数限制在连续点集上是 Borel 函数.

(5) 若 D 是可数集, 则 Dini 导数是 (a,b) 上 Borel 函数.

以下是有关 Dini 导数与 Borel 集测度的重要关系.

引理 5 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是递增函数.

(1) 设 $0\leqslant s<+\infty$ 使 $E\subseteq(D_-f\leqslant s)$, 则 $|f(E)|_1^*\leqslant s|E|_1^*$.

(2) 设 $0\leqslant s\leqslant+\infty$ 使 $E\subseteq(D^+f\geqslant s)$, 则 $s|E|_1^*\leqslant|f(E)|_1^*$.

以下是经典实分析中重要的结论.

定理 6(Lebesgue) 有界变差函数关于 Lebesgue 测度几乎处处可导.

例 4 设 $\varepsilon>0$. 对于 $[a,b]$ 中 Lebesgue 零集 E, 构造一个连续的递增函数 $g_0:[a,b]\to\mathbb{R}$ 使 $g_0(a)=0$, $g_0(b)<\varepsilon$, 当 $x\in E$ 时 $g_0'(x)=+\infty$.

为此, 取包含 E 的递减开集序列 (U_n) 使 $|U_n|_1<2^{-n}$. 作连续递增函数

$$h(x)=|U_1\cap[a,x]|_1+|U_2\cap[a,x]|_1+\cdots.$$

当 $x\in E$ 时, 取个 $r>0$ 使 $(x-r,x+r)\subseteq U_n$. 当 $0<s<r$ 时,

$$h(x+s)-h(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|U_k\cap[x,x+s]|_1\geqslant ns,$$

$$h(x)-h(x-s)=\sum_{k=1}^{\infty}|U_k\cap[x-s,x]|_1\geqslant ns.$$

这样 $\underline{D}h(x)\geqslant n$. 由 n 的任意性知 $h'(x)=+\infty$.

命 $g_0=\varepsilon h\div(h(b)+1)$ 即可.

定理 7(Fubini) 设区间 $[a,b]$ 上的递增函数组成的函数项级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ 点态收敛于函数 f, 则关于 Lebesgue 测度几乎处处成立 $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n' \doteq f'$.

为计算跳跃函数 f 的导数, 可设其跳跃度 α_r 和 β_r 都非负. 由 $g_r' \doteq 0$ 和以上定理知 $f' \doteq 0$. 一般地, 将有界变差函数分解成实部与虚部并由 Jordan 分解可得以下定理中第一结论.

定理 8 设 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是有界变差函数, 则 $(\bigvee f)' \doteq |f'|$, 且

$$\int_a^b |f'(x)|dx \leqslant \bigvee_a^b f.$$

有两组同侧 Dini 导数: D^+f 和 D_+f, D^-f 和 D_-f; 有两组对角 Dini 导数: D^+f 和 D_-f, D_+f 和 D^-f.

定理 9(Denjoy-Young-Saks) 函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在某个 Lebesgue 零集 E 外的每点处只可能有如下情形: 两个同侧 Dini 导数有限时相等; 两个对角 Dini 导数不为异号无穷大时有限且相等.

习 题

练习 1 试证明 $\bigvee\limits_a^b f = \sup\limits_P \Omega(f,P)$, 其中 $P: x_0 < \cdots < x_n$ 取遍 $[a,b]$ 的分点组, ω_i 表示 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 而 $\Omega(f,P) = \sum\limits_{i=1}^n \omega_i$.

练习 2 证明: 在 (a,b) 内导函数有界的连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界变差.

练习 3 设 $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ 是有界变差函数, 命 $g(0)=0$ 且

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)dt}{x}, 0 < x \leqslant 1.$$

试证明 $g:[0,1]\to\mathbb{C}$ 也是有界变差函数.

练习 4 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 命

$$\alpha(x) = \min\{f(y)|a\leqslant y\leqslant x\},$$
$$\beta(x) = \max\{f(y)|a\leqslant y\leqslant x\},$$

证明 α 与 β 是 $[a,b]$ 上连续函数.

练习 5 设有函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 和 $a<x_0<b$.

(1) 若 f 在 x_0 取到极小值，证明 $D^-f(x_0)\leqslant 0\leqslant D_+f(x_0)$.

(2) 若 f 在 x_0 取到极大值，证明 $D^+f(x_0)\leqslant 0\leqslant D_-f(x_0)$.

(3) 若 $D^-f(x_0)<0<D_+f(x_0)$, 证明 x_0 是 f 的严格极小值点.

(4) 函数 f 的严格极小值点 x 有可数个.

(5) 使 $D^+f(x)<D_-f(x)$ 或 $D^-f(x)<D_+f(x)$ 的点 x 有可数个.

练习 6 求函数 $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ 的全变差，其中

$$f(x)=\begin{cases}x-1, x<1;\\ 10, x=1;\\ x^2, x>1.\end{cases}$$

练习 7 设 $f:[a,b]\to[c,d]$ 是严格递增的连续函数使 $f(a)=c$ 而 $f(b)=d$. 对于函数 $g:[c,d]\to\mathbb{R}$, 证明 $\bigvee\limits_a^b(gf)=\bigvee\limits_c^d g$.

练习 8 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续函数使 $g=|g|\exp(\sqrt{-1}f)$.

(1) 当 $|g|$ 与 f 有界变差时， g 亦有界变差.

(2) 当 g 有界变差且下有界时， f 亦有界变差.

练习 9 求区间上 $[0,\pi]$ 上函数 sin 的正负变差函数.

练习 10 对于单调函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 定义 $g(x)=f(x+)$. 证明：

(1) g 在任何点 x_0 右连续.

(2) f 在 x_0 连续当且仅当 g 在 x_0 连续.

(3) 在连续点 x_0 处， f 和 g 有相同的 Dini 导数.

练习 11 求以下函数在指定的区间上的全变差：

(1) 正弦函数 $\sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上.

(2) 指数函数 $\exp(\sqrt{-1}t)$ 在区间 $[0,2\pi]$.

(3) 函数 $\exp(\sqrt{-1}\sin t)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上.

(4) 对数函数 $\ln x$ 在区间 $[1,100]$ 上.

练习 12 证明：函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是有界变差函数当且仅当存在一个递增函数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 使 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 时,

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant g(x_2)-g(x_1).$$

练习 13 当连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 存在有界的导函数 $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ 时，用有界收敛定理证明微积分基本定理：

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

练习 14 设函数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 的子集 E 上处处可导.

(1) 若有常数 c 使 $x\in E$ 时 $|g'(x)|\leqslant c$, 证明 $|g(E)|_1^*\leqslant c|E|_1^*$.

(2) 若 g 是可测函数而 E 是可测集，证明 $|g(E)|_1^*\leqslant \int_E |g'(t)|dt$.

练习 15 证明：处处可微函数 $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ 的导函数 f' 无第一类不连续点.

练习 16 函数 $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ 在 x 可导当且仅当以下极限存在且有限

$$\lim_{v-u\to 0+}\frac{f(v)-f(u)}{v-u} : u\leqslant x\leqslant v.$$

练习 17 设 $0<a<1$, 试证明以下连续函数处处不可微：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x)$, 其中 b 是奇数使 $2ab>2+3\pi(1-a)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n|\sin(b^n\pi x)|$, 其中 b 是奇数使 $ab>1+\dfrac{7\pi}{2}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n\sin(b^n\pi x)$, 其中 $b=4k+1 : k=1,2,\cdots$.

练习 18 设 I 是 $\mathbb{R}$ 中区间. 函数 $f:I\to\mathbb{R}$ 递增当且仅当 $\underline{D}f\geqslant 0$. 此时，$f$ 不严格递增当且仅当 $\overline{D}f$ 的零点集含长度非零的区间；即 f 严格递增当且仅当 $\overline{D}f$ 的零点集不含长度非零的区间.

练习 19 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是递增函数而 E 是 $[a,b]$ 中 Borel 集，则

$$\int_E f'(t)dt\leqslant |f(E)|_1.$$

若 $E\subseteq(D_-f<+\infty)$, 则上式中等号成立.

练习 20 证明：使 $(D^+f<0)$ 不具有连续势的连续函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 递增；使 $(D^-h<0)$ 不具有连续势的连续函数 $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ 也递增.

练习 21 若连续函数 $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ 的 4 个 Dini 导函数中有一个有界 — 如设 $p\leqslant D^+f\leqslant q$, 证明 $p\leqslant D^{\pm}_{\pm}f\leqslant q$. 进而 $a<x<x'<b$ 时，

$$p\leqslant\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\leqslant q.$$

练习 22 设连续函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 的 4 个 Dini 导函数中有一个 — 如设 D^+f 在 x_0 有限且连续，证明 f 在 x_0 可导.

练习 23 证明：函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 使 $(D^+f)(x)=+\infty$ 且 $(D_-f)(x)>-\infty$ 的点 x 全体是个零集.

练习 24 证明： 4 个 Dini 导函数中有一个的非零点全体不具有连续势的连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是常数函数.

练习 25 证明： Dini 导数都有限的函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 处处连续.

练习 26 证明：函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足 Lipschitz 条件 — 存在 $c\geqslant 0$ 恒使

$$|f(z)-f(x)|\leqslant c(z-x)$$

当且仅当 f 的所有 Dini 导数组成一个有界数集.

练习 27 证明：函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 满足 Lipschitz 条件当且仅当

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\sum_{i\leqslant n}(b_i-a_i)<\delta\Rightarrow\Big|\sum_{i\leqslant n}(f(b_i)-f(a_i))\Big|<\varepsilon.$$

§4.2 绝对连续函数

在 §1.4 构造的 Cantor 函数是 *奇异函数*— 导数几乎处处为零而本身不为常数的连续有界变差函数. 这样的函数不是其导函数的不定积分. 在 Lebesgue 积分的范畴内，关于不定积分问题有如下结论.

定理 1 对于函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, 以下条件等价：

(1) f 是绝对连续函数：对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $[a,b]$ 中满足 $\sum(b_i-a_i)<\delta$ 的有限个开区间 $\{(a_i,b_i)|i\}$ 相互不交时,

$$\sum|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon.$$

(2) f 是某个函数 φ 的 Lebesgue 不定积分 (此时 $f'\doteq\varphi$):

$$f(x)=f(a)+\int_a^x\varphi(t)dt:a\leqslant x\leqslant b.$$

(3) f 是连续的有界变差函数并且 $\bigvee_a^b f=\int_a^b|f'(x)|dx$.

(4) f 的全变差函数 $\bigvee f$ 绝对连续.

可见，绝对连续函数 f 使微积分基本定理成立：

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt:a\leqslant x\leqslant b.$$

正弦函数绝对连续. 这是因为不等式 $\sum|\sin b_i-\sin a_i|\leqslant\sum|b_i-a_i|$ 表明可取 $\delta=\varepsilon$. 绝对连续函数的线性组合与点态乘积是绝对连续函数. 绝对连续函数未必处处可导. 如区间 [-1,1] 上绝对连续函数 $|x|$ 在零点不可导.

例 1 举例说明定理 1 中的不定积分不可换成 Riemann 积分下的不定积分. 为此设 $a_r > 0$ 使 $\sum_{r\in\mathbb{Q}} a_r < +\infty$. 作开集 $U = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (r - a_r, r + a_r)$ 和闭集 $E = \mathbb{R} \setminus U$. 由于 $\mathbf{m}(U)$ 有限, 从而 $\mathbf{m}(E) = +\infty$.

当 $x \in E$ 时, 命 $f(x) = 0$; 当 x 在 U 的一个构成区间 (a, b) 时, 命

$$f(x) = (x-a)^2(x-b)^2 \sin g(x),$$

其中 $g(x) = ((b-a)(x-a)(x-b))^{-1}$. 此时

$$f'(x) = (2x-a-b)(2(x-a)(x-b)\sin g(x) - \frac{\cos g(x)}{b-a}).$$

任取 $x \in E$, 设 $x < z$. 若 z 在 E 中, 则 $f(z) - f(x) = 0$. 若对任何 $r > 0$, U 与 $(x, x+r)$ 相交, 这其中的 z 必在 U 中的一个构成区间 (a_z, b_z) 中, 则 $x \leqslant a_z < z < b_z$. 于是

$$\lim_{z\to x+} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{z\to x+} \frac{(z-a_z)^2(z-b_z)^2}{z-x} \sin g(z) = 0.$$

这表明 $f'_+(x) = 0$. 同样 $f'_-(x) = 0$. 从而 f 处处可导.

虽然 f' 有界, 但 E 中每一点都是其不连续点. 因而 f' 不几乎处处连续. 这样 f' 不 Riemann 可积.

下面将有界变差函数的不连续点分出来而得到一些好的函数.

定理 2(Lebesgue 分解) 任何有界变差函数 $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ 都可写成绝对连续函数、跳跃函数和奇异函数这三类函数中一个或两个或三个之和. 在相差一个常数的意义下, 它们由 g 唯一确定.

这三个函数的构造如下: 以 α_z 与 β_z 记 g 在 z 的左右方跳跃度, 命

$$h(x) = \sum_{a<z\leqslant b} \alpha_z \theta(x-z) + \sum_{a\leqslant z<b} \beta_z \theta_1(x-z).$$

它非零时是跳跃函数, 它与 g 有相同的不连续点且对应的左右方跳跃度一致. 命

$$g_0(x) = \int_a^x g'(t)dt : a \leqslant x \leqslant b.$$

这是绝对连续函数. 作连续的有界变差函数

$$g_1(x) = g(x) - h(x) - g_0(x) : a \leqslant x \leqslant b.$$

如果 g_1 不为常数, 则 $g'_s \doteq 0$ 蕴含 g_s 为奇异函数. 这得 g 的 Lebesgue 分解:

$$g = g_0 + h + g_1.$$

定理 3 设 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是 Lebesgue 可积的，则 (a,b) 中几乎所有点 x 使

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_x^{x+r}|\varphi(y)-\varphi(x)|dy=0.$$

这样的 x 称为 φ 的 Lebesgue 点，它使 φ 的不定积分 f 满足 $f'(x)=\varphi(x)$.

定理 4 逐点可微且导函数 Lebesgue 可积的函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 绝对连续.

习 题

练习 1 实数 t 满足什么条件时，以下函数有界变差？

$$f(0)=0; f(x)=x^t\sin(1/x), 0<x\leqslant 1.$$

练习 2 由方程 $y=x\sin(1/x)$ 确定的曲线 L 在 $(0,1]$ 上是否可求长？

练习 3 证明：单调函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 绝对连续当且仅当

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a).$$

练习 4 设点态收敛级数 $f=\sum_{k\geqslant 1}f_k$ 中的每一项都是 $[a,b]$ 上递增的绝对连续函数，证明 f 是绝对连续函数.

练习 5 设 $f:[a,b]\to[c,d]$ 是绝对连续函数. 如果 $g:[c,d]\to\mathbb{C}$ 满足 Lipschitz 条件，证明 $gf:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是绝对连续函数.

练习 6 证明函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 的绝对连续性与以下诸条件相互等价：

(1) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\bigsqcup_{i\leqslant n}(a_i,b_i)\subset[a,b]$:

$$\sum_{i\leqslant n}(b_i-a_i)<\delta\Rightarrow\left|\sum_{i\leqslant n}(f(b_i)-f(a_i))\right|<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\bigsqcup_{i\in I}(a_i,b_i)\subset[a,b]$:

$$\sum_{i\in I}(b_i-a_i)<\delta\Rightarrow\sum_{i\in I}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon.$$

(3) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\bigsqcup_{i\in I}(a_i,b_i)\subset[a,b]$:

$$\sum_{i\in I}(b_i-a_i)<\delta\Rightarrow\sum_{i\in I}\omega_i<\varepsilon.$$

(4) $\forall \varepsilon > 0, \exists c > 0, \forall \bigsqcup_{i \in I} (a_i, b_i) \subset [a, b]$:

$$\sum_{i \leqslant n} |f(b_i) - f(a_i)| < c \sum_{i \leqslant n} (b_i - a_i) + \varepsilon.$$

其中 n 是任意自然数, I 是任意可数集, 而 ω_i 是 f 在 $[a_i, b_i]$ 上的振幅.

练习 7 设 X 是 $\mathbb{R}$ 中区间. 对于函数 $f: X \to \mathbb{R}$, 证明以下 4 条等价:

(1) f 是下凸函数: 当 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 且 $x, y \in X$ 时,

$$f(sx + (1-s)y) \leqslant sf(x) + (1-s)f(y).$$

(2) $x_i \in X$ 且 $t_i \geqslant 0$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ 时,

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

(3) x_1, x_2, x_3 是 X 中依小到大排列的三个数时,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

(4) x 和 y 是 X 中两点且 $x < y$ 时, $(\overline{D}f)(x) \leqslant (\underline{D}f)(y)$.

练习 8 证明下凸函数 $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ 有以下性质:

(1) f 在每点 $x \in (a, b)$ 的左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$ 都存在且

$$-\infty < f'_-(x) \leqslant f'_+(x) < +\infty.$$

(2) $a < x < y < b$ 时, $f'_+(x) \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'_-(y)$.

(3) f 的不可微点至多有可列个.

练习 9 对于区间上的函数 $f: X \to \mathbb{R}$, 证明以下条件等价:

(1) f 是严格下凸函数: $0 < s < 1$ 且 X 中数 x, y 互异时

$$f(sx + (1-s)y) < sf(x) + (1-s)f(y).$$

(2) $x_i \in X$ 且 $0 < t_i < 1$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ 时,

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) < t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

(3) X 中三点 x_1, x_2, x_3 使 $x_1 < x_2 < x_3$ 时,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

(4) X 中两点 x 和 y 使 $x < y$ 时, $(\overline{D}f)(x) < (\underline{D}f)(y)$.

练习 10 请写出上凸函数的条件和性质及严格上凸函数的条件.

练习 11 证明: 连续下凸函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是绝对连续函数.

练习 12 设 f 是区间 X 上的下凸函数. 当 X 是开区间时, f 是否连续? 当 X 是闭区间时, f 是否在端点连续?

练习 13 求下凸函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 全体 M 的势.

练习 14 设 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 是奇异函数. 证明有 $\varepsilon>0$ 使 $\delta>0$ 时, $[a,b]$ 中有相互不交的开区间 $(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$ 使 $\sum(b_i-a_i)<\delta$ 且 $\sum|f(b_i)-f(a_i)|\geqslant\varepsilon$.

练习 15 证明: Lebesgue 可积函数 $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ 的连续点 x 是其 Lebesgue 点: $\lim\limits_{r\to0}\dfrac{1}{r}\int\limits_x^{x+r}|f(y)-f(x)|dy=0$.

练习 16 试证明处处可导的单调函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 绝对连续.

练习 17 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集. 如果 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的 F_σ- 型集且 $E\subseteq X$, 证明 E 在连续函数 $f:X\to Y$ 下的像 $f(E)$ 是 F_σ- 型集.

练习 18 证明: 连续函数 $f:X\to Y$ 将 X 的 Lebesgue 可测集 E 都映成 Lebesgue 可测集当且仅当 f 将 X 的 Lebesgue 零集 E_0 都映成 Lebesgue 零集.

练习 19 证明: 连续的有界变差函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 绝对连续当且仅当它将 Lebesgue 零集 E_0 映成 Lebesgue 零集 [当且仅当它将 Lebesgue 可测集映为 Lebesgue 可测集]. 此时, 当 E 是 $[a,b]$ 中 Lebesgue 可测集时

$$|f(E)|_1\leqslant\int\limits_E|f'(x)|dx.$$

练习 20 严格递增的连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 绝对连续当且仅当 f 将 $(\overline{D}f=+\infty)$ 映为 Lebesgue 零集. 此时, 若 E 是 $[a,b]$ 中 Lebesgue 可测集, 则

$$|f(E)|_1=\int\limits_E f'(t)dt.$$

练习 21 设递增函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 绝对连续. 当 E 是 $[a,b]$ 的 Lebesgue 可测集时, 证明

$$\int\limits_E f'(t)dt=|f(E)|_1.$$

练习 22(Г. М. Фихтенгольц) 设 $f:[a,b]\to[c,d]$ 与 $g:[c,d]\to\mathbb{C}$ 是绝对连续函数, 则复合函数 $gf:[a,b]\to\mathbb{C}$ 绝对连续当且仅当 gf 是有界变差函数

练习 23 设 $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ 下半绝对连续 — 当 $\varepsilon>0$ 时, 有 $\delta>0$ 使

$$|\bigsqcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)|_1<\delta\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(h(b_i)-h(a_i))\geqslant-\varepsilon.$$

证明 h 几乎处处可导. 若 $h'\dot{\geqslant}0$, 则 h 是递增函数.

练习 24 设 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 上半绝对连续 — 当 $\varepsilon>0$ 时, 有 $\delta>0$ 使

$$|\bigsqcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)|_1<\delta\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(g(b_i)-g(a_i))\leqslant\varepsilon.$$

证明 g 几乎处处可导. 若 $g'\dot{\leqslant}0$, 则 h 是递减函数.

练习 25 设 $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是下半绝对连续函数使 $h(a)=0$ 且 $h'\dot{\geqslant}f$, 则称 h 是 f 的益积函数. 设 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是上半绝对连续函数使 $g(a)=0$ 且 $g'\dot{\leqslant}f$, 则称 g 是 f 的损积函数.

证明: 函数 $f:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ 为 Lebesgue 可积的当且仅当 g 取遍 f 的损积函数而 h 取遍 f 的益积函数时

$$-\infty<\sup_g g(b)=\inf_h h(b)<+\infty.$$

此时上式即为 f 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分.

练习 26 设连续函数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 使 $(\overline{D}g=+\infty)$ 为可数集. 证明: 当 $\varepsilon>0$ 时, 有个连续函数 $g_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ 使 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,

$$0=g(a)-g_1(a)\leqslant g(x)-g_1(x)<\varepsilon$$

并且 $\overline{D}g_1(x)<+\infty$ 及 $\overline{D}g_1(x)\leqslant\overline{D}g(x)$.

练习 27 设连续函数 $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ 使 $(\underline{D}h=+\infty)$ 为可数集. 当 $\varepsilon>0$ 时, 有个连续函数 $h_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ 使 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,

$$0=h_1(a)-h(a)\leqslant h_1(x)-h(x)<\varepsilon$$

并且 $\underline{D}h_1(x)>-\infty$ 及 $\underline{D}h_1\geqslant\underline{D}h$.

练习 28 称连续函数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数 $f:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ 的一般下函数是指 $g(a)=0$, $(\overline{D}g=+\infty)$ 为可数集且关于 Lebesgue 测度 $\overline{D}g\dot{\leqslant}f$. 进而称 g 为 f 的下函数是指 $\overline{D}g<+\infty$ 且 $\overline{D}g\leqslant f$.

证明：当 g 是 f 的一般下函数且 $\varepsilon>0$ 时， f 有个下函数 g_1 使

$$0\leqslant g-g_1<\varepsilon.$$

练习 29 称连续函数 $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为函数 $f:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ 的一般上函数是指 $h(a)=0$, $(\underline{D}h=-\infty)$ 为可数集且关于 Lebesgue 测度 $\underline{D}h\dot{\geqslant}f$. 进而称 h 为 f 的上函数是指 $\underline{D}h>-\infty$ 且 $\underline{D}h_1\geqslant f$.

证明：当 h 是 f 的一般上函数且 $\varepsilon>0$ 时， f 有个上函数 h_1 使

$$0\leqslant h_1-h<\varepsilon.$$

练习 30 如果 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 上有界，证明 f 有上函数.

练习 31 设 $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

(1) 如果 $(\underline{D}w\leqslant 0)$ 不具连续势，证明 w 递增.

(2) 如果常数 c 使 $(\underline{D}w<c)$ 不具连续势，证明恒有 $\Delta_w(x_1,x_2)\geqslant c$.

练习 32 设函数 g 是函数 f 的一般下函数而函数 h 是 f 的一般上函数，证明 $h-g$ 是递增函数. 特别地， $g\leqslant h$.

以下两个练习彻底解决了实直线区间上的函数的不定积分问题.

* **练习 33** 设函数 $f:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ 既有一般上函数也有一般下函数. 设 h 取遍 f 的 [一般] 上函数且 g 取遍 f 的 [一般] 下函数时， $\inf\limits_h h(b)=\sup\limits_g g(b)$. 证明

$$\inf_h h(x)=\sup_g g(x):a\leqslant x\leqslant b.$$

上式记为 $P(x)$, 这称为 f 在 $[a,x]$ 的 Perron 定积分 — 也可记为

$$P(x)=\int\limits_a^x f(t)dt:a\leqslant x\leqslant b.$$

将函数 P 称为 f 的 Perron 不定积分. 此时 f 和 P 有以下性质：

(1) f 的 Perron 不定积分 P 连续. 进而 $P-g$ 和 $h-P$ 都递增.

(2) f 是几乎处处有限的 Lebesgue 可测函数且 $P'\doteq f$.

(3) f 在 $[a,b]$ 的每个子区间 $[u,v]$ 也 Perron 可积且

$$\int\limits_a^v f(t)dt=\int\limits_a^u f(t)dt+\int\limits_u^v f(t)dt.$$

* **练习 34** 证明：(1) 几乎处处相等函数有相同的 Perron 可积性与积分.

(2) Perron 可积函数 f_i 的实线性组合也 Perron 可积并且

$$\int_a^b (c_1f_1+c_2f_2)(x)dx = c_1\int_a^b f_1(t)dt + c_2\int_a^b f_2(t)dt.$$

(3) 在 $[a,b]$ 上 Perron 可积的函数 f_i 满足 $f_1 \leqslant f_2$ 时,

$$\int_a^b f_1(t)dt \leqslant \int_a^b f_2(t)dt,$$

其中等号成立当且仅当 $f_1 \doteq f_2$.

(4) 在 $[a,b]$ 和 $[b,c]$ 都 Perron 可积的函数 f 在 $[a,c]$ 也 Perron 可积且

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt.$$

(5) Lebesgue 可积函数 $f:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ 也 Perron 可积，并且 f 的两个积分相等 (从而 Perron 积分是 Lebesgue 积分的推广).

(6) 使 $|f|$ 为 Perron 可积的 Lebesgue 可测函数 f 为 Lebesgue 可积的.

(7) 广义 Riemann 可积函数 f 也 Perron 可积，且 f 的两个积分相等.

(8) 设 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续且在 (a,b) 可微，证明 F' 为 Perron 可积的且

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt : a \leqslant x \leqslant b.$$

* **练习 35** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 连续且在一可数集外可微. 如果 f' 是 Lebesgue 可积函数，则 f 绝对连续.

§4.3 带符号的测度

广义实值函数的积分提供了一类满足可列可加性的集函数，它与测度的差别在于它可以取负值. 本节就考虑这样的集函数.

广义测度 设 $\mathcal{S}$ 是 σ- 环. 如果集函数 $\mu:\mathcal{S}\to\overline{\mathbb{R}}$ 满足 $\mu(\varnothing)=0$ 与满足可列可加性：$\mu(\bigsqcup_n E_n) = \sum_n \mu(E_n)$, 则称 μ 为广义测度.

(1) 正负无穷大只有一个可被广义测度 μ 取到：若 μ 能取到 $+\infty$ 为值，则它不取 $-\infty$ 为值；反之亦然. 为此设 $\mu(S)=+\infty$. 任取 $E\in\mathcal{S}$. 由 $S\cup E = S\sqcup(E\setminus S)$ 知 $\mu(E\setminus S) > -\infty$. 由 $S=(S\cap E)\sqcup(S\setminus E)$ 知 $\mu(S\cap E) > -\infty$. 由 $E=(S\cap E)\sqcup(E\setminus S)$ 知 $\mu(E) > -\infty$.

(2) 命 $\tilde{\mathcal{S}} = \{E \subseteq X | \forall F \in \mathcal{R} : E \cap F \in \mathcal{S}\}$, 这是包含 $\mathcal{S}$ 的 σ- 代数. 为此任取 $E_i \in \tilde{\mathcal{S}}$ 且 $F \in \mathcal{S}$,

$$(\bigcup E_n) \cap F = \bigcup (E_n \cap F) \in \mathcal{S},$$
$$(E_1 \setminus E_2) \cap F = (E_1 \cap F) \setminus (E_2 \cap F) \in \mathcal{S}.$$

等式 $X \cap F = F$ 表明 X 是 $\tilde{\mathcal{S}}$ 中成员. 显然 $\mathcal{S} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}$.

(3) 称 $\tilde{\mathcal{S}}$ 中成员 A 为广义测度 μ 的 *正集* 是指任何可测集 E 都使 $\mu(E \cap A) \geqslant 0$. 类似可定义 *负集*. 显然空集既是正集也是负集.

(4) 广义测度 μ 的正集全体 $\mathcal{S}_+$ 和负集全体 $\mathcal{S}_-$ 都是 σ- 环.

(5) 若 $\mathcal{S}$ 上有两个测度 μ_1 和 μ_2, 则 $\mu_1 - \mu_2$ 有意义时是广义测度.

为说明广义测度都具有上面 (5) 中形式, 下面引进一个重要结论.

定理 1(Hahn 分解) 设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上广义测度, 则有 μ 的正集 X_+ 和负集 X_- 使 $X_+ \cap X_- = \varnothing$ 且 $X_+ \cup X_- = X$.

Hahn 分解可能不是唯一的. 如对于 $[-1,1]$ 的 Borel 集 E, 命 $\mu(E) = \int\limits_E x dx$, 则 $((0,1],[-1,0])$ 与 $([0,1],(-1,0))$ 都是 μ 的 Hahn 分解.

性质 2 设 μ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上广义测度而 (X_+, X_-) 是其 Hahn 分解. 对于可测集 E, 命 $\mu^{\pm}(E) = \pm\mu(E \cap X_{\pm})$.

(1) $\mu^{\pm}$ 是测度 — 称为 μ 的 *正负变差测度*, 命 $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, 这称为 μ 的 *全变差测度*. 它们与 Hahn 分解的取法无关.

(2) $\mu(E) < +\infty$ 时, $\mu^+(E) < +\infty$ 且 E 的可测子集 F 都满足 $\mu(F) < +\infty$. 进而, μ^+ 是有限测度当且仅当 μ 不取 $+\infty$ 为值.

(3) $\mu(E) > -\infty$ 时, $\mu^-(E) < +\infty$ 且 E 的可测子集 F 都满足 $\mu(F) > -\infty$. 进而, μ^- 是有限测度当且仅当 μ 不取 $-\infty$ 为值.

(4) $\mu = \mu^+ - \mu^-$. 这称为 μ 的 Jordan 分解. 它具有最小性: 如果两个测度 ν_0 与 ν_1 使 $\mu = \nu_0 - \nu_1$, 则 $\mu^+ \leqslant \nu_0$ 且 $\mu^- \leqslant \nu_1$.

(5) $|\mu|$ 是 (σ-) 有限的当且仅当 $\mu^{\pm}$ 都是 (σ-) 有限的当且仅当 μ 是 (σ-) 有限的 (任何可测集都有关于 μ 有限的可测划分).

(6) $\mathcal{D}$ 取遍 E 的可测划分时, $|\mu|(E) = \sup\limits_{\mathcal{D}} \sum\limits_{D \in \mathcal{D}} |\mu(D)|$.

设 μ 是测度, 可测函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 关于测度 μ 的积分存在时, 加权广义测度 $\nu : E \mapsto \int\limits_E f d\mu$ 有个 Hahn 分解 $((f \geqslant 0), (f < 0))$, 也有个 Hahn 分解 $((f > 0), (f \leqslant 0))$. 现在 ν 的正负变差测度 $\nu^{\pm}(E) = \int\limits_E f^{\pm} d\mu$ 而全变差测度 $|\nu|(E) = \int\limits_E |f| d\mu$.

复值测度 将 σ- 环上具有可列可加性的复值集函数 $\mu : S \to \mathbb{C}$ 称为 *复值测度*. 这相当于 $\mathrm{re}\,\mu$ 和 $\mathrm{im}\,\mu$ 都是有限广义测度.

(1) 对于可测空间 X 上复值测度 μ 与可测集 E, 命

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{A\in\mathcal{D}} |\mu(A)| : \mathcal{D}\text{可测划分}E\}.$$

记 $\|\mu\| = \sup\{|\mu|(E) : E \in S\}$. 这称为 μ 的 *全变差*.

(2) $|\mu| \leqslant |\mathrm{re}\,\mu| + |\mathrm{im}\,\mu| \leqslant 2|\mu|$.

(3) $|\mu|$ 是有限测度, 称之为 μ 的 *全变差测度*.

(4) 非负性: $|\mu| \geqslant 0$ 且 $|\mu| = 0$ 当且仅当 $\mu = 0$.

(5) 非负性: $\|\mu\| \geqslant 0$ 且 $\|\mu\| = 0$ 当且仅当 $\mu = 0$.

(6) 齐次性: $|a\mu| = |a||\mu|$ 且 $\|a\mu\| = |a|\|\mu\|$, 其中 a 是复数.

(7) 次可加性: $|\mu+\nu| \leqslant |\mu| + |\nu|$ 且 $\|\mu+\nu\| \leqslant \|\mu\| + \|\nu\|$.

广义测度或复值测度的零集可以很大. 如 $\mathcal{B}[0, 2\pi]$ 上有复值测度

$$\rho : E \mapsto \int_E \exp(\sqrt{-1}x)dx,$$

它以 $[0, 2\pi]$ 为零集, 但不以 $[0, \pi]$ 为零集. 因此有关广义测度或复值测度的几乎处处等概念皆是对于其全变差测度而言的.

积分 (一) 可测函数 $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 关于广义测度 μ 的积分为

$$\int_X f d\mu = (\int_X f^+ d\mu^+ + \int_X f^- d\mu^-) - (\int_X f^+ d\mu^- + \int_X f^- d\mu^+),$$

其中要求右端有一个括号有限. 积分有限的函数称为可积函数,

(二) 复值函数 f 的实部与虚部关于关于广义测度 μ 可积时, 命

$$\int_X f d\mu = \int_X (\mathrm{re}\, f) d\mu + \sqrt{-1} \int_X (\mathrm{im}\, f) d\mu.$$

此时 $(|f| > 0)$ 关于 $|\mu|$ 是 σ- 有限集且 f 关于 $|\mu|$ 几乎处处有限.

(三) 复值可测函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 关于复值测度 μ 的积分规定为

$$\int_X f d\mu = \int_X (\mathrm{re}\, f d\,\mathrm{re}\,\mu - \mathrm{im}\, f d\,\mathrm{im}\,\mu) + \sqrt{-1} \int_X (\mathrm{re}\, f d\,\mathrm{im}\,\mu + \mathrm{im}\, f d\,\mathrm{re}\,\mu).$$

这要求 f 的实部与虚部关于 μ 的实部与虚部都可积. 此时 $(|f| > 0)$ 是 σ- 有限集. 以上规定的积分有以下性质:

(1) 当 $\mu(E)$ 是有限集时, 有界可测函数 $f : E \to \mathbb{C}$ 总在 E 上可积.

(2) 线性：在积分存在时，$\int_X (af+bg)d\mu = a\int_X fd\mu + b\int_X fd\mu$.

(3) 基本不等式：设 f 关于 μ 积分存在，则 $|\int_X fd\mu| \leqslant \int_X |f|d|\mu|$. 而 f 关于 μ 可积当且仅当 $|f|$ 关于 $|\mu|$ 可积.

(4) 可列可加性：对于 X 的可测划分 $\{X_n\}$，下式在左边有意义时成立

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \sum_n \int_{X_n} f(x)\mu(dx).$$

(5) 控制收敛定理：设 g 是可测函数列 $\{f_n\}$ 的可积控制函数. 如果 $\{f_n\}$ 依测度 $|\mu|$ 收敛 (或关于 $|\mu|$ 几乎处处收敛) 于可测函数 f，则 f 可积并且

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

(6) 关于测度的线性：设 a 和 b 是数，下式两边有意义时成立

$$\int_X fd(a\mu + b\nu) = a\int_X fd\mu + b\int_X fd\nu.$$

(7) 绝对连续性：如果 $f: X \to \mathbb{C}$ 关于广义测度或复值测度 μ 可积，则对于 $\varepsilon > 0$，有 $\delta > 0$ 使可测集 E 满足 $|\mu|(E) < \delta$ 时，$|\int_E fd\mu| < \varepsilon$.

设 $(X, \mathcal{R}, \mu)$ 与 $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ 是广义或复值测度空间而 $f: X \to Y$ 是可测映射使 F 是 Y 的可测集时 $\nu(F) = \mu(f^{-1}(F))$，则称 ν 为 μ 通过 f 诱导的测度. 如果此时 f 还是可测同构，则称 f 是保测变换.

定理 3 条件同上，则 Y 上可测函数 g 关于 ν 的积分存在当且仅当复合函数 $g \circ f$ 关于 μ 的积分存在. 此时

$$\int_Y g(y)\nu(dy) = \int_X g(f(x))\mu(dx).$$

有限测度诱导的测度是有限测度但 σ- 有限测度诱导的测度不一定是 σ- 有限的. 为此，设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 $f(x) \equiv 0$. 在 $\mathbb{R}$ 取 Lebesgue 测度，则 $\mathbb{R}$ 的任何子集 F 的诱导测度 $\nu(F) = 0$ 或 $+\infty$.

据积分的可列可加性，函数 w 关于 μ 的积分存在时，集函数 $\nu: E \mapsto \int_E wd\mu$ 是广义或复值测度，这称为 *加权测度*.

定理 4 设 w 和 ν 同上，则 X 上可测函数 f 关于 ν 的积分存在当且仅当点态积 fw 关于 μ 的积分存在. 此时

$$\int_X f(x)\nu(dx) = \int_X f(x)w(x)\mu(dx).$$

进而，ν 是 σ- 有限的当且仅当 w 关于 $|\mu|$ 几乎处处有限且 $(|w|>0)$ 是 $|\mu|$ 的 σ- 有限集.

据此定理，可记 $\nu(dx) = w(x)\mu(dx)$ 或 $d\nu = wd\mu$. 如当 E 是 $[-1,1]$ 中 Borel 集时，命 $\rho(E) = \int_E \exp(\sqrt{-1}x)dx$, 则 $\rho(dx) = \exp(\sqrt{-1}x)dx$.

测度间的连续性 设 ν 和 μ 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上广义测度或复值测度.

(·) 称 ν 关于 μ 绝对连续是指 $|\mu|(E)=0$ 必蕴含 $\nu(E)=0$. 此时记 $\nu \ll \mu$. 称 ν 关于 μ 强绝对连续是指对任何 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$ 使 $|\mu|(E)<\delta$ 时，$|\nu(E)|<\varepsilon$.

(1) μ 与 $|\mu|$ 是等价测度— 相互绝对连续的测度.

(2) 强绝对连续性蕴含绝对连续性. 反之不然. 为此取直线上关于 Lebesgue 测度的加权测度 $\nu(dx)=3x^2m(dx)$. 显然 ν 关于 m 绝对连续，但 ν 关于 m 不是强绝对连续. 事实上，取 $a>0$ 与 $r>0$ 使 $a^2r=1$, 则

$$\nu(a,a+r] = \int_a^{a+r} 3x^2dx = (a+r)^3 - a^3 \geqslant 1.$$

当 $a\to+\infty$ 时，$r\to 0$. 但 $\nu(a,a+r]\geqslant 1$.

(3) $\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll |\mu|$.

(4) ν 是广义测度时，$\nu \ll \mu \Leftrightarrow \nu^+ \ll \mu$ 且 $\nu^- \ll \mu$.

(5) $\mu,\nu \ll \rho$ 且 a,b 是数，则 $a\mu+b\nu \ll \rho$ 在左边有意义时成立.

(6) 链式法则：$d\rho = w_1d\nu$ 且 $d\nu = w_2d\mu$ 时，$d\rho = w_1w_2d\mu$.

(7) (X_+,X_-) 是广义测度 μ 的 Hahn 分解时,

$$d\mu^{\pm} = \pm\chi_{X_\pm}d\mu = \chi_{X_\pm}d|\mu|,$$

$$d|\mu| = (\chi_{X_+} - \chi_{X_-})d\mu,$$

$$d\mu = (\chi_{X_+} - \chi_{X_-})d|\mu|.$$

(8) $d\nu = wd\mu$ 时，ν 是 σ- 有限的当且仅当 $(0<|w|<+\infty)$ 是 $|\mu|$ 的 σ- 有限集而 $(|w|=+\infty)$ 是 $|\mu|$ 的零集. 此时可要求 w 是有限的.

(9) μ 非平凡且全 σ- 有限时，它与一个概率测度等价.

在 $d\nu = wd\mu$ 时，称 ν 是 w 关于 μ 的不定积分而 w 是 ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数. 何时 ν 关于 μ 有 Radon-Nikodym 导数？以下定理给出了一个充分条件.

定理 5(Radon-Nikodym) 设 μ 是可测空间 X 上 [复值测度或] 全 σ- 有限的广义测度. 如果 [复值测度或] 广义测度 ν 关于 μ 绝对连续, 则 ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数 f 在 $|\mu|$ 几乎处处相等的意义下唯一存在.

下例是 Radon-Nikodym 定理在概率论中的应用, 其中极少用到概率述语.

例 1 设 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 是概率空间而 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的 σ- 子代数. 当 f 是 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上可积函数时, $\nu : B \to \int\limits_B f d\mu$ 是 $\mathcal{G}$ 上关于 $\mu|_\mathcal{G}$ 绝对连续的有限测度. 于是有 $(X,\mathcal{G},\mu|_\mathcal{G})$ 上可积函数 g 使 $B \in \mathcal{G}$ 时, $\int\limits_B f d\mu = \int\limits_B g d\mu$.

上例中的 g 称为 f 的 **条件数学期望** 并记 $g = \mathbf{E}(f|\mathcal{G})$.

定理 6(Vitali-Hahn-Saks) 设 $(X,\mathcal{S},\mu)$ 是测度空间, 而 (ν_n) 是关于 μ-绝对连续的复值测度序列. 设任何可测集 E 都使数列 $(\nu_n(E))_{n=1}^\infty$ 收敛, 则当 $\varepsilon > 0$ 时, 存在 $\delta > 0$ 使 $\mu(E) < \delta$ 且 $n \geqslant 1$ 时, $|\nu_n(E)| < \varepsilon$.

称广义或复值测度 μ 集中于 $A \in \tilde{\mathcal{S}}$ 上是指任何可测集 E 都使 $\mu(E \setminus A) = 0$, 这相当于 $|\mu|(E \setminus A) = 0$. 若有 $A \in \tilde{\mathcal{S}}$ 使 μ 集中于 A 上而 ν 集中于 $X \setminus A$ 上, 称 μ 与 ν 相互奇异, 这记为 $\mu \perp \nu$.

(1) 如果 $\nu \perp \mu$, 则 $a\nu \perp \mu$, 其中 $-\infty < a < +\infty$.

(2) 设 $\nu_i \perp \mu$ 且 $\nu_1 + \nu_2$ 有意义, 则 $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

(3) 设 $\{X_n\}$ 是 X 相对于 $\tilde{\mathcal{S}}$ 的可测划分, 则可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上广义或复值测度 μ 与 ν 相互奇异当且仅当它们在每个可测子空间 $(X_n, \mathcal{S} \cap X_n)$ 上的限制相互奇异.

定理 7(Lehesgue 分解) 可测空间 X 上两个全 σ- 有限广义测度 ν 和 μ 对应唯一一对全 σ- 有限测度 (ν_s, ν_c) 使 $\nu = \nu_s + \nu_c$, $\nu_s \perp \mu$ 而 $\nu_c \ll \mu$.

习 题

练习 1 设 $(X,\mathcal{R},\mu)$ 是广义测度空间而 E 是 X 的可测集. 证明:

(1) F 取遍 E 的可测子集时, $\mu_\pm(E) = \sup\{\pm\mu(F) | F \subseteq E\}$.

(2) $\mathcal{D}$ 取遍 E 的可测划分时, $\mu_\pm(E) = \sup\limits_{\mathcal{D}} \sum\limits_{D \in \mathcal{D}} (\pm\mu(D)) \vee 0$.

练习 2 设 $\mu_1 \ll \mu_2$ 及 $\mu_2 \ll \mu_3$, 试证明 $\mu_1 \ll \mu_3$.

练习 3 设 $\mu = f d\nu$ 且 $\nu = g d\mu$. 设 μ 和 ν 是全 σ- 有限的, 证明 $fg \doteq 1$. 这几乎处处既相对于 $|\mu|$ 也相对于 $|\nu|$.

练习 4 约定 $1/0=+\infty$, 在 $[0,+\infty)$ 的 Borel 集代数上定义测度 μ 及 ν 使 $\mu(E)=\int\limits_E xdx$ 且 $\nu(E)=\int\limits_E \frac{dx}{x}$. 试证明它们等价并求它们相互的 Radon-Nikodym 导数.

练习 5 对于 $\mathbb{Z}$ 上的子集 E, 命 $\mu(E)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n^2\chi_E(n)$. 求 μ 关于 $\mathbb{Z}$ 上计数测度的 Radon-Nikodym 导数.

练习 6 设 $(X,\mathcal{R},\mu)$ 是全 σ- 有限测度空间, 而 f_i 是 X 上非负可测函数. 作测度 $d\nu_i=f_id\mu$. 试证明 $\nu_1\perp\nu_2$ 当且仅当 f_1f_2 关于 μ 几乎处处为零.

练习 7 对于 $\mathbb{R}^n$ 上两个复值 Borel 测度 μ 和 ν 与 Borel 集 E, 命

$$(\mu*\nu)(E)=\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\chi_E(x+y)\mu(dx)\nu(dy).$$

证明 (1) 所谓的*卷积*$\mu*\nu$ 也是复值 Borel 测度.

(2) 当 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 函数 f 关于 $|\mu|*|\nu|$ 的积分存在时, 下式有意义:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mu*\nu)(dx)=\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x+y)\mu(dx)\nu(dy).$$

练习 8 对于 Borel 集代数 $\mathcal{B}_n$ 上的复值测度 μ, 命

$$(F_\pm\mu)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(\pm 2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)\mu(dy), x\in\mathbb{R}^n$$

称 $F_+\mu$ 和 $F_-\mu$ 为 μ 的 Fourier 逆变换与变换, 这也记为 $\check{\mu}$ 和 $\hat{\mu}$. 试证明 μ 的 Fourier 变换与逆变换是一致连续函数且 $|\hat{\mu}|\leqslant\|\mu\|$.

练习 9 证明 Fourier 变换与逆变换将复值 Borel 测度的卷积转换为点态乘积:

$$F_\pm(\mu*\nu)=F_\pm(\mu)F_\pm(\nu).$$

进而证明 (1) 交换律: $\mu*\nu=\nu*\mu$.

(2) 结合律: $(\mu*\nu)*\lambda=\mu*(\nu*\lambda)$.

(3) Young 不等式: $\|\mu*\nu\|\leqslant\|\mu\|\|\nu\|$. 其中 $\|\mu\|$ 为 μ 的全变差.

(4) $\delta_0*\mu=\mu$, 其中 $\delta_0:E\mapsto\chi_E(0)$.

(5) 设 f 可积且 $\nu_f(dx)=f(x)dx$, 则 $\widehat{\nu_f}=\hat{f}$.

(6) $\nu_f*\mu=\nu_g$, 其中 $g(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\mu(dy)$.

(7) f 有界且一致连续时, (8) 中的 g 也有界且一致连续.

(8) 复值 Borel 测度 μ 的 Fourier 变换 $\hat{\mu}=0$ 时, $\mu=0$.

练习 10 设 $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上的测度序列使

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(E)=\mu_0(E):E\in\mathcal{S}.$$

证明：当 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是非负可测函数时,

$$\int_X f(x)\mu_0(dx)\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_X f(x)\mu_n(dx).$$

练习 11 设 μ,ν 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上两个概率测度，证明

$$\|\mu-\nu\|=2\max\{|\mu(E)-\nu(E)|:E\in\mathcal{S}\}.$$

练习 12 设 $(X,\mathcal{S})$ 是可测空间. 设 $Q:X\times\mathcal{S}\to[0,1]$ 为 **转移函数**: $x\in X$ 时, $Q(x,\cdot):\mathcal{S}\to[0,1]$ 是概率测度; $E\in\mathcal{R}$ 时, $Q(\cdot,E):X\to[0,1]$ 是可测函数. 对于 $(X,\mathcal{S})$ 上非负可测函数 f 与测度 μ, 命

$$(Tf)(x)=\int_X f(y)Q(x,dy):x\in X,$$

$$(T^*\mu)(E)=\int_X Q(x,E)\mu(dx):E\in\mathcal{S}.$$

证明 (1) $Tf:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是非负可测函数. 当 f 有界时, Tf 也有界.

(2)$T^*\mu:\mathcal{S}\to\overline{\mathbb{R}}$ 是测度且

$$\int_X f(y)(T^*\mu)(dy)=\int_X\mu(dx)\int_X f(y)Q(x,dy).$$

当 μ 是概率测度时, $T^*\mu$ 也是.

(3) 记 $\langle f,\mu\rangle=\int_X fd\mu$, 则 $\langle Tf,\mu\rangle=\langle f,T^*\mu\rangle$.

(4) 设 μ 是有限测度时 $\langle f,\mu\rangle=\langle g,\mu\rangle$, 则 $f=g$.

(5) 设 f 是有界可测函数时 $\langle f,\mu\rangle=\langle f,\nu\rangle$, 则 $\mu=\nu$.

练习 13 设 Q_i 都是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上的转移函数. 当 $x\in X$ 且 $E\in\mathcal{S}$ 时, 命

$$(Q_1*Q_2)(x,E)=\int Q_2(y,E)Q_1(x,dy).$$

证明 (1) Q_1*Q_2 也是转移函数使当 f 是非负可测函数时,

$$\int f(z)(Q_1*Q_2)(x,dz)=\int\int f(z)Q_2(y,dz)Q_1(x,dy).$$

(2) $(Q_1*Q_2)*Q_3=Q_1*(Q_2*Q_3)$, 其中 Q_3 也是转移函数.

(3) 如果 Q_i 对应 T_i, 证明 Q_1*Q_2 对应 T_1T_2 且 $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$.

(4) 归纳地命 $Q^1=Q$ 而 $Q^{n+1}=Q^nQ$, 证明 $Q^kQ^l=Q^{k+l}$.

练习 14 设 K 是复平面上非空紧集而 μ 是 K 上复值 Borel 测度，命

$$\tilde{\mu}(w) = \int\limits_K \frac{|\mu|(dz)}{|z-w|} : z \in \mathbb{C}.$$

试说明可测函数 $\tilde{\mu} : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ 在有界 Borel 集上按 Lebesgue 测度可积.

练习 15 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是广义测度空间，证明：

(1) 有限可加性： $\mu(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i)$.

(2) 分割测量性： $\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E)$.

(3) 可减性：若 $E \subseteq F$ 且 $\mu(E)$ 有限，则 $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

(4) 下连续性： (E_n) 递增至 E 时， $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$.

(5) 上连续性： (E_n) 递减至 E 且 $\mu(E_1)$ 有限时，上式成立.

(6) 证明 μ 能取到最大值和最小值并由此证明 Hahn 分解的存在性.

(7) 当 $E \in \mathcal{S}$ 且 $\mathcal{D}$ 取遍 E 的可测划分时

$$|\mu|(E) = \sup_{\mathcal{D}} \sum_{A \in \mathcal{D}} |\mu(A)|.$$

(8) 当 $\mathcal{D}$ 取遍 E 的由有限个可测集组成的可测划分时

$$|\mu|(E) = \sup_{\mathcal{D}} \sum_{A \in \mathcal{D}} |\mu(A)|.$$

(9) 当 $\mathcal{D}$ 取遍 E 的由有限个可测集组成的可测划分时

$$\mu_{\pm}(E) = \sup_{\mathcal{D}} \sum_{A \in \mathcal{D}} (\pm\mu(A)) \vee 0.$$

(10) 当 $E \in \mathcal{S}$ 时， $|\mu|(E) = \sup\{|\mu(E_1) - \mu(E_2)| : E = E_1 \sqcup E_2\}$.

练习 16 设 $\mathcal{R}$ 是环. 使 $\mu(\varnothing) = 0$ 的有限可加集函数 $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ 称为广义容度. 此时 μ 的值域不同时含 $+\infty$ 和 $-\infty$. 当 $E \in \mathcal{R}$ 且 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 取遍 E 的初等分解时，命

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)|,$$

$$\mu_{\pm} = \sup \sum_{i=1}^{n} (\pm\mu(A_i) \vee 0.$$

证明： (1) $|\mu|$ 和 $\mu_{\pm}$ 也是容度且 $|\mu|(E) \leqslant 2 \sup\limits_{F \subseteq E} |\mu(F)|$. 进而

$$|\mu|(E) = \sup\{|\mu(E_1) - \mu(E_2)| : E = E_1 \sqcup E_2\},$$

$$\mu_{\pm}(E) = \sup\{\pm\mu(F)| : F \subseteq E\}.$$

(2) 当 μ 有界时， $\mu^+ - \mu^- = \mu$ 且 $\mu^+ + \mu^- = |\mu|$.

练习 17 设 $\mathcal{R}$ 是环. 使 $\mu(\varnothing)=0$ 且具有有限可加性的集函数 $\mu:\mathcal{S}\to\mathbb{C}$ 称为复值容度. 当 $\mathcal{D}$ 取遍 E 的初等分解时, 命

$$|\mu|(E)=\sup\{\sum_{A\in\mathcal{D}}|\mu(A)|:\mathcal{D}\in\mathbf{P}(E)\}.$$

试证明 $|\mu|$ 是容度且 $|\mu|(E)\leqslant 4\sup_{F\subseteq E}|\mu(F)|$.

练习 18 设 μ 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上有界复值容度.

(1) f 是形如 $\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}$ 的简单函数时, 命

$$\int_X fd\mu=\sum_i a_i\mu(E_i).$$

说明上式右端不依赖于 f 的表示形式.

(2) 当 f 有界可测时, 取列简单函数 (f_n) 一致逼近 f, 说明 $(\int_X f_nd\mu)$ 是基本数列, 其极限记为 $\int_X fd\mu$, 它的定义合理 — 不依赖于 (f_n) 的取法.

(3) 说明关于有界容度的积分具有线性与有限可加性.

(4) 命 $\|f\|=\sup_{t\in X}|f(t)|$, 证明 $|\int_X fd\mu|\leqslant\|f\|\|\mu\|$.

(5) 当有界可测函数列 (f_n) 一致逼近 f 时, $\lim_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu=\int_X fd\mu$.

练习 19 在 Vitali-Hahn-Saks 定理中附设 μ 有限, 命 $\nu(E)=\lim_{n\to\infty}\nu_n(E)$, 证明 ν 是复值测度.

练习 20(Nikodym) 设 (μ_n) 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上一列复值测度使极限

$$\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(E):E\in\mathcal{S}$$

总存在, 则 μ 是复值测度且 (μ_n) 的可列可加性是一致的: (E_k) 递减至空集时, $\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant1}|\mu_n(E_k)|=0$.

练习 21 设 μ 和 ν 是可测空间 $(X,\mathcal{S})$ 上两个测度使 μ 是有限的且 $\nu\ll\mu$, 证明有 ν 的 σ- 有限集 A 使 A^c 的可测子集 E 总满足 $\nu(E)=0$ 或 $\nu(E)=+\infty$.

练习 22 证明任何广义测度关于它的全变差测度是强绝对连续的. 反之亦然.

练习 23 设 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 是可测空间 $(X, \mathcal{S})$ 上全 σ- 有限测度. 设 $t_1, \cdots, t_n$ 是非负实数使 $t_1 + \cdots + t_n = 1$. 证明:

(1) $t_1\mu_1 + \cdots + t_n\mu_n$ 是全 σ- 有限测度.

(2) 有唯一全 σ- 有限测度 $\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n}$ 使满足 $\mu_1 \ll \lambda, \cdots, \mu_n \ll \lambda$ 的全 σ- 有限测度 λ 都满足以下等式:

$$(\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n})(E) = \int_E \left(\frac{d\mu_1}{d\lambda}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\lambda}\right)^{t_n} d\lambda.$$

(3) 当 f 是可测函数而 λ 同上时, 下式在一边有意义时成立

$$\int_X f d(\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n}) = \int_X f \left(\frac{d\mu_1}{d\lambda}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\lambda}\right)^{t_n} d\lambda.$$

(4) 当 $\mathcal{D}$ 取遍 E 的可测划分时

$$\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n}(E) = \inf_{\mathcal{D}} \sum_{A \in \mathcal{D}} \mu_1(A)^{t_1} \cdots \mu_n(A)^{t_n}.$$

(5) 加权算术 - 几何平均不等式: $\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n} \leqslant t_1\mu_1 + \cdots + t_n\mu_n$.

练习 24 在练习 23 中, μ_1 和 μ_2 相互奇异当且仅当 $\sqrt{\mu_1\mu_2} = 0$. 一般地, 称 $\sqrt{\mu_1\mu_2}(X)$ 为 μ_1 和 μ_2 的 Kakutani 内积而 $(\mu_1 + \mu_2 - 2\sqrt{\mu_1\mu_2})(X)$ 为 μ_1 和 μ_2 的 Kakutani 距离.

练习 25 设 (X, μ_i) 和 (Y, ν_i) 都是全 σ- 有限测度空间使 $\mu_1 \ll \mu_2$ 且 $\nu_1 \ll \nu_2$, 证明 $\mu_1 \times \nu_1 \ll \mu_2 \times \nu_2$ 且

$$\frac{d(\mu_1 \times \nu_1)}{d(\mu_2 \times \nu_2)}(x, y) = \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x)\frac{d\nu_1}{d\nu_2}(y).$$

练习 26 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间. 如果 E 是可测集使 $\mu(E) = +\infty$, 证明要么 E 包含测度任意有限大的可测集, 要么 E 包含一个可测集 F 使 F 的任何可测子集 A 满足 $\mu(A) = 0$ 或 $\mu(A) = +\infty$.

练习 27 设 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 是测度空间. 如果 A 是测度为正的可测集且 A 的任何可测子集 B 满足 $\mu(B) = 0$ 或 $\mu(A \setminus B) = 0$, 称 A 是 *原子*. 证明 Lebesgue 测度空间 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \mathbf{m})$ 中无原子.

练习 28 设 $\{X_i|i \in J\}$ 是测度空间 $(X, \mathcal{S}, \mu)$ 中一簇相互不交的测度有限集使可测集 E 为零集当且仅当每个 $E \cap X_i$ 是零集，则称 $\{X_i\}$ 是 μ 的一个分解而 μ 是可分解测度. 如果进而 X 的子集 E 为可测集当且仅当每个 $E \cap X_i$ 是可测集，则称 $\{X_i\}$ 是 μ 的一个完全分解而 μ 为一个可完全分解测度.

(1) 如果 $\{X_i| \in J\}$ 是 μ 的一个分解，证明 $\mu(E) = \sum\limits_{i \in J} \mu(E \cap X_i)$.

(2) 每个可分解测度 μ 都能延拓成一个可完全分解测度 $\hat{\mu}$.

(3) 如果 $\{X_i\}$ 是 μ 的一个完全分解，证明 f 是 X 上可测函数当且仅当它在每个 X_i 上的限制是可测函数. 此时若 f 非负，证明 $\int\limits_X f d\mu = \sum\limits_{i \in J} \int\limits_{X_i} f d\mu$.

(4) 设测度 ν 关于测度 μ 绝对连续. 设 $\{X_i\}$ 是 ν 的一个分解且是 μ 的一个完全分解，证明有个非负函数 f 使 $d\nu = f d\mu$.

§4.4 Lebesgue-Stieltjes 积分

直线上 Lebesgue 测度的分布很均匀 — 平移不变的，但我们会经常遇到非均匀测度. 设在直线上分布了总质量有限的的物质. 以 $\mu(E)$ 表示 Borel 集 E 上那部分的质量，则 μ 是测度. 它显然不具有平移不变性. 为刻画这种类型的测度引进以下结论.

定理 1 设 X 是实直线中区间，其左右端点为 a 和 b. 作半环

$$\mathcal{P} = \{X \cap \{a\}, (u, v] | [u, v] \subseteq X\},$$

它生成的环记为 $\mathcal{R}$, 它生成的 σ- 环正是 X 中 Borel 集全体 $\mathcal{B}(X)$.

(1) 在 X 内部 (a, b) 右连续的递增函数 $g : X \to \mathbb{R}$ 诱导了 $\mathcal{R}$ 上有限测度 $\mathbf{m}_g$ 恒使 $\mathbf{m}_g(u, v] = g(v) - g(u)$ 且当 $a \in X$ 时 $\mathbf{m}_g\{a\} = g(a+) - g(a)$.

(2) 任何 Borel 测度 $\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$(在紧集上取有限值的测度) 是某个 $\mathbf{m}_g$ 的唯一测度延拓. 若 μ 还是 $\mathbf{m}_h$ 的测度延拓，则 g 与 h 相差一常数.

将测度 $\mathbf{m}_g$ 按 Carathéodory 条件延拓得到 σ- 代数 $\mathcal{R}^*$ 与测度 $\mathbf{m}_g^*$. 将 $\mathcal{R}^*$ 记为 $\mathcal{L}_g(X)$, 其成员称为 Lebesgue-Stieltjes 可测集，如 X 中 Borel 集都是 Lebesgue-Stieltjes 可测集. 将 $\mathbf{m}_g^*$ 简记为 $\mathbf{m}_g$, 这称为 Lebesgue-Stieltjes 测度. 函数 f 关于 Lebesgue-Stieltjes 测度 $\mathbf{m}_g$ 的积分 (存在时) 记为 $\int\limits_X f dg$.

当 $X = \mathbb{R}$ 且 $g(x) = x$ 时， $\mathbf{m}_g$ 是 Lebesgue 测度 $\mathbf{m}$.

例 1 符号同上. 当 $x \in X$ 且 $x > a$ 时,

$$\mathbf{m}_g\{x\} = \lim(g(x) - g(x - 1/n)) = g(x) - g(x-).$$

下求 X 中区间的 Lebesgue-Stieltjes 测度: $[u, v] \subseteq X$ 且 $u > a$ 时,

$$\mathbf{m}_g(u, v) = \mathbf{m}_g(u, v] - \mathbf{m}_g(\{v\}) = g(v-) - g(u),$$

$$\mathbf{m}_g[u, v) = \mathbf{m}_g(\{u\}) + \mathbf{m}_g(u, v) = g(v-) - g(u-),$$

$$\mathbf{m}_g[u, v] = \mathbf{m}_g(\{u\}) + \mathbf{m}_g(u, v] = g(v) - g(u-).$$

这表明单点集的 Lebesgue-Stieltjes 测度可能非零.

例 2 设 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是取整函数 $[x]$. 对任何整数 n, $g(n-) = g(n-1)$, 从而 $\mathbf{m}_g(n-1, n) = 0$. 因此 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (n-1, n)$ 的子集 E 都是 Lebesgue-Stieltjes 可测集且 $\mathbf{m}_g(E) = 0$. 又 $\mathbf{m}_g(\{n\}) = g(n) - g(n-) = 1$, 因此 $\mathbb{R}$ 的子集 E 都是 Lebesgue-Stieltjes 可测集且

$$\mathbf{m}_g(E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathbf{m}_g((n-1, n) \cap E) + \mathbf{m}_g(E \cap \{n\})) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_E(n).$$

由于 $E \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \chi_E(n)$ 是 $2^{\mathbb{R}}$ 上测度, $\mathcal{L}_g = 2^{\mathbb{R}}$.

函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 关于 $d[x]$ 可积当且仅当 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| < +\infty$. 此时

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d[x] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n).$$

这例子结合 Lebesgue 测度表明不同的右连续递增函数 g 对应的 $\mathcal{L}_g$ 可能不同. 尽管如此, 它们都包含 Borel 集.

定理 2 设 X 与 g 同定理 1. 对于 X 的子集 E, 成立外正则性:

$$\mathbf{m}_g^*(E) = \inf\{\mathbf{m}_g(U \cap X) | E \subseteq \text{开集} U\}.$$

进而以下条件等价: (1) E 是 Lebesgue-Stieltjes 可测集. 此时成立内正则性:

$$\mathbf{m}_g(E) = \sup\{\mathbf{m}_g(K) | \text{紧集} K \subseteq E\}.$$

(2) 对任意 $\varepsilon > 0$, 有包含 E 的开集 U 使 $\mathbf{m}_g^*((U \cap X) \setminus E) < \varepsilon$.
(3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 有含于 E 的闭集 F 使得 $\mathbf{m}_g^*(E \setminus F) < \varepsilon$.
(4) 有个包含 E 的 G_δ 型集 U 使 $\mathbf{m}_g^*(U \setminus E) = 0$.
(5) 有个含于 E 的 F_σ 型集 H 使 $\mathbf{m}_g^*(E \setminus H) = 0$.

设区间 X 上有界变差函数 g 在 X 内部右连续. 在实值情形, 取 g 的 Jordan 分解 $g = g(a) + g_+ - g_-$. 命 $\mathbf{m}_g = \mathbf{m}_{g_+} - \mathbf{m}_{g_-}$, 这得 $\mathcal{B}(X)$ 上有限广义测度 $\mathbf{m}_g$. 在复值情形, 命 $\mathbf{m}_g = \mathbf{m}_{\mathrm{re}\, g} + \sqrt{-1}\mathbf{m}_{\mathrm{im}\, g}$, 这得 $\mathcal{B}(X)$ 上复值测度 $\mathbf{m}_g$.

定理 3 以上 g 的全变差函数记为 h, 则 $\mathbf{m}_g$ 的全变差测度是 $\mathbf{m}_h$ (简记 $d\mathbf{m}_g$ 为 dg 而 $d\mathbf{m}_h$ 为 $|dg|$). 当 g 是实函数而 $g_\pm$ 为其正负变差函数时, dg 的正负变差测度是 $dg_\pm$(此即 $dg = dg_+ - dg_-$ 且 $|dg| = dg_+ + dg_-$).

设区间 X 上递增函数或有界变差函数 g 在 X 内部右连续. 函数 f 关于 dg 的积分 $\int\limits_X f dg$ 存在时称为 Lebesgue-Stieltjes 积分, 于是

$$\Big|\int\limits_X f dg\Big| \leqslant \int\limits_X |f|\,|dg| \leqslant \sup_{x\in X} |f(x)| \bigvee_X g.$$

例 3 设 g 是 $\mathbb{R}$ 上右连续的跳跃函数, 其不连续点集记为 D, 则 $|\mu_g|(\mathbb{R}\setminus D) = 0$ 而 $|D|_1 = 0$. 于是 μ_g 与 Lebesgue 测度相互奇异.

在 X 分别是 $[a,b], (a,b], [a,b), (a,b)$ 时, Lebesgue-Stieltjes 积分记为

$$\int\limits_a^b f dg, \int\limits_{a+}^b f dg, \int\limits_a^{b-} f dg, \int\limits_{a+}^{b-} f dg.$$

例 4 考虑 [0,1] 上的 Cantor 函数 φ. 因为 φ 在 O 的每个构成区间上为常数, 所以 $\varphi(O) = 0$. 又 $\varphi[0,1] = 1$, 所以 $\varphi(K) = 1$.

因此 $\int\limits_0^1 f d\varphi = \int\limits_K f d\varphi$. 但对于 Lebesgue 积分, $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_O f(x)dx$.

当 $a < u$ 时, 据例 1 将 f 在 $[u,v], (u,v], [u,v), (u,v)$ 上的积分记为

$$\int\limits_{u-}^v f dg, \int\limits_u^v f dg, \int\limits_{u-}^{v-} f dg, \int\limits_u^{v-} f dg.$$

当 g 在 u 连续时, 第一个与第二个相等, 而第三个与第四个相等. 当 g 在 v 连续时, 第一个与第三个相等, 而第二个与第四个相等.

例 5 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间. 设 $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ 是随机变量 (即可测函数), 它诱导了 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ 上一个概率测度 μ: 当 B 是 Borel 集时, $\mu(B) = P\xi^{-1}(B)$. 当 t 是实数时, 命 $F(t) = P(\xi \leqslant t)$, 称 F 称为 ξ 的分布函数, 它有以下性质:

(1) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是右连续的递增函数.

(2) $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t) = 0$ 而 $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$.

(2) $dF(t) = \mu(dt)$: 即 $P(a < \xi \leqslant b) = F(b) - F(a)$. 进而

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(t)dF(t) = \int\limits_{\Omega} g(\xi(\omega))P(d\omega).$$

也有人将 F_1 称为 ξ 的分布函数，其中 $F_1(t)=P(\xi<t)$，则 $F_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是左连续的递增函数使 $P(a\leqslant\xi<b)=F_1(b)-F_1(a)$. 于是

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(t)dF_1(t)=\int\limits_{\Omega} g(\xi(\omega))P(d\omega),$$

其中 dF_1 是 F_1 作为左连续的递增函数诱导的测度 (参见本节练习 2). 命

$$f(t)=\int\limits_{\Omega}\exp(\sqrt{-1}t\xi(\omega))P(d\omega)=\int\limits_{\mathbb{R}}\exp(\sqrt{-1}tx)dF(x).$$

这是 Borel 测度 $dF(x)$ 的 Fourier 变换. 常将 f 称为 ξ 的特征函数.

定理 4(分部积分) 设区间 X 上无公共不连续点的有界变差函数 g 与 h 在 X 内部右连续，则 $gdh+hdg=d(gh)$: 当 f 是 X 上有界 Borel 函数时,

$$\int\limits_X fgdh+\int\limits_X fhdg=\int\limits_X fd(gh).$$

考虑区间 $[0,1]$ 上 Cantor 函数 φ，它是连续的递增函数. 分部积分得

$$\int\limits_0^1 xd\varphi(x)+\int\limits_0^1\varphi(x)dx=\int\limits_0^1 d(x\varphi(x)).$$

它的值是 $1\varphi(1)-0\varphi(0)=1$. 一般地，如果 g 与 h 有公共不连续点，则分部积分不成立. 为此命 g 和 h 都是 $[0,+\infty)$ 的特征函数. 则

$$\int\limits_{(-1,1]} d(gh)=1\neq 2=\int\limits_{(-1,1]}(gdh+hdg).$$

现推广 Riemann 积分中变量代换公式.

定理 5 当 g 是区间 X 上绝对连续函数时,

$$\int\limits_X f(x)dg(x)=\int\limits_X f(x)g'(x)dx.$$

现用 Lebesgue-Stieltjes 积分可讨论曲线积分. 设 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 是一条只有有限个自交点的可求长连续曲线. 全变差函数 $\bigvee\gamma$ 诱导了 $\mathcal{B}[a,b]$ 上一个测度 μ. 这记为 $|d\gamma|$. 后者在 $\Gamma=\{\gamma(t)|t\in[a,b]\}$ 上诱导了一个孤长测度 $\sigma(dx)$: 当 E 是 Γ 的 Borel 集时, $\sigma(E)=\mu(\gamma^{-1}(E))$. 此时,

$$\int\limits_\Gamma f(x)\sigma(dx)=\int\limits_a^b f(\gamma(t))|d\gamma|(t)=\int\limits_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

其中第二个等号要求 γ 绝对连续 (下同). 规定 f 沿曲线 γ 的积分

$$\int\limits_\gamma f(x)dx=\int\limits_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t)=\int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

定理 6 全变差一致有界的函数列 $(g_n : X \hookrightarrow \mathbb{C})_{n=0}^{\infty}$ 在区间 X 内部都右连续且在 X 的端点或 g_0 的连续点逼近 g_0, 则 $f : X \to \mathbb{C}$ 有界连续时

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f dg_n = \int_X f dg.$$

如果 f 不连续，定理 6 可能不对. 如区间 $[0,1]$ 上函数列 $g_n : x \mapsto \theta(x - \dfrac{n-1}{n})$ 逐点逼近 $g : x \mapsto \theta(x-1)$. 它们在 $[0,1]$ 上全变差都是 1 且在 $(0,1)$ 右连续. 命 f 为 $[0,1)$ 的特征函数, 则 $\int f dg_n = 1$ 而 $\int f dg = 0$.

习 题

练习 1 如果右连续函数递增函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 诱导的 Lebesgue-Stieltjes 测度是平移不变的: $\mathbf{m}_g(x+E) = \mathbf{m}_g(E)$ 恒对, 证明有常数 a 和 b, 使 $g(x) = ax+b$.

练习 2 集类 $\{[a,b) | -\infty < a \leqslant b < +\infty\}$ 生成的环记为 $\mathcal{R}$. 证明:

(1) 任何左连续的递增函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 都诱导了 $\mathcal{R}$ 上一个测度 μ 恒使 $\mu[a,b) = g(b) - g(a)$, 将 μ 记为 $\mathbf{n}_g$.

(2) $\mathcal{B}_1$ 上任何 Borel 测度 μ 都是某个 $\mathbf{n}_g$ 的唯一测度延拓.

练习 3 设 X 是直线上的 Borel 集而 μ 是 $\mathcal{B}(X)$ 上 σ- 有限测度, 证明存在可列个右连续的递增函数 $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 恒使 $\mu(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}_{g_n}(E)$.

练习 4 设有界变差函数 $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ 在 (a,b) 右连续, Borel 函数 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 关于 $|dg|$ 可积. 试证明 $h : x \mapsto \int\limits_{[a,x]} f(t)dg(t)$ 是有界变差函数.

练习 5 设 L 是复平面上有限条可求长连续曲线之无交并. 以 x 表示实部, 证明使直线 $x = c$ 与 L 有无限个交点的 c 的全体 E 是实直线上 Lebesgue 零集.

练习 6 设复平面区域 M 的边界 L 是有限条可求长 Jordan 曲线. 证明: 对于 $\delta > 0$, 有间距为 δ 的两组相互直交的平行线划分 M 为有限个区域 $M_1, \cdots, M_n$.

* **练习 7** 设 M 是复平面上有界开区域, 其正定向的边界 L 是有限条可求长的 Jordan 曲线. 如果连续函数 $f : M \cup L \to \mathbb{C}$ 在 M 中全纯, 证明

$$\int_L f(z)dz = 0.$$

练习 8 不用分部积分证明本节定理 6.

练习 9 试写出并证明 Lebesgue-Stieltjes 可测函数对应的 Лузин 定理.

练习 10(积分第二中值定理) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是递增函数而 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续的有界变差函数, 证明有 x_0 使 $a\leqslant x_0\leqslant b$ 且

$$\int_a^b fdg=f(a)(g(x_0)-g(a))+f(b)(g(b)-g(x_0)).$$

也有 x_1 使 $a<x_1<b$ 且

$$\int_a^b fdg=f(a+)(g(x_1)-g(a))+f(b-)(g(b)-g(x_1)).$$

练习 11 求 Heaviside 函数 $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 对应的 $\mathcal{L}_\theta$ 与 $\mathbf{m}_\theta$.

练习 12 设 f 和 g 是区间 X 上有界变差函数, 它们在 X 内部右连续. 如果 $u<v$ 使 $[u,v]\subseteq X$, 证明

$$\int_{(u,v]} h(x)dg(x)+\int_{(u,v]} g(y-)dh(y)=g(v)h(v)-g(u)h(u).$$

第 5 章

距离与点集分析

直观而言，距离是两“点”之间的一种联系方式，其显著特点是三“点”组成的“三角形”中，两边长度和不小于第三边之长．据此观念推广而得到的度量空间将人们从有限维空间的分析学引向无限维空间的分析学并取得了丰富的成果．

§5.1 度量空间

引进距离是为了刻画一些极限运算，这包括某些条件下的点态收敛、一致收敛、依测度收敛、内闭一致收敛、各阶偏导数一致收敛等．因此本节首先学会怎样对某些极限运算定义一个适当的距离．

距离 设 X 是非空集合．设函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 满足

(1) 对角平凡性： $x\in X$ 时， $d(x,x)=0$;

(2) 对称性： $x,y\in X$ 时， $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) 三角不等式： $x,y,z\in X$ 时， $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,

则称 d 是 X 上一个伪度量．其中 (3) 可换成以下条件 (4):

(4) 三角不等式： $|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$.

称伪度量 d 是一个度量是指它还满足以下条件：

(5) 分离性： $d(x,y)=0$ 时， $x=y$(或 $x\neq y$ 时， $d(x,y)\neq 0$).

此时称 $d(x,y)$ 为两点x 和 y 的距离， (X,d) 称为度量空间．

无混淆时， (X,d) 简记为 X．从三角不等式归纳地可得到以下不等式

$$d(x_0,x_n)\leqslant d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2)+\cdots+d(x_{n-1},x_n).$$

上式中命 $x_0=x_1=x_3=x, x_2=y$ 得

$$\begin{aligned}d(x,x)&\leqslant d(x,x)+d(x,y)+d(y,x)\\&=d(x,x)+2d(x,y)\Rightarrow d(x,y)\geqslant 0.\end{aligned}$$

由此 (伪) 度量具有非负性： $d(x,y)\geqslant 0$.

例 1 非空集合 X 上可有定义很多距离. 如固定 $r>0$, 当 $x\neq y$ 时, 命 $d_r(x,y)=r$ 而 $d_r(x,x)=0$. 这得 X 上度量 d_r.

用度量刻画的极限与数列极限有统一的定义方式.

极限 (伪) 度量空间 (X,d) 中序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 逼近或收敛于 x_0 而称 x_0 是 (x_n) 是的极限并记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 是指 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x_0)=0$, 这即

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n\geqslant m: d(x_n,x)<\varepsilon.$$

称 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 基本序列 或 Cauchy 序列 是指 $\lim\limits_{n,l\to\infty}d(x_n,x_l)=0$, 这即

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n,l\geqslant m: d(x_n,x_l)<\varepsilon.$$

基本序列都收敛的度量空间称为 完备空间.

(1) 度量空间中收敛序列是基本序列且其极限是唯一的.

(2) 当 (x_n) 是基本序列时, 数列 $(d(x_n,x_k))_{k=1}^{\infty}$ 是基本数列:

$$\overline{\lim_{k,l\to\infty}}|d(x_n,x_k)-d(x_n,x_l)|\leqslant\overline{\lim_{k,l\to\infty}}d(x_k,x_l)=0.$$

据 Cauchy 收敛原理, $(d(x_n,x_k))_{k=1}^{\infty}$ 是收敛数列. 进而可得

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}d(x_n,x_k)=0.$$

(3) 有收敛子列 (x_{k_n}) 的基本序列 (x_n) 也收敛. 为此设 (x_{k_n}) 逼近 x, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}d(x_n,x)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}(d(x_n,x_{k_n})+d(x_{k_n},x))=0.$$

(4) 可将 (伪) 度量 d 有界化而不改变收敛性. 如命 $\tilde{d}=d\wedge 1$, 则

$$\lim\tilde{d}(x_n,x)=0\Leftrightarrow\lim d(x_n,x)=0.$$

这是因为当 $0<\varepsilon<1$ 时, $d(x_n,x)<\varepsilon\Leftrightarrow\tilde{d}(x_n,x)<\varepsilon$.

在 Euclid 距离下, Euclid 空间都是完备的.

例 2 集合 M 上函数 $g:M\to\mathbb{C}$ 全体 $\mathbb{C}^M$ 这个集合上可定义一簇伪度量 $d_t(g,h)=|g(t)-h(t)|:t\in M$ 和一个度量 $d'(g,h)=\sup\limits_{t\in M}d_t(g,h)\wedge 1$.

(1) 函数列 (f_n) 一致逼近 f 当且仅当 $\lim\limits_{k\to\infty}d'(f_k,f)=0$. 可见一致收敛可由度量刻画. 从数学分析的相关结论知 $(\mathbb{C}^M,d')$ 是完备的.

(2) 函数列 (f_n) 点态逼近 f 当且仅当 $t\in M$ 时, $\lim d_t(f_n,f)=0$. 可见点态收敛可由一簇伪度量刻画. 于是问: 点态收敛可否由一个度量刻画呢? 在 M 不可数时, 答案是否定的. 这见 §5.4 例 2.

(3) 在 M 可数时, 以上问题的答案是肯定的. 为此设 $a_t > 0$ 使级数 $\sum\limits_{t\in M} a_t$ 收敛, 命 $d(f,g) = \sum\limits_{t\in M} d_t(f,g) \wedge a_t$, 得度量空间 $(\mathbb{C}^M, d)$, 则函数列 (f_n) 点态逼近 f 当且仅当 $\lim d(f_n, f) = 0$.

必要性: 对任何 $\varepsilon > 0$, 取 M 的有限子集 F 使 $\sum\limits_{t\notin F} a_t < \varepsilon$. 设 $n > m$ 时, $\sum\limits_{t\in F} d_t(f_n, f) < \varepsilon$. 这样

$$d(f_n, f) \leqslant \sum_{t\in F} d_t(f_n, f) + \sum_{t\notin F} a_t < 2\varepsilon.$$

因此 $\lim d(f_n, f) = 0$. 充分性源自不等式 $d_t(f_n, f) \wedge a_t \leqslant d(f_n, f)$.

上例最后的方法可用来证明以下结论.

定理 1 设 X 上有可数个 (伪) 度量 $d_i : i \in I$ 而 $a_i > 0$ 使级数 $\sum\limits_{i\in I} a_i$ 收敛. 规定 X 上 (伪) 度量 d 使 $d(x,y) = \sum\limits_{i\in I} d_i(x,y) \wedge a_i$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ 当且仅当 $i \in I$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} d_i(x_n, x) = 0$.

(2) $\lim\limits_{n,l\to\infty} d(x_n, x_l) = 0$ 当且仅当 $i \in I$ 时 $\lim\limits_{n,l\to\infty} d_i(x_n, x_l) = 0$.

这定理可理解为可数个 (伪) 度量刻画的收敛可由一个 (伪) 度量刻画.

例 3 集合 M 上有界函数全体 $l^\infty M$ 上有个度量

$$d(g,h) = \sup_{t\in M} |g(t) - h(t)|.$$

这个度量刻画了有界函数列的一致收敛: 有界函数列 (f_k) 一致收敛于 f 当且仅当 $\lim\limits_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0$. 又从数学分析知 $l^\infty M$ 是完备的.

虽然例 2 中的 d' 和例 3 中的 d 都刻画了一致收敛, 但例 3 中 d 不能代替例 2 中 d'. 原因在于 M 上的函数可能无界从而可使 $\sup\limits_{t\in M} |g(t) - h(t)| = +\infty$, 而本书中不将无穷大作为距离的值.

范数 设 X 是数域 $\mathbb{K}$(它代表实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 之一) 上的线性空间. 设函数 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ 满足以下条件:

(1) 齐次性: $x \in X$ 与 $a \in \mathbb{K}$ 时, $\|ax\| = |a|\|x\|$;

(2) 次可加性: 对于 $x, y \in X$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(3) 分离性: $\|x\| = 0$(这 0 代表数零) 时, $x = 0$(这 0 代表零向量),

称 $\|\cdot\|$ 是范数而 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范空间. 范数有以下性质:

(4) 零向量的范数为零且半范数是非负的: $\|x\| \geqslant 0$.

(5) $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

(6) 范数诱导一个度量: $d(x, y) = \|x - y\|$. 赋范空间中序列 (x_n) 依距离收敛 (也称为依范数收敛) 于 x 相当于 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

(7) 在 (x_n) 是基本序列时, $(\|x_n\|)$ 是收敛数列.

(8) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

(9) 完备的赋范空间称为 Banach 空间.

若无特别表明, Euclid 空间中 $\mathbb{K}^n$ 总取范数 $|x| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.

例 4 命 $l^\infty(M)$ 同例 3, 它按*上确界范数*或*最大模* $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in M\}$ 成为赋范空间使距离 $d(g, h) = \|g - h\|$. 因此 l^∞ 是 Banach 空间, 其中收敛是一致收敛.

(1) 因为一致收敛保持连续性, 所以区间 $[a, b]$ 上连续函数全体 $C[a, b]$ 按上确界范数 (也称为 Чебышев 范数) 是 Banach 空间.

(2) 将 $l^\infty(\mathbb{Z}_+)$ 简记为 l^∞. 因为 $\mathbb{Z}_+$ 上的函数可视为数列, 所以 l^∞ 中向量 x 都是有界数列 $(x_n)_{n=1}^\infty$, 上确界范数也记为 $\|x\|_\infty$.

(3) 收敛数列 (即 $\lim x_n$ 存在且有限) 全体 $\mathbf{c}$ 与无穷小量 (即 $\lim x_n = 0$) 全体 $\mathbf{c}_0$ 作为 l^∞ 的线性子空间, 按范数 $\|\cdot\|_\infty$ 也是 Banach 空间.

例 5 将测度空间 (M, μ) 上几乎处处相等的函数视为一个函数. 本性有界函数 $f : M \to \mathbb{C}$ 全体 $L^\infty(M, \mu)$ 按本性最大模

$$\|f\|_\infty = \min\{c | 0 \leqslant c \leqslant +\infty, |f| \dot{\leqslant} c\}$$

成为 Banach 空间, 其中收敛是几乎匀敛. 请注意, $L^\infty(M, \mu)$ 中的每个点都是一个等价类 $[f]$(与本性有界函数 f 几乎处处相等的可测函数全体), 只不过是我们将 $[f]$ 简写为 f 罢了.

设 $1 \leqslant p < +\infty$, 则 p 方可积函数 $f : M \to \mathbb{C}$ 全体 $L^p(M, \mu)$ 按范数

$$\|f\|_p = (\int\limits_M |f(x)|^p \mu(dx))^{1/p}$$

成为 Banach 空间, 其中的收敛就是依 p 方平均收敛. 请注意, $L^p(M, \mu)$ 中的每个点都是一个等价类 $[f]$(与 p 方可积函数 f 几乎处处相等的所有可测函数全体), 只不过是我们将 $[f]$ 简写为 f 罢了.

例 6 设 J 是非空集合 (如 $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z}_+$ 等), $1 \leqslant p < +\infty$, 命

$$l^p(J) = \{x : J \to \mathbb{C} \mid \|x\|_p = (\sum_{i \in J} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty\},$$

其中将函数 x 在 i 的值记为 x_i. 这可视为 J 上取计数测度 $|\cdot|_0$ 后的 $L^p(J, |\cdot|_0)$.

(1) $l^p(\mathbb{Z}_+)$ 简记为 l^p, 这是 p 方可和数列全体. 第 n 项为 1 其他项为 0 的数列 e_n 在 l^p, l^∞ 和 $\mathbf{c}, \mathbf{c}_0$ 中. 而各项为 1 的数列 e 仅在 l^∞ 与 $\mathbf{c}$ 中. 以后遇到这些空间时, e_n 与 e 皆是此意.

(2) 对于 $x \in l^p$ 或 $x \in \mathbf{c}_0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ 的 Cauchy 和是 x. 为此将其部分和序列记为 (s_n), 则 $x - s_n = (0, \cdots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$. 于是

$$x \in l^p \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \|x - s_n\|_p = \lim_{n \to \infty} (\sum_{i > n} |x_i|^p)^{1/p} = 0,$$

$$x \in \mathbf{c}_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \|s_n - x\|_\infty = \lim_{n \to \infty} \sup_{i > n} |x_i| = 0.$$

(3) 对于 $x \in \mathbf{c}$, 记 $a = \lim x_n$, 则 $x - ae$ 是极限为零的数列 (即 $x - ae$ 在 $\mathbf{c}_0$ 中). 据 (2) 知 $x - ae = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - a) e_n$. 换言之, $x = ae + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - a) e_n$.

(4) 只有有限项非零的数列 (如 $(1, 2, 3, 0, 0, \cdots)$) 全体 l^0 是所有 l^p 和 $\mathbf{c}_0$ 及 $\mathbf{c}$ 的线性子空间. 这个空间可据需要任意赋范而得一些有意义的反例.

上例中提到的级数是 Banach 空间中的级数, 这是一种向量值级数.

级数 (1)Cauchy 和: 赋范空间 X 中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的 Cauchy 和为 x 是指

$$\lim_{n \to \infty} (x_1 + \cdots + x_n) = x.$$

(2) Cauchy 收敛原理: Banach 空间 X 中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 有 Cauchy 和当且仅当对于 $\varepsilon > 0$, 有 $m \geqslant 1$ 使 $m \leqslant n \leqslant l$ 时, $\|\sum\limits_{n < i \leqslant l} x_i\| < \varepsilon$.

(3) 可和级数: 赋范空间 X 中级数 $\sum\limits_{i \in J} x_i$ 可和且和为 x 是指: 对于 $\varepsilon > 0$, 存在 J 的有限子集 F_0 使 J 的有限子集 F 包含 F_0 时, $\|\sum\limits_{i \in F} x_i - x\| < \varepsilon$. 这即有限子集 F 越来越大时, 部分和 $\sum\limits_{i \in F} x_i$ 逼近级数和. 约定 $\sum\limits_{i \in \varnothing} x_i = 0$.

(4) 可和准则: Banach 空间 X 中级数 $\sum\limits_{i \in J} x_i$ 可和当且仅当对于 $\varepsilon > 0$, 存在 J 的有限子集 F_0 使 J 的有限子集 F 与 F_0 不交时, $\|\sum\limits_{i \in F} x_i\| < \varepsilon$.

(5) 绝对可和性： Banach 空间中使 $\sum_{i\in J}\|x_i\|$ 有限的级数 $\sum_{i\in J}x_i$ 可和.

级数 $\sum_{i\in I}a_ix_i$ 使系数 a_i 不为零的项数有限时称为线性组合，这在一般线性空间中都有意义. 有无限项不为零的级数则需要考虑收敛性并将级数之和理解为部分和的极限，而线性组合则不需要考虑极限问题.

定理 2 度量空间 (X,d) 完备当且仅当其中使 $\sum_{n=1}^{\infty}d(x_n,x_{n+1})$ 可和的序列 (x_n) 收敛. 赋范空间 Y 完备当且仅当其中使 $\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|$ 可和的级数 $\sum_n y_n$ 可和.

对于度量空间 (X,d) 的子集 S, 约定其直径

$$\operatorname{diam}S=\sup\{d(x,y)|x,y\in S\}.$$

约定 $\operatorname{diam}\varnothing=0$. 对于 X 中的点 x 与正数 r, 作

$$\text{开球}O(x,r)=\{y\in X:d(y,x)<r\},$$
$$\text{闭球}B(x,r)=\{y\in X:d(y,x)\leqslant r\},$$
$$\text{球面}S(x,r)=\{y\in X:d(y,x)=r\}.$$

需要注意，半径为 r 的开球与闭球的直径不一定是 $2r$. 如 $\mathbb{Z}$ 继承 $\mathbb{R}$ 中度量后，开球 $O(1,1)$ 是单点集 $\{1\}$ 而其直径为 0.

(1) S 是有界集 — 直径有限的集当且仅当有个开球 $O(x,r)$ 包含 S.

(2) 度量空间中基本序列是有界的.

(3) X 是赋范空间时， S 有界当且仅当 $\sup\{\|x\|:x\in S\}<+\infty$.

习 题

练习 1 对于度量空间 X 的子集 A 与 B, 命 $\rho(A,B)=\sup_{x\in A,y\in B}d(x,y)$, 其中约定 $\sup\varnothing=0$. 说明 ρ 满足三角不等式.

练习 2 设 d_Y 是 Y 上的伪度量，任意映射 $A:X\to Y$ 都能诱导 X 上一个伪度量 d_X 使 $d_X(x_1,x_2)=d_Y(Ax_1,Ax_2)$. 何时 d_X 是度量？

练习 3 对于 X 上 (伪) 度量 d, 证明 $d/(1+d)$ 是 X 上有界 (伪) 度量且不改变收敛性 (提示：区间 $[0,+\infty)$ 上函数 $t\mapsto t/(1+t)$ 严格递增).

练习 4 全有限测度空间 (M,μ) 上复值可测函数全体记为 $L(M,\mu)$, 其中几乎处处相等的函数视为一个函数. 在这种同一化后, 规定

$$d(f,g)=\int_M \frac{|f(t)-g(t)|}{1+|f(t)-g(t)|}\mu(dt).$$

试证明 d 是 $L(M,\mu)$ 上的度量并且它刻画了依测度收敛.

练习 5 命 $\mu(E)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{-k}\chi_E(k)$, 这得全有限测度空间 $(\mathbb{Z}_+,2^{\mathbb{Z}_+},\mu)$.

(1) 对于 $\mathbb{Z}_+$ 上函数 f 和 g, 按练习 4 定义的距离 $d(f,g)$ 是

$$d(f,g)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|f(i)-g(i)|}{2^i(1+|f(i)-g(i)|)}.$$

(2) $\mathbb{Z}_+$ 上函数列 (f_n) 依测度收敛于函数 f 当且仅当 (f_n) 点态收敛于 f 当且仅当 (f_n) 依以上距离收敛于 f.

练习 6 定义测度 μ 使测度空间 $(X,2^X,\mu)$ 上的依测度收敛就是一致收敛.

练习 7 证明: 在范数 $\|f\|=\sum\limits_{i=0}^{k}\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(i)}(x)|$ 下, 区间 $[a,b]$ 上 k 阶连续可导函数全体 $C^k[a,b]$ 是 Banach 空间 (提示: 参见例 4).

练习 8 使 $\inf\{d(x,y)|x,y\in X:x\neq y\}>0$ 的度量空间 X 称为一致离散的. 试证明一致离散度量空间是完备的.

练习 9 设 $X_i:i\in J$ 是一簇赋范空间而 $1\leqslant p<+\infty$. 对于 $x\in\prod\limits_{i\in J}X_i$, 命

$$\|x\|_p=\left(\sum\|P_ix\|^p:i\in J\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 P_ix 表示 x 的第 i 个分量. 作 $X_i:i\in J$ 的 l^p- 积

$$X=\bigoplus_{i\in J}{}^pX_i:=\{x\in\prod_{i\in J}X_i:\|x\|_p<+\infty\},$$

证明 $(X,\|\cdot\|_p)$ 是赋范空间且它完备当且仅当每个 X_i 完备.

练习 10 设 $X_i:i\in J$ 是一簇赋范空间. 对于 $x\in\prod\limits_{i\in J}X_i$, 命

$$\|x\|_\infty=\sup\{\|P_ix\|:i\in J\},$$

其中 P_ix 表示 x 的第 i 个分量. 作 $X_i:i\in J$ 的 l^∞- 积

$$X=\bigoplus_{i\in J}{}^\infty X_i:=\{x\in\prod_{i\in I}X_i:\|x\|_\infty<+\infty\}.$$

证明赋范空间 $(X,\|\cdot\|_\infty)$ 完备当且仅当每个 X_i 完备.

练习 11 设 M 是非空集合而 X 是 [完备] 赋范空间. 证明:

(1) 向量值函数 $f: M \to X$ 全体 X^M 按 d 成为 [完备] 度量空间, 其中

$$d(g,h) = \sup\{\|f(t)\| \wedge 1 : t \in M\}.$$

而 X^M 中的序列 (f_n) 收敛于 f 当且仅当 (f_n) 一致收敛于 f:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m, \forall n \geqslant m \forall t \in M : \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon.$$

(2) 有界函数 $f: M \to X$ 全体 $l^\infty(M, X)$ 按范数 $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t \in M} \|f(t)\|$ 成为 [完备] 赋范空间, 其中收敛也是一致收敛.

练习 12 设 $(M, \mathcal{S})$ 是可测空间而 X 是 Banach 空间. 设集函数 $\mu: \mathcal{S} \to X$ 为向量值测度 — 它满足可列可加性: 当 E 有可测划分 $\{E_k\}$ 时,

$$\mu(E) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots.$$

证明: (1) 可测集列 (E_n) 递增或递减至 E 时, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$.

(2) 以 $\mathrm{vc}(M, X)$ 记上述 μ 的全体, 它按 $\|\cdot\|$ 成为赋范空间, 其中

$$\|\mu\| = \sup\{\|\mu(E)\| : E \in \mathcal{S}\}.$$

(3) 对于可测集 E, 当 $\mathcal{D}$ 取遍 E 的可测划分时, 命

$$|\mu|(E) = \sup\{\sum_{F \in \mathcal{D}} \|\mu(F)\| : \mathcal{D}\},$$

则 $|\mu|$ 是个测度 (可能取 $+\infty$ 值), 称为 μ 的全变差测度.

(4) 使 $|\mu|$ 有限的向量值测度 μ 全体 $\mathrm{ca}(M, X)$ 按全变差 $\|\cdot\|_{\mathrm{v}}$ 是 Banach 空间, 其中 $\|\mu\|_{\mathrm{v}} = \sup\{|\mu|(E) : E \in \mathcal{S}\}$.

练习 13 设 X 是 Banach 空间而 $a, b \in X$. 归纳地命 $x_0 = a, x_1 = b$ 及 $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1} + x_n}{2}$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

练习 14 设 $0 < p < 1$. 测度空间 (M, μ) 上使 $\|f\|_p$ 有限的可测函数 f 全体记为 $L^p(M, \mu)$, 其中几乎处处相等者视为一样的. 证明:

(1) $L^p(M, \mu)$ 是线性空间, 它按 d_p 成为完备度量空间, 其中

$$d_p(f, g) = \int_M |f - g|^p d\mu.$$

(2) $L^p(M, \mu)$ 的单位球 $B = \{f \in L^p | d_p(f, 0) \leqslant 1\}$ 不必是凸集.

练习 15 测度空间 (M,μ) 上的复值可测函数全体记为 $L(M,\mu)$, 其中几乎处处相等的函数视为一个函数. 在这种同一化后, 规定

$$d(f,g)=1\wedge\inf\{\varepsilon>0:\mu(|f-g|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon\}.$$

(1) 试证明 d 是 $L(M,\mu)$ 上的度量且它刻画了依测度收敛.

(2) 举例说明 $L(M,\mu)$ 上没有范数刻画依测度收敛.

练习 16 证明: Banach 空间 X 中可和级数 $\sum\limits_{i\in J}x_i$ 的缺项级数 $\sum\limits_{i\in I}x_i$(即 I 是 J 的子集) 也可和.

§5.2 度量拓扑

本节逐一介绍度量空间中重要点集概念.

开集与闭集 设 U 是度量空间 (X,d) 中的子集. 若有 $r>0$ 使 $O(x,r)\subseteq U$, 则称 x 是 U 的内点, U 是 x 的邻域而 $U\setminus\{x\}$ 是 x 的去心邻域.

若 U 不含非内点的点, 则称 U 为 X 的开集. 若 E 是 X 的子集使 $X\setminus E$ 是开集, 则称 E 是 X 的闭集. 度量空间中开集全体称为度量拓扑. 以下是开集和闭集的一些简单有用的性质.

(1) 空集与全空间都是开集; 空集与全空间都是闭集.

(2) 任意个开集之并是开集; 任意个闭集之交是闭集.

(3) 有限个开集之交是开集; 有限个闭集之并是闭集.

(4) 开集减闭集之差是开集; 闭集减开集之差是闭集.

像 Euclid 空间一样, $O(x,r)$ 与 $B(x,r)$ 分别是开集与闭集, 它们都是 x 的邻域. 球面和有限子集是闭集. 空集不含点, 它符合开集的定义.

例 1 整数集 $\mathbb{Z}$ 继承 $\mathbb{R}$ 的度量后是离散空间— 每个子集都是开集 (也是闭集) 的度量空间. 这是因为 $\mathbb{Z}$ 中单点集 $\{n\}$ 都是半径为 1 的开球.

不同度量可能诱导相同的拓扑. 这见下例.

例 2 设 $\tilde{d}=d\wedge 1$. 当 $0<r\leqslant 1$ 时, $\tilde{O}(x,r)=O(x,r)$. 因此 $(X,\tilde{d})$ 中开集也是 (X,d) 中开集. 反之亦然.

一般而言, (X,d_1) 的开集都是 (X,d_2) 的开集当且仅当对任何 $x\in X$ 和任何 $r>0$, 存在 $s>0$ 使 $O_2(x,s)\subseteq O_1(x,r)$.

乘积空间的点集 对于度量空间 (X,d) 与 (Y,d)— 不同集合上的度量可用同一个符号表示，将 $X\times Y$ 的点 (x,y) 简记为 z，在 $X\times Y$ 上定义一些度量：

$$d(z_1,z_2)=\max\{d(x_1,x_2),d(y_1,y_2)\},$$
$$d_p(z_1,z_2)=(d(x_1,x_2)^p+d(y_1,y_2)^p)^{\frac{1}{p}}.$$

(1) $1\leqslant p<+\infty$ 时，$O(z,2^{\frac{1}{p}}r)\subseteq O_p(z,r)\subseteq O(z,r)$.

(2) (Z,d) 与 (Z,d_p) 有相同度量拓扑且其开集 W 都形如 $\bigcup\{U_i\times V_i|i\in I\}$，其中 U_i 都是 X 的开集而 V_i 都是 Y 的开集. 此时截口 W_x 是 Y 中开集而截口 W^y 是 X 中开集.

(3) 若 E 和 F 分别是 X 和 Y 的闭集，则 $E\times F$ 是 $X\times Y$ 的闭集.

(4) 乘积度量空间 $X\times Y$ 是完备的当且仅当 X 和 Y 都是完备的.

与开集与闭集密切联系的是以下两个概念.

内部与闭包 设 S 是度量空间 (X,d) 的子集.

(1) 内部 $S^\circ=\{x|\exists r>0:O(x,r)\subseteq S\}$，其中的点为 S 的内点. 内部 S° 是含于 S 中的最大开集，而 S 是开集当且仅当 $S=S^\circ$.

(2) 闭包 $\overline{S}=\{x|\forall r>0:O(x,r)\cap S\neq\varnothing\}$，其中的点为 S 的接触点. 闭包 $\overline{S}$ 是包含 S 的最小闭集而 x 是 S 的接触点当且仅当 x 是 S 中某个序列 (x_n) 的极限. 点集 S 是闭集当且仅当 $S=\overline{S}$ 当且仅当 S 对极限运算封闭.

(3) $X^\circ=X;S^\circ\subseteq S;(S^\circ)^\circ=S^\circ;(S_1\cap S_2)^\circ=S_1^\circ\cap S_2^\circ$.

(4) 闭包与内部的对偶关系：$\overline{X\setminus S}=X\setminus S^\circ;(X\setminus S)^\circ=X\setminus\overline{S}$.

(5) 点集 S 的接触点 x 要么是 S 的 *聚点*(即它的去心邻域都与 S 相交) 要么是 S 的 *孤立点*(即它有个邻域与 S 只交于此点)，二者必居其一.

(6) 点 x 是 S 的聚点当且仅当 S 中有逼近 x 但各项互异的序列.

(7) 点集 S 的 *边界*(也是 $X\setminus S$ 的边界)$\partial S=\overline{S}\cap\overline{X\setminus S}=\overline{S}\setminus S^\circ$. 点集 S 的接触点要么是 S 的内点要么是 S 的边界点，二者居其一.

Kuratowski 闭包公理 $\overline{\varnothing}=\varnothing;S\subseteq\overline{S};\overline{(\overline{S})}=\overline{S};\overline{S_1\cup S_2}=\overline{S_1}\cup\overline{S_2}$.

需要注意度量空间 X 开球 $O(x,r)$ 的闭包不一定是闭球 $B(x,r)$ 而且闭球 $B(x,r)$ 的内部也不一定是开球 $O(x,r)$. 如命 $d(m,n)=|m-n|$，得度量空间 $(\mathbb{Z},d)$ 使 $O(n,1)=\{n\}$ 而 $B(n,1)=\{n-1,n,n+1\}$，这两个集合既是开集又是闭集. 因此闭包 $\overline{O(n,1)}=O(n,1)$ 而内部 $B(n,1)^\circ=B(n,1)$.

例 3 Cantor 集 K 是将区间 [0,1] 移去一个开集 O 而得到的, 以 S 记 O 的所有构成区间所有端点全体, 则 S 的闭包是 K.

首先, 任取 K 中一点 x, 将 x 表示成三进位小数 $(0.a_1a_2\cdots a_n\cdots)_3$, 其中 a_n 非 0 即 2. 定义 $x_n=(0.a_1a_2\cdots a_{n-1}2)_3$, 则 x_n 是某个第 n 级区间的右端点, 从而 (x_n) 是 S 中序列且以 x 为极限. 这表明 $K\subseteq\overline{S}$. 反向不等式源自 K 是包含 S 的一个闭集.

例 4 实直线上 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Q}$ 的边界分别是 $\varnothing$ 与 $\mathbb{R}$.

子空间的点集 设 A 是度量空间 X 的子空间 — 子集 A 继承 X 的度量后所成的度量空间. 任取 A 的子集 V 与 F.

(1) V 是子空间 A 的开集当且仅当有 X 的开集 U 使 $A\cap U=V$.

(2) F 是子空间 A 的闭集当且仅当有 X 的闭集 E 使 $A\cap E=F$.

(3) F 相对于 A 的闭包记为 $\overline{F}^A$, 则 $\overline{F}^A=A\cap\overline{F}$.

(4) 设 A 是 X 的开集, 则 V 是 A 的开集当且仅当 V 是 X 的开集.

(5) 设 A 是 X 的闭集, 则 F 是 A 的闭集当且仅当 F 是 X 的闭集.

当言及开集与闭集等概念时, 需清楚它们对应的全空间. 为示区别, 可将子空间的开集与闭集分别称为 *相对开集* 与 *相对闭集*.

由非空集合组成的递减集列 (E_n) 称为一个集套. 完备性可用闭集套来刻画.

定理 1(Cantor 闭集套定理) 度量空间 (X,d) 是完备的当且仅当 X 中直径趋向零的闭集套 (E_n) 有唯一公共点.

完备度量空间的闭集 A 是 *完备集*— 作为子空间完备的集. 这是因为 A 的闭集也是 X 的闭集, A 中直径趋向零的闭集套有公共点. 度量空间的完备集 A 是闭集. 事实上, $x\in\overline{A}$ 时, $B(x,2^{-n})\cap A:n\geqslant 1$ 是 A 中直径趋向零的闭集套, 其交点 x 应在 A 中. 因此 $\overline{A}=A$.

范数拓扑的性质 赋范空间 X 上的范数诱导的度量拓扑也称为 *范数拓扑*. 设 $0\leqslant r\leqslant+\infty$, 命 $[X]_r=\{x:\|x\|\leqslant r\}$ 且 $(X)_r=\{x:\|x\|<r\}$.

(1) 设 $0<r<+\infty$, 则 $[X]_r^{\circ}=(X)_r$ 而 $\overline{(X)_r}=[X]_r$.

(2) 数乘保持闭包运算: $\overline{bS}=b\overline{S}$.

(3) 非零数乘保持内部运算: $(aS)^{\circ}=aS^{\circ}:a\neq 0$.

(4) 平移保持内部运算: $(x+S)^{\circ}=x+S^{\circ}$.

(5) 平移保持闭包运算: $\overline{x+S}=x+\overline{S}$.

(6) 如果 U 或 V 是开集, 则 $U+V$ 是开集.

(7) 有内点的线性子空间 L 只能为全空间:

(8) 线性子空间 L 的闭包是线性子空间；若 L 还有内点，则 $L = X$.

(9) $\overline{\mathrm{span}}\, S$ 与 $\overline{\mathrm{cov}}\, S$ 是包含 S 的最小闭线性子空间与最小闭凸集.

(10) 设 A 是 X 的加法子群，则闭包 $\overline{A}$ 也是加法子群.

(11) X 的子集 S 有界当且仅当且仅当 $\sup\{\|x\| : x \in S\} < +\infty$.

(12) $\overline{S_1} + \overline{S_2} \subseteq \overline{S_1 + S_2}$ 且 $S_1^\circ + S_2 \subseteq (S_1 + S_2)^\circ$.

(13) 对称集 S(即 $-S = S$) 的闭包 $\overline{S}$ 和内部 S° 也是对称的.

(14) 凸集 E 的闭包是凸集，其内部非空时是凸集且 $E \subseteq \overline{E^\circ}$.

(15) X 的有限维线性子空间 L 是完备集也是闭集.

一个线性空间上的不同范数可诱导相同或不同的范数拓扑.

定理 2 赋范空间 $(X, \|\cdot\|_1)$ 的任何开集都是赋范空间 $(X, \|\cdot\|_2)$ 的开集当且仅当 $\|\cdot\|_1$弱于$\|\cdot\|_2$: 存在正实数 c 使 $x \in X$ 时，$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$.

进而，$(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 有相同范数拓扑当且仅当 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$等价: 存在正实数 c_1 与 c_2 使 $x \in X$ 时，$c_1\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_2\|x\|_2$.

当 $1 < p < q < +\infty$ 时，线性空间 $C[0,1]$ 上范数 $\|\cdot\|_p$ 弱于 $\|\cdot\|_q$. 为此命 $a = q/p$ 而 b 为 a 的共轭数. 注意到 $ap = q$, 当 $f \in C[0,1]$ 时

$$(\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{1/p} \leqslant (\int_0^1 (|f(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} (\int_0^1 1^b dx)^{\frac{1}{b}}.$$

但 $\|\cdot\|_q$ 不弱于 $\|\cdot\|_p$. 为此命 $f_n(x) = x^n$, 则

$$\lim \frac{\|f_n\|_q}{\|f_n\|_p} = \lim \frac{(np+1)^{1/p}}{(nq+1)^{1/q}} = +\infty.$$

这表明 $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ 的开集都是 $(C[a,b], \|\cdot\|_q)$ 的开集；反之不然.

定理 3(Minkowski) 有限维线性空间上任何两个范数都等价.

因此有限维线性空间上只有一个范数拓扑. 无限维线性空间 X 上至少有 $\aleph$ 个相互不等价的范数 (不同的范数拓扑). 为此，取 X 的线性基 $\{e_i | i \in J\}$, 则 J 是无限集. 对于 $x = \sum\limits_{i \in I} a_i e_i$(只有有限个系数 a_i 非 0), 命 $\|x\|_p = (\sum\limits_{i \in J} |a|_i^p)^{\frac{1}{p}}$. 当 $1 \leqslant p < q < +\infty$ 时，$\|\cdot\|_p$ 与 $\|\cdot\|_q$ 不等价.

稠密集与可分集 设 A 和 B 是空间 X 的子集.

(一) $B \subseteq \overline{A}$ 时, 称 A 在 B 中稠密或 A 稠于 B. 如 Euclid 空间中有理点全体稠于 Euclid 空间. 稠密关系有点类似偏序:

(1) 自反性: A 总稠于 A.

(2) 弱自反性: A 稠于 B 且 B 稠于 A 时, $\overline{A} = \overline{B}$.

(3) 传递性: A 稠于 B 且 B 稠于 C 时, A 稠于 C.

(二) 如果 $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, 则称 A 是 B 的稠密集. 拥有一个稠密的可数子集的集称为可分集. 如因有可列个有理点, Euclid 空间可分.

(1) 可分集的子集与闭包是可分集, 可列个可分集的并集是可分集.

(2) 有限个可分集的笛卡儿积是可分集.

(3) 赋范空间中可分集生成的 (闭) 线性子空间是可分的.

(4) 赋范代数中可分集生成的 (闭) 子代数 (概念见于 §3.5) 是可分的.

(三) 如果 A 的闭包无内点 (即 A 不稠于任何非空开集), 则称 A 是 X 的疏朗集. 疏朗集的子集及其闭包也是疏朗集.

例 5 据 Weierstrass 定理, 任何 $f \in C[a,b]$ 可被一列多项式一致逼近. 因此若命 $e_n(x) = x^n$, 则 $C[a,b] = \overline{\text{span}}\{e_n | n = 0, 1, \cdots\}$, 它可分.

例 6 据 §5.1 例 6 得到 $l^p = \overline{\text{span}}\{e_1, e_2, \cdots\}$, 其中 $1 \leqslant p < +\infty$. 又据此例得 $\mathbf{c}_0 = \overline{\text{span}}\{e_1, e_2, \cdots\}$ 而 $\mathbf{c} = \overline{\text{span}}\{e, e_1, e_2, \cdots\}$ (闭包是在各自空间取的). 可见, 这些空间都可分.

例 7 l^∞ 不可分. 为此命 $S = \{x \in l^\infty | \forall n : x_n = \pm 1\}$, 其势为 $\aleph$ 且其中每两点相距为 2. 如果 l^∞ 可分, 取其一个稠密可列子集 D. 对每个 $x \in S$, 取个 $f(x) \in D$ 使 $\|f(x) - x\|_\infty < 1$. 如果 $f(x) = f(y)$, 则 $\|x - y\|_\infty < 2$, 因此 $x = y$. 这表明 $f : S \to D$ 为单射. 矛盾.

例 8 设 $-\infty < a < b < +\infty$, 则 $[a,b]$ 上有界变差函数 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 全体 $V[a,b]$ 按范数 $\|f\|_{\text{v}} = |f(a)| + \bigvee_a^b f$ 成为不可分的 Banach 空间. 在 a 取值为 0 且在 (a,b) 右连续的有界变差函数全体 $V_0[a,b]$ 是 $V[a,b]$ 的闭子空间, 它也是不可分的 Banach 空间.

为此命 $f_s(x) = \theta(x - s)$, 则 $\{f_s | a < s < b\}$ 是 $V_0[a,b]$ 的子集, 其势是 $\aleph$. 当 $s \neq t$ 时, $\|f_s - f_t\|_{\text{v}} = 2$. 仿例 7 可说明 $V_0[a,b]$ 不可分.

注意到 $|g(x)| \leqslant |g(a)| + \bigvee g$, 对于 $V[a,b]$ 中基本序列 (f_n), 有

$$|f_n(x) - f_l(x)| \leqslant \|f_n - f_l\|_{\text{v}},$$

这样 (f_n) 一致收敛于一个函数 f, 它有界变差: $\bigvee f \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \bigvee f_n$. 由

$$\bigvee(f_n - f) \leqslant \varliminf_{l\to\infty} \bigvee(f_n - f_l)$$

知 $\lim \bigvee(f_n - f) = 0$. 因此 $\lim \|f_n - f\|_{\mathrm{v}} = 0$. 当 (f_n) 在 $V_0[a,b]$ 中时, 由一致收敛保持右连续性知 f 在 (a,b) 右连续. 显然 $f(a) = 0$. 这样 f 在 $V_0[a,b]$ 中. 可见, $V_0[a,b]$ 也完备.

以 $V_0(0,2\pi]$ 记使 $g(0) = 0$ 且在 $[0,2\pi)$ 右连续的有界变差函数 $g : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ 全体, 它是 $V_0[0,2\pi]$ 的闭子空间.

例 9 Cantor 集 K 是 $\mathbb{R}$ 中疏朗集. 这是因为 K 是 Lebesgue 测度为零的闭集, 它不可能包含一个非空开集.

习 题

练习 1 在复平面 $\mathbb{C}$ 上, 求出以下集合的内部与闭包

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, \arg z \in 2\pi\mathbb{Q}\}.$$

练习 2 求 Cantor 集 K 分别相对于 [0,1] 与 K 的内部.

练习 3 证明: 空间 X 中开集列 (U_n) 的上限集是 G_δ- 型集.

练习 4 取 $\mathbb{R}$ 的子空间 $A = [0,1)$. 区间 $[0,1/2)$ 是 A 的开集, 而区间 $[1/2,1)$ 是 A 的闭集.

练习 5 设 $\mathbb{T}$ 是复平面中的单位圆周 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 当 $a < b$ 时, 作 $\mathbb{T}$ 中的开弧 $(a < b) = \{\exp(\sqrt{-1}t) | a < t < b\}$.

(1) 将 $\mathbb{T}$ 视为 $\mathbb{C}$ 的子空间, 证明开弧 $(a < b)$ 是空间 $\mathbb{T}$ 的开集.

(2) 空间 $\mathbb{T}$ 的开集 U 都是至多可列个开弧的无交并.

(3) 命 $f(t) = \exp(\sqrt{-1}t)$, 证明 $f : (0,2\pi] \to \mathbb{T}$ 是 Borel 同构.

练习 6 试作实直线上可列个相互不交的稠密子集.

练习 7 直接证明 $\mathbb{Q}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密.

练习 8 为什么 l^0 不在 l^∞ 中稠密?

练习 9 设 $f : X \to Y$ 是度量空间之间的等距映射:

$$d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in X.$$

如果 X 不可分, 证明 Y 不可分.

练习 10 证明有界连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 全体 $C_b(\mathbb{R})$ 按范数 $\|f\|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ 所成的 Banach 空间不可分，有界连续函数 $f:(0,1]\to\mathbb{C}$ 全体 $C_b(0,1]$ 按范数 $\|f\|=\sup\limits_{0<x\leqslant 1}|f(x)|$ 所成的 Banach 空间也不可分.

练习 11 试证明以下各小题中集 A 在集 B 中稠密:

(1) $A=\{\ln(1+r^2)|r\in\mathbb{Q}\}$ 而 $B=[0,+\infty)$.

(2) $A=\{\sin r|r\in\mathbb{Q}\}$ 而 $B=[-1,1]$.

(3) $A=\{r^{2n-1}|r\in\mathbb{Q}\}$ 而 $B=\mathbb{R}$, 其中 n 是固定的正整数.

(4) $A=\{2^{p/q}|p,q\in\mathbb{Z}_+\}$ 而 $B=[1,+\infty)$.

练习 12 (1) 试证明 S 的接触点 x 要么是 S 的聚点要么是 S 的孤立点.

(2) 说明在实直线上，0 是区间 (0,1] 的聚点.

练习 13 设 S 是度量空间 X 的子集，其全体聚点组成 S 的导集 S'. 证明:

(1) $S\cup S'=\overline{S}$ 且 S' 是闭集 (后者在拓扑空间范畴中不真).

(2) S 是闭集当且仅当 $S'\subseteq S$.

(3) $(S_1\cup S_2)'=S_1'\cup S_2'$.

(4) $(A\cap B)'$ 不必为 $A'\cap B'$, 而 $(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)'$ 不必是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n'$.

练习 14 设 S 是度量空间 X 的子集，证明 (1)$S'\cap S=\varnothing$ 当且仅当 (2)S 中的点都是 S 的孤立点当且仅当 (3)S 作为子空间是离散空间. 此时称 S 为孤立点集, 它的聚点都在 S 的边界上.

练习 15 证明: 实直线的子集 $E=\{2^{-n}|n\in\mathbb{Z}_+\}$ 与 $\mathbb{Z}$ 都是孤立点集.

练习 16 将 S 的导集 S' 称为第一级导集，S' 的导集称为第二级导集，如此下去. 证明 S 的各级导集组成一个递减闭集列 $(S^{(n)})_{n=1}^{\infty}$.

(1) 作一可列孤立点集 S 使其导集为不可数集.

(2) 作一点集 S 使其各级导集互异且所有导集的交集为空集.

(3) 作一点集 T 使其各级导集互异且所有导集的交集不空.

* **练习 17** 对于度量空间 X 的点集 S, 命 $S^{(0)}=S$. 对于任何序数 β, 超限归纳地定义 S 的第 β 级 Cantor-Bendixson 导集

$$S^{(\beta)}=\bigcap\{(S^{(\alpha)})'|\alpha<\beta\}.$$

证明有序数 γ 使 $\gamma\geqslant\beta$ 时，$S^{(\gamma)}=S^{(\beta)}$ 且它们无孤立点.

练习 18 (1) 如果 $S \subseteq S'$, 称 S 为自密集. 证明开区间 (1,2) 是 $\mathbb{R}$ 的自密集.

(2) 如果 $S' = S$, 称 S 为完全集. 说明 Cantor 集 K 是 $\mathbb{R}$ 的完全集.

练习 19 求 A 的导集, 其中

(1) 在实直线上, $A = \{ma + nb | m, n \in \mathbb{Z}\}$ 而 a/b 是无理数,

(2) 在实直线上, $A = \{\cos n | n \in \mathbb{N}\}$.

(3) 在实直线上, $A = \{\sin n | n \in \mathbb{N}\}$.

(4) 在复平面上, $A = \{\exp(\sqrt{-1}n) | n \in \mathbb{N}\}$.

练习 20 设 E 是 $\mathbb{R}$ 的闭集, 将开集 $\mathbb{R} \setminus E$ 的构成区间都称为 E 的邻接区间. 那些有界邻接区间的左端点组成一个集合 S. 证明:

(1) x 是 E 的孤立点当且仅当 x 是 E 的两个邻接区间的公共端点.

(2) E 有孤立点当且仅当 E 的某两个邻接区间有公共端点.

(3) E 是完全集当且仅当 E 的任何两个邻接区间无公共端点.

(4) E 是疏朗集时, E 为完全集当且仅当 S 与有理数集相似.

练习 21 可分度量空间 X 的势和 X 中开集全体 $\mathcal{O}$ 的势都不过 $\aleph$.

练习 22 设有度量空间 (X, d) 和 (Y, d) 及其非空子集 S 和 T. 证明:

(1) $\overline{S \times T} = \overline{S} \times \overline{T}$ 及 $(S \times T)^\circ = S^\circ \times T^\circ$.

(2) $(S \times T)' = (S' \times \overline{T}) \cup (\overline{S} \times T')$.

(3) X^n 的对角线 $D = \{(x_i) \in X^n | x_1 = \cdots = x_n\}$ 是 X^n 的闭集.

(4) S 稠于 X 当且仅当 S 与 X 的任何非空开集相交.

练习 23 对于度量空间 X 中的点 x 与点集 S, 有以下几种情形:

$(1) \exists r > 0 : O(x, r) \cap S = \varnothing \Leftrightarrow O(x, r) \subseteq X \setminus S.$

$(2) \forall r > 0 : O(x, r) \cap S \neq \varnothing.$

$(2.1) \exists r > 0 : O(x, r) \setminus S = \varnothing \Leftrightarrow O(x, r) \subseteq S.$

$(2.2) \forall r > 0 : O(x, r) \setminus S \neq \varnothing \Leftrightarrow O(x, r) \cap (X \setminus S) \neq \varnothing.$

$(2.3) \exists r > 0 : O^*(x, r) \cap S = \varnothing \Leftrightarrow O(x, r) \cap S = \{x\}.$

$(2.4) \forall r > 0 : O^*(x, r) \cap S \neq \varnothing \Leftrightarrow O(x, r) \cap S \setminus \{x\} \neq \varnothing.$

此处 $O^*(x, r) = O(x, r) \setminus \{x\}$. 在以上诸种情形下, x 是 S 的什么点?

练习 24(Lindelöf) 度量空间 X 的子集 A 是可分集当且仅当它具有 Lindelöf 性质 — 覆盖 A 的开集簇存在至多可列子覆盖.

练习 25 在 $[0,\infty)$ 上有界连续函数全体 $C_b[0,\infty)$ 上规定范数

$$\|f\|_s = \left(\int_0^\infty \exp(-sx^2)|f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $s>0$. 若 s 与 t 是互异正数，证明 $\|\cdot\|_s$ 与 $\|\cdot\|_t$ 不等价.

练习 26 只取有限个值的有界复数列全体 Y 稠密于 l^∞(此题的背景是：可测空间上简单函数能一致逼近有界可测函数).

练习 27 Banach 空间 X 中可和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 之和记为 s, 它的所有缺项级数之和构成的集记为 E. 试证明：

(1) E 是紧集且 $x\in E$ 时， $s-x\in E$.

(2) 有无限项 u_n 非零时， E 是完全集.

(3) 只有有限项 u_n 非零时， E 是孤立点集.

练习 28 设 E 是度量空间 X 的子集而 $x\in X$. 如果任何 $r>0$ 使 $O(x,r)\cap E$ 不可数，称 x 是 E 的凝聚点. 证明：

(1) 由 E 的凝聚点组成的集 $E^{\#}$ 是闭集.

(2) $(E_1\cup E_2)^{\#}=E_1^{\#}\cup E_2^{\#}$.

练习 29 设 E 是 Euclid 空间的子集.

(1) 设 E 有界，证明 E 有聚点当且仅当 E 是无限集.

(2) 设 E 为孤立点集，证明 E 是可数集.

(3) 设 E 不可数，证明 E 有凝聚点.

(4) 设 E 不可数，证明凝聚点集 $E^{\#}$ 是完全集.

(5) 设 E 是完全集，证明 E 的点 x 都是 E 的凝聚点.

练习 30(Cantor-Bendixson 定理) Euclid 空间的不可数闭集 E 是一个完全集与一个可数集之并.

练习 31 可分空间 X 的一些相互不交的非空开集所成的集类 $\mathcal{U}$ 是可数的. 由 X 的一些相互不交的非空闭集所成的集类 $\mathcal{E}$ 是否可数？

练习 32 当 $\delta>0$ 时，命 $E_\delta=(-\delta,\delta)$. 设不连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使

$$f(x+y)=f(x)+f(y):x,y\in\mathbb{R}.$$

证明像集 $f(E_\delta)$ 无界且稠于 $\mathbb{R}$. 证明图像 $\mathrm{gr}\,f$ 稠于 $\mathbb{R}^2$.

练习 33 以下陈述是否正确？

(1) [0,1] 中 Lebesgue 零集的特征函数在 [0,1] 上 Riemann 可积.

(2) [0,1] 中疏朗集的特征函数在 [0,1] 上 Riemann 可积.

(3) [0,1] 中闭集的特征函数在 [0,1] 上 Riemann 可积.

(4) [0,1] 中疏朗零集的特征函数在 [0,1] 上 Riemann 可积.

(5) [0,1] 中闭的零集的特征函数在 [0,1] 上 Riemann 可积.

练习 34 度量空间 (X,d) 的子集 S 称为 ε- 链是指

$$\inf\{d(x,y)|x,y\in S: x\neq y\}\geqslant\varepsilon.$$

(1) 证明：可分的 ε- 链 S 是可数集.

(2) 证明：任何 ε- 链都可数的度量空间 X 是可分的.

练习 35 度量空间 X 的开集全体 $\mathcal{O}$ 按包含关系成为偏序集. 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{O}$ 的非空子集，证明 $\sup\mathcal{S}=\bigcup\mathcal{S}$ 而 $\inf\mathcal{S}=(\bigcap\mathcal{S})^\circ$.

练习 36 度量空间 X 的闭集全体 $\mathcal{F}$ 按包含关系成为偏序集. 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{F}$ 的非空子集，证明 $\sup\mathcal{S}=\overline{\bigcup\mathcal{S}}$ 而 $\inf\mathcal{S}=\bigcap\mathcal{S}$.

练习 37 线性空间 X 的线性子空间全体 $\mathcal{L}$ 按包含关系成为偏序集. 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{L}$ 的非空子集，证明 $\sup\mathcal{S}=\operatorname{span}\bigcup\mathcal{S}$ 而 $\inf\mathcal{S}=\bigcap\mathcal{S}$.

练习 38 赋范空间 X 的闭线性子空间全体 $\mathcal{L}$ 按包含关系成为偏序集. 设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{L}$ 的非空子集，证明 $\sup\mathcal{S}=\overline{\operatorname{span}}\bigcup\mathcal{S}$ 而 $\inf\mathcal{S}=\bigcap\mathcal{S}$.

练习 39 将 Cantor 集 K 作为 $\mathbb{R}$ 的子空间. 任取 $x\in K$ 与其三进位小数 $0.a_1a_2\cdots$, 其中 a_n 非 0 即 2. 命 $U_{ni}=\{x\in K|a_n=i\}$, 其中 $i=0,1$. 证明 U_{ni} 是 K 中既开又闭的集使 $K=U_{n0}\sqcup U_{n1}$.

§5.3 连续映射

区间上函数的连续性概念可以推广至一般度量空间之间的映射上而不需要在形式上有所变化. 设 $f:X\to Y$ 是度量空间之间的映射. 称 f 在点 x_0 连续是指 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 即

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0: d(x,x_0)<\delta\Rightarrow d(f(x),f(x_0))<\varepsilon.$$

这即 X 中序列 (x_n) 逼近 x_0 时， Y 中序列 $(f(x_n))$ 逼近 $f(x_0)$. 也即 V 是 $f(x_0)$ 的邻域时， $f^{-1}(V)$ 是 x_0 的邻域.

如果 x_0 是 X 的孤立点 — 存在 $r>0$ 使 $O(x,r)$ 是单点集，则 f 在 x_0 连续. 这是因为 $d(x,x_0)<r$ 蕴含 $x=x_0$, 自然 $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

定理 1 对于映射 $f: X \to Y$, 以下 5 个等价条件:

(1) f 是连续映射 — 逐点连续的连续.

(2) 对于 Y 的任何开集 V, 逆像 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集.

(3) 对于 Y 的任何闭集 F, 逆像 $f^{-1}(F)$ 是 X 的闭集.

(4) 对于 Y 的任何子集 S, $f^{-1}(S^\circ) \subseteq f^{-1}(S)^\circ$.

(5) 对于 Y 的任何子集 S, $\overline{f^{-1}(S)} \subseteq f^{-1}(\overline{S})$.

等距映射 $f: X \to Y$(使 $d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ 恒成立) 也称为等距嵌入, 它自然一致连续. 所谓 f 一致连续是对任何 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $d(x_1, x_2) < \delta$ 时, $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

开映射与嵌入 (1) 将开集映成开集的映射称为开映射.

(2) 当 $f: X \to Y$ 可逆时, f 是开映射当且仅当 f^{-1} 连续.

(3) 设 $f: X \to Y$ 可逆. 如果 f 和 f^{-1} 都连续, 称 f 是同胚. 这即 U 是 X 的开集当且仅当 $f(U)$ 是 Y 的开集.

(4) 恒等映射 $\mathrm{id}: X \to X$ 是同胚. 同胚之逆是同胚. 同胚的复合是同胚.

(5) 若限制 $(f: X \to f(X))$ 是同胚, 则称 f 是嵌入. 此时 X 在拓扑的意义下可等同于 Y 的子空间 $f(X)$.

设 A 是 X 的子空间. 包含映射 $\eta: A \to X$ 是等距嵌入. 因此有等距映射 $f: X \to Y$ 时, 可将 X 在度量的意义下等同于 Y 的子空间 $f(X)$.

例 1 以 $\pi: X \times Y \to X$ 记向第一个分量的投影, $\pi(x, y) = x$. 它是连续的开映射. 事实上, X 的开集 U 的逆像 $\pi^{-1}(U) = U \times Y$ 是 $X \times Y$ 的开集. 而当 W 是 $X \times Y$ 的开集时, 据 §5.2 有关乘积空间的点集知 $\pi(W) = \bigcup\{U_i | V_i \neq \varnothing\}$. 这是 X 的开集.

恒等映射 $I: X \to X$ 是等距同胚 — 满的等距映射.

例 2 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的赋范空间, 则

(1) 范数 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ 一致连续, 因为 $|\|x_2\| - \|x_1\|| \leqslant \|x_2 - x_1\|$.

(2) 加法 $X \times X \to X: (x, y) \mapsto x + y$ 一致连续. 这是因为

$$\|(x_1 + y - 1) - (x_2 + y_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|.$$

(3) 数乘 $\mathbb{K} \times X \to X, (a, x) \mapsto ax$ 是连续映射. 事实上,

$$\|ax - a_0x_0\| \leqslant |a - a_0|\|x\| + |a_0|\|x - x_0\|.$$

当 x 逼近时 x_0 时, 可设 $\|x\| < \|x_0\| + 1$. 于是

$$\|ax - a_0x_0\| \leqslant |a - a_0|(\|x_0\| + 1) + |a_0|\|x - x_0\|.$$

这样当 $a \to a_0$ 且 $x \to x_0$ 时, $\lim ax = a_0x_0$.

(4) 反射 $x \mapsto -x$ 是 (等距) 同胚. 这是因为 $O(x,r) \subseteq U$ 当且仅当 $O(-x,r) \subseteq -U$, 即 U 是开集当且仅当 $-U$ 是开集.

(5) 平移 $X \to X, x \mapsto u + x$ 是 (等距) 同胚. 这是因为 U 是开集当且仅当 $u + U$ 是开集.

下面是一些连续性的判断方法 (请与可测性的判断方法相比较).

(1) 一致收敛保持连续性: 如果度量空间之间连续映射列 $(f_k : X \to Y)_{k=1}^{\infty}$ 一致收敛于映射 $f : X \to Y$, 则 f 连续.

(2) 复合保持连续性: 如果 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 是连续映射, 则复合 $gf : X \to Z$ 是连续映射.

(3) 限制保持连续性: 连续映射 $f : X \to Y$ 的限制是连续映射.

(4) 黏接保持连续性: 设 X 是有限个闭集 $X_i (i \in I)$ 之并而 $f : X \to Y$ 是连续映射簇 $f_i : X_i \to Y_i (i \in I)$ 的黏接, 则 f 连续.

(5) 黏接保持连续性: 设 X 是一簇开集 $X_i (i \in I)$ 之并而 $f : X \to Y$ 是连续映射簇 $f_i : X_i \to Y_i (i \in I)$ 的黏接, 则 f 连续.

(6) 积和投影保持连续性: 映射 $\prod\limits_{i \leqslant n} f_i : \prod\limits_{i \leqslant n} X_i \to \prod\limits_{i \leqslant n} Y_i$ 连续当且仅当每个分量 $f_i : X_i \to Y_i$ 连续. 映射 $g : X \to \prod\limits_{i \leqslant n} Y_i$ 连续当且仅当它的每个分量 $g_i : X \to Y_i$ 连续.

(7) 截口保持连续性: 设 $f : W \to Z$ 是连续映射, 其中 $W \subseteq X \times Y$. 如果 $W_a \neq \varnothing$, 则 $f(a, \cdot) : W_a \to Z, y \mapsto f(a,y)$ 连续. 如果 $W^b \neq \varnothing$, 则 $f(\cdot, b) : W^b \to Z, x \mapsto f(x,b)$ 连续.

约定 $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$ 及 $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. 这使广义实数系 $\overline{\mathbb{R}}$ 成为度量空间. $(a, +\infty]$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 中开球 $O(+\infty, \pi/2 - \arctan a)$. 而 $[-\infty, b)$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 中开球 $O(-\infty, \arctan b + \pi/2)$.

由 $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty, +\infty\}$ 知 $\mathbb{R}$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 的开集. 因此 $\mathbb{R}$ 的子集 U 是 $\mathbb{R}$ 的开集当且仅当它是 $\overline{\mathbb{R}}$ 的开集.

子空间 $(\mathbb{R}, d)$ 中, 实数列 (x_n) 收敛于实数 x 当且仅当 $\lim |x_n - x| = 0$. 这是数学分析意义下的收敛.

广义实数系中序列 (n^2) 收敛于 $+\infty$. 这是因为

$$\lim |\arctan n^2 - \arctan(+\infty)| = 0.$$

但 (n^2) 是实数系的发散数列.

半连续性 规定广义实值函数 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ 在点 x_0 的上极限

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \inf_{r>0} \sup\{f(x) | 0 < d(x, x_0) < r\}.$$

在 x_0 是 X 的孤立点时，约定 $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$. 规定下极限

$$\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \sup_{r>0} \inf\{f(x) | 0 < d(x, x_0) < r\}.$$

同样当 x_0 是 X 的孤立点时约定 $\underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

(1) $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0)$ 当且仅当 $f(x_0) < b$ 时 $(f < b)$ 是 x_0 的邻域：存在 $\delta > 0$ 使 $d(x, x_0) < \delta$ 时，$f(x) < b$. 此时称 f 在 x_0上半连续.

(2) 如果 $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 都在 x_0 上半连续，则下确界 $\inf\limits_{i \in I} f_i$ 在 x_0 上半连续. 进而当 I 是有限集时，上确界 $\sup\limits_{i \in I} f_i$ 也在 x_0 上半连续.

(3) 称 f 是上半连续函数是指它逐点上半连续. 这有以下 4 个等价条件：

(3a) 对于 $b \in \mathbb{R}$, $(f < b)$ 是 X 的开集 $[(f \geqslant b)$ 是 X 的闭集$]$.

(3b) 子集 $\overline{A}(f) := \{(x, y) | f(x) < y \leqslant +\infty\}$ 是 $X \times \overline{\mathbb{R}}$ 的开集.

(3c) 子集 $A(f) := \{(x, y) | f(x) < y < +\infty\}$ 是 $X \times \mathbb{R}$ 的开集.

(3d) 对于 $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $(f < b)$ 是 X 的开集 $[(f \geqslant b)$ 是 X 的闭集$]$.

(4) $\underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) \geqslant f(x_0)$ 当且仅当 $f(x_0) > a$ 时 $(f > a)$ 是 x_0 的邻域：存在 $\delta > 0$ 使 $d(x, x_0) < \delta$ 时，$f(x) > a$. 此时称 f 在 x_0下半连续.

(5) 函数 f 在 x_0 连续等价于它在 x_0 上半连续且下半连续.

(6) 如果 $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 都在 x_0 下半连续，则上确界 $\sup\limits_{i \in I} f_i$ 在 x_0 下半连续. 进而当 I 是有限集时，下确界 $\inf\limits_{i \in I} f_i$ 也在 x_0 下半连续.

(7) 称 f 下半连续是指它逐点下半连续. 这有以下 4 个等价条件：

(7a) 对于 $a \in \mathbb{R}$, $(f > a)$ 是 X 的开集 $[(f \leqslant a)$ 是 X 的闭集$]$.

(7b) 子集 $\{(x, y) | f(x) > y \geqslant -\infty\}$ 是 $X \times \overline{\mathbb{R}}$ 的开集.

(7c) 子集 $\{(x, y) | f(x) > y > -\infty\}$ 是 $X \times \mathbb{R}$ 的开集.

(7d) 对于 $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $(f > a)$ 是 X 的开集 $[(f \leqslant a)$ 是 X 的闭集$]$.

用上下极限刻画连续性的优点在于不必考虑极限是否存在.

例 3 设 f 是全 σ- 有限测度空间 (M,μ) 上可测函数，则区间 $(0,+\infty)$ 上函数 $p\mapsto\|f\|_p$ 是下半连续函数. 为此设 f 非负. 当 f 是简单函数 $\sum c_i\chi_{E_i}$(其中 E_i 测度有限且相互不交) 时，$\|f\|_p=(\sum|c_i|^p\mu(E_i))^{\frac{1}{p}}$. 这是 p 的连续函数. 一般地，可取递增至 f 的简单函数列 (f_n). 由单调收敛定理知

$$(\int|f|^p)^{\frac{1}{p}}=\sup_{n\geqslant 1}(\int|f_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

这是 p 的下半连续函数. 容易说明这函数在 $p=+\infty$ 时也下半连续.

定理 2 子集 D 在空间 X 中稠密当且仅当 D 与非空开集都有交点. 此时,

(1) D 在连续映射 $f:X\to Y$ 下的像 $f(D)$ 是 $f(X)$ 的稠密集.

(2) 下半连续函数 g 和上半连续函数 h 满足 $g|_D\leqslant h|_D$ 时， $g\leqslant h$.

(3) X 至度量空间 Y 的连续映射 g 和 h 满足 $g|_D=h|_D$ 时， $g=h$.

约定 $\overline{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty]$, 命 $O(x,0)=\varnothing$ 及 $O(x,+\infty)=X$.

点到点集的距离 设 S 是度量空间 (X,d) 的子集. 对于 $x\in X$, 命

$$d(x,S)=:\inf\{d(x,z)|z\in S\}.$$

这称为 x 到 S 的距离 (约定 $d(x,\varnothing)=+\infty$). 它有以下性质.

(1) $d(x,S)\leqslant d(x,y)+d(y,S)$.

(2) $d(x,S)=d(x,\overline{S})$, 它是 x 的一致连续函数.

(3) $d(x,S)=\max\{r\in\overline{\mathbb{R}}_+|O(x,r)\cap S=\varnothing\}$. 因此 x 到 S 的距离是以 x 为中心与 S 不交的最大开球的半径.

(4) $d(x,X\setminus S)=\max\{r\in\overline{\mathbb{R}}_+|O(x,r)\subseteq S\}$. 因此 x 到 $X\setminus S$ 的距离是以 x 为中心含于 S 的最大开球的半径.

(5) $\overline{S}=\{x\in X|d(x,S)=0\}$(这是 G_δ 型集).

(6) $S^\circ=\{x|d(x,X\setminus S)>0\}$(这是 F_σ 型集).

(7) x 是 S 的聚点当且仅当 $d(x,S\setminus\{x\})=0$.

(8) x 是 S 的孤立点当且仅当 $x\in S$ 且 $d(x,S\setminus\{x\})>0$.

函数 $d(x,S)$ 有很多应用. 下面举一例 — 它是 Урысон 引理型的结论.

例 4 对于度量空间 M 中相互不交的非空闭集 $E_1,\cdots,E_n$ 及赋范空间 X 中互异向量 $x_1,\cdots,x_n$, 命

$$f(t)=(\sum_{i\leqslant n}x_i\prod_{j\neq i}d(t,E_j))\div(\sum_{i\leqslant n}\prod_{j\neq i}d(t,E_j)):t\in M.$$

函数 $f:M\to X$ 连续且 $f(E_1)=\{x_1\},\cdots,f(E_n)=\{x_n\}$. 命

$$2r=\min\{d(x_i,x_j)|i,j=1,\cdots,n:i\neq j\}$$

并命 $U_i=f^{-1}(O(x_i,r))$, 则 $U_i:i\leqslant n$ 是相互不交的开集使 $E_i\subseteq U_i$.

Euclid 空间中有这样一个事实：如果 L 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性真子空间，则有个单位向量 x 与 L 垂直. 此时 $d(x,L)=1$. 一般赋范空间中没有垂直概念，但可将这个事实弱推广如下.

命题 3(F. Riesz 引理) 设 L 是赋范空间 X 的闭线性子空间，并且 $L \neq X$. 如果 $0 < \varepsilon < 1$, 则有 X 的单位向量 x_0 使 $d(x_0, L) > \varepsilon$.

设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间而函数 $p: X \to \mathbb{R}$ 满足以下两个条件：

(1) 正齐次性： $p(ax) = ap(x)$, 其中 $a \geqslant 0$ 而 $x \in X$.

(2) 次可加性： $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, 其中 $x, y \in X$.

称 p 为*次线性泛函*. 它有以下性质：

(3) c 是实常数时， $(p \leqslant c) = \{x \in X | p(x) \leqslant c\}$ 是凸集.

如果 p 还是*半范数*— 当 $a \in \mathbb{K}$ 时 $p(ax) = |a|p(x)$, 则

(4) $p \geqslant 0$. 这源自不等式 $0 = p(0) \leqslant p(x) + p(-x) = 2p(x)$.

(5) $\ker p$ 是 X 的线性子空间：当 $p(x_i) = 0$ 且 a 是数时，

$$p(ax_1 + x_2) \leqslant |a|p(x_1) + p(x_2) = 0.$$

定理 4 对于赋范空间 X 上次线性泛函 p, 以下条件等价：

(1) p 在 X 的原点上半连续： $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\, p(x) \leqslant p(0)$.

(2) p 将 X 的有界集 S 映为 $\mathbb{R}$ 中有界集 $p(S)$.

(3) 有正实数 r 和非负实数 a 使 $\|x\| < r$ 时， $p(x) \leqslant a$.

(4) 有非负实数 c 恒使 $|p(x) - p(y)| \leqslant c\|x - y\|$(因此 p 连续).

据此定理， $x \mapsto \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \mathrm{re}\, x_n$ 是 l^∞ 上连续的次线性泛函.

例 5 收敛数列全体 $\mathbf{c}$ 与无穷小量全体 $\mathbf{c}_0$ 作为 l^∞ 的线性子空间是 Banach 空间. 为此命 $p(x) = \overline{\lim\limits_{k,l\to\infty}}\, |x_k - x_l|$. 这得半范数 $p: l^\infty \to \mathbb{R}$ 使 $\ker p = \mathbf{c}$. 因为 $p(x) \leqslant 2\|x\|_\infty$, 所以 p 连续. 这样 $\ker p$ 是 l^∞ 的闭集，它完备.

再命 $q(x) = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, |x_k|$. 这得半范数 $q: l^\infty \to \mathbb{R}$ 使 $\ker p = \mathbf{c}_0$. 因为 $q(x) \leqslant \|x\|_\infty$, 所以 q 连续. 这样 $\ker q$ 是完备空间 l^∞ 的闭集，它完备.

连续半范数的应用很广，它能简化很多计算过程.

习 题

练习 1 证明：连续满射 $f: X \to Y$ 将 X 的稠密集 A 映至 Y 的稠密集.

练习 2 设度量空间 (X, d) 的两个闭集 E 与 F 不交，试证明存在不相交的开集 U 和 V, 它们分别包含 E 和 F.

练习 3 求实直线上函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的不连续点，其中

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(1+\sin x)^t-1}{(1+\sin x)^t+1}.$$

练习 4 给定可列个度量空间 $(X_i,d_i):i\in J$, 命 $X=\prod\limits_{i\in J}X_i$. 当 $x\in X$ 时，命 $P_ix\in X_i$ 是 x 的第 i 个分量. 试在 X 上规定度量 d 使 (X,d) 中 $x\to x_0$ 当且仅当每个 X_i 中 $P_ix\to P_ix_0$. 并证明以下结论:

(1) 每个投影 $P_i:X\to X_i$ 是连续的开映射.

(2) 设 E_i 是 X_i 的闭集，则 $E:=\prod\limits_{i\in J}F_i$ 是 X 的闭集.

(3) 设 U_i 是 X_i 的开集且 $\{i|U_i\neq X_i\}$ 有限，则 $\prod\limits_{i\in J}U_i$ 是 X 的开集.

(4) X 是完备度量空间当且仅当每个 X_i 是完备度量空间.

练习 5 设 J 是可列集，在 $\mathbb{R}^J$ 上规定如练习 4 的度量，说明函数 $\sup:\overline{\mathbb{R}}^J\to\overline{\mathbb{R}}$ 下半连续，函数 $\inf:\overline{\mathbb{R}}^J\to\overline{\mathbb{R}}$ 上半连续.

熟悉拓扑者可证明 J 是任意非空集合时以上结论也对.

练习 6 命 $d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$, 这得度量空间 $(\overline{\mathbb{R}},d)$. 命 $x=0$, 说明闭球 $B(x,2)$ 与开球 $O(x,2)$ 都是 $\overline{\mathbb{R}}$, 而球面 $S(x,2)$ 却是空集.

练习 7 设 (X,d) 是度量空间，证明 $d:X\times X\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

练习 8 证明定理 2(熟悉拓扑者可将定理 2(3) 中的 X 设为拓扑空间而 Y 设为 Hausdorff 空间).

练习 9(连续延拓原理) 设 X_0 是度量空间 X 的稠密集而 Y_0 是完备度量空间 Y 的子集，证明一致连续映射 $f_0:X_0\to Y_0$ 有唯一 (一致) 连续延拓 $f:X\to Y$.

练习 10 以 $\mathcal{O}(X)$ 和 $\mathcal{E}(X)$ 是度量空间 X 中的开集全体和闭集全体. 证明:

(1) $\mathcal{O}(X)$ 和 $\mathcal{E}(X)$ 生成同一个 σ- 环 $\mathcal{B}(X)$, 其成员称为 Borel 集.

(2) 半连续函数 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是 Borel 函数 — 使 Borel 集的原像为 Borel 集.

(3) 设 $\mathcal{M}$ 是 X 上的单调类，则 $\mathcal{O}(X)\subseteq\mathcal{M}$ 当且仅当 $\mathcal{E}(X)\subseteq\mathcal{M}$.

练习 11 设 λ 是 2^X 上的外测度而 (Y,d) 是度量空间. 证明以下条件等价:

(1) 映射 $f:X\to Y$ 是 λ- 可测函数: 当 F 是 Y 的 Borel 集时，$f^{-1}(F)$ 是 X 的 λ- 可测集 (见 §2.4 练习 24).

(2) 当 $E\subseteq X$ 而 A 和 B 是 Y 中子集使 $d(A,B)>0$ 时,

$$\lambda(E\cap f^{-1}(A))+\lambda(E\cap f^{-1}(B))\leqslant\lambda(E).$$

此处 $d(A,B)=\inf\{d(y_1,y_2)|y_1\in A,y_2\in B\}$.

练习 12 设 X 是度量空间而 λ 是 2^X 上的外测度，证明恒等映射 $I: X \to X$ 是 λ- 可测函数当且仅当 X 的开集 V 都是 λ- 可测集.

练习 13(Carathéodory 准则) 设 (X,d) 是度量空间而 λ 是 2^X 上的外测度，则 X 的开集 V 都 λ- 可测当且仅当 X 的子集 E_i 使 $d(E_1,E_2)>0$ 时，

$$\lambda(E_1 \cup E_2) = \lambda(E_1) + \lambda(E_2).$$

练习 14 对于度量空间 (X,d_1) 和 (X,d_2), 证明以下条件等价：

(1) 度量空间 (X,d_2) 中开集 U 都是度量空间 (X,d_1) 中开集.

(2) 对任何 $x_0 \in X$, 若 $d_1(x,x_0) \to 0$, 证明 $d_2(x,x_0) \to 0$.

(3) 恒等映射 $I:(X,d_1) \to (X,d_2)$ 连续.

练习 15 试证明集合 X 上两个度量 d_1 与 d_2 诱导相同的度量拓扑当且仅当它们诱导相同的序列收敛性： $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n,x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d_2(x_n,x)=0$.

练习 16 对于度量空间 (X,d_1) 和 (X,d_2), 证明以下条件等价：

(1) d_1 和 d_2 等价： (X,d_1) 与 (X,d_2) 中有相同的度量拓扑.

(2) $x_0 \in X$ 时， $d_1(x,x_0) \to 0$ 当且仅当 $d_2(x,x_0) \to 0$.

(3) 恒等映射 $I:(X,d_1) \to (X,d_2)$ 是同胚.

练习 17 证明：度量 d 与度量 $\tilde{d} = d/(1+d)$ 诱导了相同的度量拓扑.

练习 18 设 (X,d) 和 (Y_n,d_n) 都是度量空间而 $f_n: X \to Y_n$ 是连续映射，证明 ρ 和 d 是等价度量，其中

$$\rho(x_1,x_2) = d(x_1,x_2) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(f_n(x_1),f_n(x_2)) \wedge 2^{-n}.$$

练习 19(Alexandrov 定理) 完备度量空间 (X,d) 中非空 G_δ- 型集 V 上有个等价度量 ρ 使 (V,ρ) 为完备度量空间.

练习 20(Baire-Tietze) 设度量空间上的函数 $h: X \to \overline{\mathbb{R}}$ 下半连续，则有点态递增至 h 的连续函数列 $(h_n: X \to \overline{\mathbb{R}})$ 使 $\inf h(X) \leqslant h_1 \leqslant h$ 且当 $h_1(x_0) = \inf h(X)$ 时， $h(x_0) = \inf h(X)$.

练习 21(Baire-Tietez) 设度量空间上的函数 $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ 上半连续，则有点态递减至 g 的连续函数列 $(g_n: X \to \overline{\mathbb{R}})$ 使 $\sup g(X) \geqslant g_1 \geqslant g$ 且当 $g_1(x_0) = \sup g(X)$ 时， $g(x_0) = \sup g(X)$.

练习 22(Hahn) 设度量空间上的函数 $h: X \to \overline{\mathbb{R}}$ 下半连续而 $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ 上半连续. 如果 $g \leqslant h$, 则有连续函数 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ 使 $g \leqslant f \leqslant h$.

练习 23 用半连续函数的方法证明 Tietze 扩张定理: 设 E 是度量空间 X 的闭集. 任何连续函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 都有连续延拓 $g: X \to \mathbb{R}$ 使 $\inf g(X) = \inf f(E)$ 且 $\sup g(X) = \sup f(E)$.

练习 24 证明: 关于双射 $f: X \to Y$ 的以下条件等价:

(1) f 是同胚或拓扑映射.

(2) 子集 U 是 X 的开集当且仅当 $f(U)$ 是 Y 的开集.

(3) 子集 E 是 X 的闭集当且仅当 $f(E)$ 是 Y 的闭集.

(4) 对于 X 的子集 S, 成立 $f(S^\circ) = f(S)^\circ$.

(5) 对于 X 的子集 S, 成立 $\overline{f(S)} = f(\overline{S})$.

练习 25 设 X 与 Y 是广义实数系的区间. 试证明 X 与 Y 同胚当且仅当以下三种情形之一出现:

(1) X 与 Y 都是开区间.

(2) X 与 Y 都是闭区间.

(3) X 与 Y 都是半开半闭的区间.

练习 26 关于度量空间 X 的 Borel 集代数 $\mathcal{B}(X)$, 试证以下结论:

(1) $\mathcal{B}(X)$ 是包含所有开集且对可数并与可数交封闭的最小集类 $\mathcal{B}$.

(2) $\mathcal{B}(X)$ 是包含所有闭集且对可数并与可数交封闭的最小集类 $\mathcal{B}$.

(3) $\mathcal{B}(X)$ 是包含所有开集且对可数交与可数无交并封闭的最小集类 $\mathcal{B}$.

(4) $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(X) \cap A$, 其中 A 为 X 的子空间.

练习 27 设 E 是度量空间 X 的非空闭集, 证明有连续函数 $f: X \to [0,1]$ 使 $E = f^{-1}\{1\}$.

练习 28 将 Cantor 集 K 视为全空间. 任取 $x \in K$, 证明 K 中有可列个相互不交的既开又闭的集 $V_n: n \geqslant 1$ 使其并为 $K \setminus \{x\}$.

练习 29(Sierpinski) 设 X 是度量空间, 则 $\mathcal{B}(X)$ 是包含所有闭集且对可数交与可数无交并封闭的最小集类 $\mathcal{B}$.

练习 30 对于 $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 及 $x\in X$, 命

$$h_0(x)=f(x)\vee\varlimsup_{y\to x}f(y),$$

$$g_0(x)=f(x)\wedge\varliminf_{y\to x}f(y).$$

证明: (1) $h_0=\min\{h|上半连续函数h\geqslant f\}$. 据此称 h_0 是 f 的上半包.

(2) $g_0=\max\{g|下半连续函数g\geqslant f\}$. 据此称 g_0 是 f 的下半包.

(3) f 上半连续当且仅当 $f=h_0$. 而 f 下半连续当且仅当 $f=g_0$

练习 31 证明: 当 $x\in l^\infty$ 时, $d(x,\mathbf{c}_0)=\varlimsup_{n\to\infty}|x_n|$.

练习 32 命 $L=\{f\in C[0,1]|f(0)=0\}$, 当 $f\in C[0,1]$ 时求 $d(f,L)$.

练习 33 对于映射 $f:X\to Y$ 与 $E\subseteq X$, 命 $\omega E=\sup_{x,z\in E}d(f(x),f(z))$. 作振幅$\omega(x)=\inf_{r>0}\omega O(x,r)$, 其中 $O(x,r)=\{z\in X|d(z,x)<r\}$.

(1) $\varlimsup_{z\to x}d(f(z),f(x))\leqslant\omega(x)\leqslant 2\varlimsup_{z\to x}d(f(z),f(x))$.

(2) f 在 x 连续当且仅当 $\omega(x)=0$. 因此 f 的连续点全体是 $(\omega=0)$.

(3) $\omega:X\to\overline{\mathbb{R}}$ 是上半连续函数. 因此 ω 是 Borel 函数.

(4) f 的连续点全体是 G_δ 型集, 不连续点全体是 F_σ 型集.

练习 34 将 Hilbert 方体 $\mathbf{H}=\prod_{n=1}^{\infty}[0,\frac{1}{n}]$ 作为 l^2 的子空间, 它是完备度量空间. 以 $P_n:\mathbf{H}\to[0,\frac{1}{n}]$ 记向第 n 个分量的投影. 证明:

(1) $\mathbf{H}$ 中 $y\to y_0$ 当且仅当 n 是正整数时 $P_ny\to P_ny_0$.

(2) (X,d) 是可分度量空间时, 试构造个嵌入 $f:X\to\mathbf{H}$.

练习 35(Sierpinski) 实直线中开区间不能写成可列个闭集的无交并.

练习 36 设 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 固定 $x\in[a,b]$, 函数 $f(x,\cdot):[c,d]\to\mathbb{R}$ 的全变差记为 $g(x)$. 试证明 $g:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}}$ 是下半连续函数.

练习 37 条件同练习 23. 设 a 和 b 是正实数使 $a\leqslant f\leqslant b$. 命

$$g(x)=\inf\{d(x,z)f(x)|z\in E\}:x\in X;$$

$$h(x)=g(x)/d(x,E):x\in X\setminus E.$$

证明: (1) $g:X\to\mathbb{R}$ 是一致连续函数, 而 $h:E^{\mathrm{c}}\to\mathbb{R}$ 是连续函数.

(2) 当 $x_0\in\partial E$ 时, $\lim_{x\to x_0}g(x)=f(x_0)$.

(3) 如下定义的函数 $\tilde{f}:X\to\mathbb{R}$ 是 f 的连续延拓.

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}g(x): & x\in E^{\mathrm{c}},\\ f(x): & x\in E.\end{cases}$$

§5.4 完备与紧

本节是有关度量空间的点集分析最重要的部分. 熟练掌握并应用以下诸定理是学好泛函分析以后内容的关键.

第一纲集与第二纲集 空间 X 中可数个疏朗集的并称为 X 的第一纲集; 其余的子集称为 X 的第二纲集.

(1) 作为实直线的子空间, 整数集 $\mathbb{Z}$ 是第二纲空间. 这是因为 $\mathbb{Z}$ 中疏朗集只有空集. 作为实直线的子空间, 有理数域是第一纲空间. 这是因为 $\mathbb{Q}$ 是可列集且其中单点集 $\{r\}$ 都是 (闭集但无内点因而是) 疏朗集.

(2) 设 X 的稠密子集 A 是第二纲集, 则子空间 A 是第二纲的.

(3) 设 X 是第二纲赋范空间而 E 是其对称凸集使集列 (nE) 并为 X, 则有个 $r>0$ 使 $(X)_r \subseteq \overline{E}$.

如果 X 中可数个稠密开集的交集还是稠密集, 则称 X 是 Baire 空间. 这相当于 X 中可数个 G_δ 型稠密集之交还是稠密集. Baire 空间是第二纲的.

以下结论是泛函分析重要理论的基础.

定理 1(Baire 纲定理) 完备度量空间是 Baire 空间因而是第二纲的.

例 1 无理数集稠于实直线且是 G_δ- 型集

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\bigcap_{r\in\mathbb{Q}}(\mathbb{R}\setminus\{r\}).$$

无理数集与有理数集这个稠密集不相交, 从而有理数集不是 G_δ- 型集.

例 2 实直线上函数列的点态收敛不能用度量刻画. 否则, $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ 上有个度量 d 刻画了点态收敛. 记 $A=\{(\cos(n!\pi\cdot))^{2k}|n,k\in\mathbb{Z}_+\}$.

以 f 表示 Dirichlet 函数 (即 $\mathbb{Q}$ 的特征函数), 据数学分析知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2k}.$$

这表明 f 是 A 的接触点. 注意到 A 中的函数都连续, 所以有个连续函数列 (f_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty}d(f_n,f)=0$, 换言之, (f_n) 点态逼近 f.

因为 $f(x)=1$ 当且仅当有子列 (f_{k_n}) 使 $f_{k_n}(x)>1/2$, 所以

$$\mathbb{Q}=\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant n}(f_k>\frac{1}{2}).$$

注意到 $(f_k>b)$ 是开集, 从而 $\mathbb{Q}$ 是 G_δ- 型集, 与上例矛盾.

以下结论在判断第二纲性方面将起很大作用.

定理 2 度量空间 X 的第二纲稠密集 A 是第二纲子空间.

列紧集与预紧集 设 S 是度量空间 X 的子集 S.

(1) 称 S 为 X 的列紧集是指 S 中序列都有子列在 X 中收敛. 列紧具有相对性. 如 $[0,1]$ 中有理数全体是 $\mathbb{R}$ 的列紧集, 但非 $\mathbb{Q}$ 的列紧集.

(2) 设 E 也是 X 的子集使 $S \subseteq \bigcup\limits_{x\in E} O(x,\varepsilon)$, 称 E 是 S 的一个 $\varepsilon-$ 网.

(3) 如果对任何 $\varepsilon > 0$, S 有个有限 $\varepsilon-$ 网, 称 S 为完全有界集或预紧集. 这等价于 S 中任意序列 (x_n) 都有基本子列.

(4) 度量空间的预紧集是有界的可分集, 它的子集与闭包也是预紧集.

(5) 列紧集的子集与闭包是列紧集.

(6) 有限个 (预) 列紧集的并集是 (预) 列紧集.

(7) 完全有界集 S 的一致连续映像是完全有界集.

据 Bolzano-Weierstrass 定理, Euclid 空间的有界序列 (x_n) 都有收敛子列. 因此 Euclid 空间的有界集都是列紧集.

定理 3(Hausdorff) 设 S 是度量空间 X 的子集. 如果 S 是 X 的列紧集, 则 S 是预紧集. 逆命题在 X 完备时成立.

例 3 可列集 M 上广义实值函数空间 $\overline{\mathbb{R}}^M$ 在点态收敛下是列紧的. 换言之, M 上函数列 $(f_n : M \to \overline{\mathbb{R}})$ 都有点态收敛的子列.

为此设 $M = \mathbb{Z}_+$. 数列 (b_n) 的子列 (b_{k_n}) 可简记成 $(b_n)_J$, 其中 $J = \{k_n | n \geqslant 1\}$. 数列 $(f_l(1))_{l=1}^{\infty}$ 有个收敛子列 $(f_l(1))_{J_1}$. 数列 $(f_l(2))_{J_1}$ 有个收敛子列 $(f_l(2))_{J_2}$. 如此下去. 将 J_n 中数依小到大排列, 取其第 n 项 p_n. 当 $n \geqslant k$ 时, $p_n \in J_n \subseteq J_k$. 因此 $(f_{p_n}(k))_{n\geqslant k}$ 是 $(f_n(k))_{n\in J_k}$ 的子列, 因而 $(f_{p_n}(k))_{n\geqslant 1}$ 收敛. 这表明子列 (f_{p_n}) 点态收敛.

集簇 $\{F_i | i \in I\}$ 具备 *有限交性质* 是指其中任何有限个成员都有公共交点.

定理 4 设度量空间 X 的子集, 以下等价条件:

(1) 全空间 X 对 S 的任何开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$ 存在有限子覆盖.

(2) 子空间 S 中有限交的闭集族 $\{F_i | i \in I\}$ 有公共交点.

(3) 子空间 S 中任意闭集套 (E_n) 有公共交点.

(4) 子集 S 既是全空间的列紧集也是全空间的闭集.

(5) 子集 S 是完备的预紧集.

此时, 称 S 是 *紧集* 或作为子空间是 *紧空间*.

紧空间 X 的闭集 S 是紧集. 这是因为 S 的闭集也是 X 的闭集, S 中有限交的闭集族有公共交点.

定理 5(极值原理) 设 (X,d) 是紧度量空间，则任何上半连续 [下半连续] 函数 $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ 可取到最大值 [最小值].

例 4 对于度量空间 X 的点 x 与非空紧集 S，有 $x_0 \in S$ 适合 $d(x,x_0) = d(x,S)$，这样的 x_0 称为 S 对 x 的 *最佳逼近*. 这是因为 S 上连续函数 $y \mapsto d(x,y)$ 有最小值点.

在平面上，取 $\mathbb{T}$ 为单位圆周，则 $\mathbb{T}$ 中任何一点 w 都是 $\mathbb{T}$ 对原点的最佳逼近. 这表明最佳逼近可能有很多个. 一般子集 S 对 x 的最佳逼近可能不存在. 如 $d(\sqrt{2},\mathbb{Q}) = 0$，但 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

无论最佳逼近是否存在，S 中总有序列 (x_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,x_n) = d(x,S)$，这样的序列称为 S 对 x 的 *极小化序列*.

引理 6(Lebesgue) 设 $\{U_i|i \in I\}$ 是紧度量空间 (X,d) 的开覆盖，则有 $\varepsilon > 0$ 使 $x \in X$ 时，存在 $i \in I$ 满足 $O(x,\varepsilon) \subseteq U_i$.

以上引理中的 ε 称为覆盖 $\{U_i|i \in I\}$ 的一个 Lebesgue 数.

定理 7(Dini) 紧空间上连续函数的单调序列 $(f_n : X \to \mathbb{R})$ 逐点逼近连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 时，(f_n) 一致逼近 f.

性质 8 (1) 有限个 (预或列) 紧集的并是 (预或列) 紧集.

(2) [列] 紧集 S 的连续映像 $f(S)$ 是 [列] 紧集.

(3) 紧度量空间 X 到度量空间 Y 的连续映射 f 一致连续.

(4) 紧 [完备] 度量空间 X 的闭集 A 是紧 [完备] 集.

(5) 设 A 与 B 是 (预或列) 紧集，则 $A \times B$ 是 (预或列) 紧集.

下设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上赋范空间.

(6) 设 E 与 F 是 X 中 (预或列) 紧集而 S 是 $\mathbb{K}$ 中 (预或列) 紧集，则 $E \pm F$ 和 SE 是 (预或列) 紧集.

(7) 当 E 是 X 中预紧集 [且 X 完备] 时，$\operatorname{cov} E$ 是预 [列] 紧集.

以上结论凸显完备集的重要性. 不完备的空间可置于一个完备空间中讨论. 如作为 $\mathbb{R}$ 的子空间，$\mathbb{Q}$ 不完备，但 $\mathbb{Q}$ 是完备空间 $\mathbb{R}$ 的一个稠密集.

定理 9 任何度量空间 (X,d) 都有完备化 — 以 X 为稠密集的完备度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$. 完备化在等距同胚下是唯一的：如果 $(\hat{X},\hat{d})$ 也是 X 的完备化，则有唯一等距同胚 $f: \tilde{X} \to \hat{X}$ 使 $x \in X$ 时，$f(x) = x$.

作为 $L^1[a,b]$ 的子空间，$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ 的完备化是 $L^1[a,b]$. 这里需要说明的是，赋范空间 $(L^1[a,b],\|\cdot\|_1)$ 中的每个点都是一个可积函数所在的等价类 $[f]$(见 §5.1 例 5 中的说明)，而赋范空间 $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ 中的每个点都是一个实实在在的连续函数 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. 命 $Af = [f]$，得等距嵌入 $A : (C[a,b],\|\cdot\|_1) \to (L^1[a,b],\|\cdot\|_1)$. 将 $C[a,b]$ 与其像 $A(C[a,b])$ 同一后，可将 $C[a,b]$ 视为 $L^1[a,b]$ 的子空间.

有限维赋范空间与无限维赋范空间之比较

(1) 范数等价性：有限维线性空间上任何两个范数都等价，因而它上面只有一个范数拓扑．无限维线性空间上有无限个范数相互不等价，因而它上面有无限多个相互不同的范数拓扑．

(2) 完备性：有限维赋范空间都是 Banach 空间．事实上，对于两个等价范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 而言，考察 $(X,\|\cdot\|_1)$ 的完备性与考察 $(X,\|\cdot\|_2)$ 的完备性是一致的．据 Euclid 空间的完备性知有限维赋范空间都是 Banach 空间．

无限维赋范空间可能是不完备的．事实上，线性空间 l^0– 只有有限项不为零的数列全体 – 按任何范数不完备．为此，命 $X_n = \text{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$．在任何范数 F，$X_n$ 是 l^0 的完备线性子空间且无内点，因此 X_n 是 l^0 的疏朗集．而 $l^0 = \bigcup\{X_n|n=1,2,\cdots\}$．故 l^0 总是第一纲的．

(3) 闭性：赋范空间的有限维线性子空间都是闭的．而无限维线性子空间则不一定是闭的．如 l^0 在 l^1 中稠密，因此 l^0 不是 l^1 的闭集．

(4) 有界集的列紧性：有限维赋范空间的有界集都是列紧集而其有界闭集是紧集 (Heine-Borel 定理)．无限维赋范空间的单位球面 S 不是预紧集，因而不是列紧集也非紧集．为此取 $x_1 \in S$．因为 $L_1 := \text{span}\{x_1\}$ 是 X 的真闭线性子空间，由 F. Riesz 引理，可取 $x_2 \in S$ 使 $d(x_2, L_1) > 1/2$．因为 $L_2 := \text{span}\{x_1,x_2\}$ 是 X 的真闭线性子空间，于是又可用 Reisz 引理．继续以上过程得到 S 中序列 (x_n) 使 $d(x_n,\text{span}\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}) > 1/2$．当 $m \neq n$ 时，$\|x_m - x_n\| > 1/2$．这样 (x_n) 没有基本子列．

这还得到一个结论：无限维赋范空间的非空开集不是列紧集．

(5) 最佳逼近的存在性：赋范空间 X 中有限维子空间 L 对任何 $x \in X$ 的最佳逼近存在 (而无限维子空间则不尽然)．为此作 L 的非空有界闭集

$$S = \{y \in L | d(x,y) \leqslant d(x,L)+1\}.$$

于是紧集 S 对 x 有最佳逼近，这也是 L 对 x 的最佳逼近．

习 题

练习 1 诱导相同度量拓扑的两个度量不一定诱导相同的基本序列与完备性．

练习 2 设 $f: X \to Y$ 是度量空间之间的映射．

(1) 如果有非负实数 c 使 $x_1, x_2 \in X$ 时

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant c d(x_1, x_2),$$

则称 f 是 Lipschitz 映射．试证明这样的映射一致连续．

(2) 如果每点 $x \in X$ 有个邻域 U 使限制 $(f: U \to Y)$ 是 Lipschitz 映射，则称 f 是局部 Lipschitz 映射．试证明这样的映射连续．

练习 3 设 E 是赋范空间 X 的凸集而 Y 是度量空间, 设 $f: E \to Y$ 是映射. 若有非负实数 c 使 $x \in X$ 时

$$\overline{\lim_{z \to x}} \frac{d(f(z), f(x))}{\|z - x\|} \leqslant c,$$

证明 $x, z \in X$ 时, $d(f(z), f(x)) \leqslant c\|z - x\|$.

练习 4 在正整数列 $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ 的全体 $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}$ 上构造度量 d 如下

$$d(k, l) = \sum_{i=1}^{\infty} |k_i - l_i| \wedge 2^{1-i}.$$

设度量空间 X 完备且可分, 构造个满的局部 Lipschtiz 映射 $f: \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+} \to X$.

练习 5 用 Baire 纲定理证明 Cantor 集 K 不是可数集.

练习 6 完备的度量空间 $\mathbb{Z}$ 是可列集. 这是否与 Baire 纲定理矛盾?

练习 7 设 S 是完备度量空间 X 的第一纲集, 证明 $X \setminus S$ 在 X 中稠密.

练习 8 证明: 预紧集 A 在一致连续映射 f 下的像集 $f(A)$ 是预紧集.

* **练习 9** 证明完备度量空间中 G_δ- 型集 V 作为子空间是 Baire 空间.

练习 10 证明: 无限维 Banach 空间的 X 可列子集 E 不能成为一个线性基.

练习 11 证明: 度量空间 (X, d) 的紧性与以下 3 个条件相互等价:

(1) X 上逐点递增至一个连续函数的连续函数序列 (f_n) 一致收敛.

(2) X 上实值连续函数 f 都有上有界 (都有下有界).

(3) X 上实值连续函数 f 都能取到最大值 (最小值).

需要指出, 练习 11 中的等价条件不是一般拓扑空间为紧的等价条件.

练习 13 证明: 度量空间 (X, d) 的子集 S 是列紧集当且仅当它是 相对紧集—它是 X 中某个紧集的子集.

练习 14 设 $1 \leqslant p < +\infty$, 试说明 $C[a, b]$ 按 L^p- 范数的完备化是 $L^p[a, b]$.

练习 15 证明: 紧度量空间 Y 都是 Cantor 集 K 的连续映像.

练习 16 设 S 是空间 X 的紧集而 T 是空间 Y 的紧集.

(1) 如果 W 是 $X\times Y$ 的开集, 证明 $\forall_S W$ 是 Y 的开集, 其中

$$\forall_S W=\{y\in Y|\forall x\in S:(x,y)\in W\}=\bigcap_{x\in S}W_x.$$

(2) 如果 E 是 $X\times Y$ 的闭集, 证明 $\exists_S E$ 是 Y 的闭集, 其中

$$\exists_S E=\{y\in Y|\exists x\in S:(x,y)\in E\}=\bigcup_{x\in S}E_x.$$

(3) 证明向第二个分量的投影 $S\times Y\to Y$ 是闭映射 —— 将闭集映为闭集.

(4) 如果 W 是 $X\times Y$ 的开集, 证明 $\forall^T W$ 是 X 的开集, 其中

$$\forall^T W=\{x\in X|\forall y\in T:(x,y)\in W\}=\bigcap_{y\in T}W^y.$$

(5) 如果 E 是 $X\times Y$ 的闭集, 证明投影 $\exists^T E$ 是 Y 的闭集, 其中

$$\exists^T E=\{x\in X|\exists y\in T:(x,y)\in E\}=\bigcup_{y\in T}E^y.$$

(6) 证明向第一个分量的投影 $X\times T\to X$ 是闭映射.

练习 17 说明 $C[-1,1]$ 按 L^1 范数是不完备的赋范空间.

练习 18 证明 $l^\infty[0,1]$ 中 $A=\mathrm{span}\{\chi_{[0,t]}|0\leqslant t\leqslant 1\}$ 在 $C[0,1]$ 中稠密.

练习 19 设 S 是赋范空间 X 中的预紧集, 证明 X 中有无穷小量 (x_n) (即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$) 使 $S\subseteq\overline{\mathrm{cov}}_{n\geqslant 1}\,x_n$.

练习 20 设 p 是个素数而 a 是非零整数, 使 p^n 整除 a 的最大非负整数 n 记为 $\mathrm{ord}_p\,a$. 如 $\mathrm{ord}_5\,35=1$ 且 $\mathrm{ord}_5\,250=3$. 约定 $\mathrm{ord}_p\,0=+\infty$. 证明:

(1) 当 a 和 b 是整数时, $\mathrm{ord}_p(ab)=\mathrm{ord}_p\,a+\mathrm{ord}_p\,b$.

(2) 当 x 是有理数 b/a(其中 b 是整数而 a 是非零整数) 时, 记

$$\mathrm{ord}_p\,x=\mathrm{ord}_p\,b-\mathrm{ord}_p\,a.$$

这个数与 x 的表示方式 b/a 无关. 记 $|x|_p=p^{-\mathrm{ord}_p x}$.

(3a) $\mathrm{ord}_p\,x=+\infty$ 当且仅当 $x=0$.

(3b) $\mathrm{ord}_p(xy)=\mathrm{ord}_p\,x\,\mathrm{ord}_p\,y$.

(3c) $\mathrm{ord}_p(x+y)\geqslant\min\{\mathrm{ord}_p\,x,\mathrm{ord}_p\,y\}$

(4a) $|x|_p=0$ 当且仅当 $x=0$.

(4b) $|xy|_p=|x|_p|y|_p$.

(4c) $|x+y|_p\leqslant|x|_p+|y|_p$.

(4d) $|x+y|_p \leqslant \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

(5) 任取两个有理数 x 和 y, 命 $d_p(x,y) = |x-y|_p$, 证明 $\mathbb{Q}$ 按 d_p 成为度量空间且 $d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}$.

(6) 度量空间 $(\mathbb{Q}, d_p)$ 中的开球记为 $O_p(x,r)$, 证明 $|x-y|_p < r$ 当且仅当 $O_p(x,r) = O_p(y,r)$(这表明开球中的点都是这个开球的球心).

(7) 度量空间 $(\mathbb{Q}, d_p)$ 中的闭球记为 $B_p(x,r)$, 证明 $|x-y|_p \leqslant r$ 当且仅当 $B_p(x,r) = B_p(y,r)$(这表明闭球中的点都是这个闭球的球心).

练习 21 符号同练习 20. 度量空间 $(\mathbb{Q}, d_p)$ 的完备化记为 $(\mathbb{Q}_p, d_p)$. 证明:

(1) $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ 中任何 3 点 x, y, z 都满足不等式:

$$d_p(x,z) \leqslant \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}.$$

(2) $\mathbb{Q}_p$ 中序列 (x_n) 收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} d_p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

(3) $\mathbb{Q}$ 上的代数运算可唯一延拓成 $\mathbb{Q}_p$ 上的代数运算使 $\mathbb{Q}_p$ 成为一个环.

(4) $|\cdot|_p$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上有唯一连续延拓 — 仍记为 $|\cdot|_p$ 使 $d_p(x,y) = |x-y|_p$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上仍成立. 将 $|\cdot|_p$ 称为 p 进绝对值.

(4a) 齐次性: $|xy|_p = |x|_p|y|_p$.

(4b) 次可加性: $|x+y|_p \leqslant |x|_p + |y|_p$.

(4c) 非 Archimede 性: $|x+y|_p \leqslant \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

(4d) 次可减性: $||x|_p - |y|_p| \leqslant |x-y|_p$.

(4e) 与度量的相容性: $d_p(x,y) = |x-y|_p$.

(4f) 分离性: $|x|_p = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

(5) $\mathbb{Q}_p$ 中元素 x 称为 p 进数, 非零 p 进数都可逆.

(6) $\mathbb{Q}_p$ 中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|_p = 0$.

(7) 设有理数 x 满足 $|x|_p \leqslant 1$, 则对非负整数 i, 有整数 k 使 $0 \leqslant k < p^i$ 且 $|x-k|_p \leqslant p^{-i}$.

(8) 设 p 进数 x 满足 $|x|_p \leqslant 1$, 则有逼近 x 的唯一整数列 $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ 使 $0 \leqslant a_i < p^i$ 及 $a_i \equiv a_{i+1} \mod p^i$ 恒成立.

(9) 每个 p 进数 x 有唯一 p 进展式 $x = \sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i p^i$, 即有唯一整数 n 和唯一整数列 $(a_i)_{i=n}^{\infty}$ 使

(9a) $i \geqslant n$ 时, $0 \leqslant a_i < p$.

(9b) $i \geqslant n$ 时, $a_i \equiv a_{i+1} \mod p^i$.

(9c) $\lim\limits_{l\to\infty} |\sum\limits_{i=n}^{l} a_i p^i - x|_p = 0$.

(10) 在 (9) 中, $|x|_p \leqslant 1$ 当且仅当 x 的 p 进展式中没有 p 的负整数幂. 此时称 x 为 p 进整数 (为示区别, $\mathbb{Z}$ 中数称为有理整数).

(11) 将 p 进整数全体记为 $\mathbb{Z}_p$, 它是 $\mathbb{Q}_p$ 的一个子环.

练习 22 证明：无孤立点的完备度量空间 (X, d) 的势不小于 $\aleph$.

练习 23 证明：实直线上非空完全集 E 具有连续势.

练习 24 证明：实直线上的不可数闭集 E 具有连续势.

练习 25 设函数 $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ 处处可微. 证明：当 $\delta > 0$ 时，$[0,1]$ 有个 G_δ-型子集 E 使 $|E^c|_1 < \delta$ 且当 $\varepsilon > 0$ 时，存在 $\eta > 0$ 使 $x \in E$ 而 $z \in [0,1]$ 满足 $|z - x| < \eta$ 时，

$$\left|\frac{f(z) - f(x)}{z - x} - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

练习 26 约定 $1/(+\infty) = 0$, 作实直线中递增子集列 (E_n) 如下：

$$E_n = \{\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} | k_1, \cdots, k_n = 1, 2, \cdots, +\infty\}.$$

试证明 E_n 都是紧集且 E_n 的导集为 E_{n-1}, 其中约定 $E_0 = \{0\}$.

练习 27 完备度量空间 X 为其闭集列 (E_n) 之并，证明 $\bigcup\limits_n E_n^\circ$ 稠于 X.

练习 28 设 X 是度量空间，证明有 Banach 空间 Y 和等距嵌入 $f : X \to Y$ 使 $\operatorname{span} f(X)$ 稠于 Y.

练习 29(Banach 纲定理) 设空间 X 的子空间 U 为 U 的一些相对开集 $U_i : i \in I$ 之并.

(1) 如果 U_i 都是 X 的疏朗集，则 U 也是 X 的疏朗集.

(2) 如果 U_i 都是 X 的第一纲集，则 U 也是 X 的第一纲集.

练习 30 设 X 是紧度量空间而 Y 是度量空间. 如果 $f : X \to Y$ 是连续双射，证明它是同胚.

练习 31 无孤立点完备空间 X 的可数稠密集 D 不是 G_δ- 型集.

练习 32 设连续函数列 $(f_n : [0,1] \to \mathbb{C})_{n=0}^{\infty}$ 恒使 f_n 的导函数为 f_{n-1}. 设对每个 $x \in [0,1]$, 总有个 n 使 $f_n(x) = 0$. 证明 $f_0 = 0$.

练习 33 设 (X, d) 是完备度量空间而 $\mathcal{G}$ 是 X 上某些连续函数组成的逐点有界的函数簇，证明 X 有个非空开集 U 使 $\mathcal{G}$ 在 U 上一致有界.

练习 34 设 A 和 B 是度量空间 (X, d) 的非空紧集. 证明：

(1) 有 $a_1 \in A$ 和 $b_1 \in B$ 使 $d(a_1, b_1) = \inf\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

(2) 有 $a_2 \in A$ 和 $b_2 \in B$ 使 $d(a_2, b_2) = \sup\{d(x, y) | x \in A, y \in B\}$.

练习 35 证明: 度量空间 (X,d) 的非空子集 A 是预紧集当且仅当 A 对任何 $\varepsilon>0$ 有个预紧的 ε- 网.

练习 36 证明: 度量空间之间的单射 $f:X\to Y$ 连续当且仅当 f 将 X 中的紧集映成 Y 中的紧集.

练习 37 设 X 为度量空间而 Y 为紧度量空间使映射 $f:X\to Y$ 的图像 $\operatorname{gr} f$ 是 $X\times Y$ 的闭集. 证明 f 连续.

练习 38 设 X 是无限维赋范空间, 证明 X 中有线性无关序列的单位向量 (x_n) 使 $i\neq j$ 时, $\|x_i-x_j\|\geqslant 1$.

练习 39 设 X 是第一纲空间, 证明 $X\times Y$ 也是第一纲空间.

练习 40 证明: X 的子集 S 是疏朗集当且仅当 X 有个闭集 E 使 $S\subseteq\partial E$[当且仅当 X 有开集 V 使 $S\subseteq\partial V$].

练习 41 对于空间 X 的子集 E, 证明以下条件等价:

(1) 有两个第一纲集 A_1 和 B_1 使 $(E\setminus A_1)\cup B_1$ 为开集.

(2) 有两个第一纲集 A_2 和 B_2 使 $(E\setminus A_2)\cup B_2$ 为闭集.

(3) 有两个第一纲集 A_3 和 B_3 及开集 V 使 $E=(V\setminus A_3)\cup B_3$.

(4) 有两个第一纲集 A_4 和 B_4 及闭集 F 使 $E=(F\setminus A_4)\cup B_4$.

练习 42 设练习 41 中条件被满足, 证明补集 E^{c} 也满足这些条件.

练习 43 证明空间 X 的 Borel 集 E 都满足练习 41 中的等价条件.

练习 44 在实直线 $\mathbb{R}$ 上找个 Lebesgue 零集 E 使其补集是第一纲集.

练习 45 证明可分赋范空间 X 中有序列 (x_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 且 $X=\overline{\operatorname{span}}_{n\geqslant1}x_n$, 也有有限维线性子空间序列 (X_n) 使 $\bigcup\limits_{n\geqslant1}X_n$ 稠于 X.

练习 46 证明函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的连续点全体不会是有理数集.

练习 47 证明非零 Lebesgue 可测集 E 含 $2^{\aleph}$ 个非 Lebesgue 可测集.

练习 48 试证明 Cantor 集 K 与以下积空间 (取积拓扑) 同胚:

$$\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+},K^2,K^3,K^4,\cdots,K^{\mathbb{Z}_+}.$$

§5.5 函数空间

非空集合 X 上实值函数全体 $\mathbb{R}^X$ 和复值函数全体 $\mathbb{C}^X$ 按函数加法与数乘成为实线性空间和复线性空间，它们的线性子空间 A 称为一个 **代数** 是指 A 对函数乘法封闭. 而紧空间上连续函数 $f: X \to \mathbb{C}$ 全体 $C(X)$ 按上确界范数 $\|f\| = \max\limits_{x\in X}|f(x)|$ 成为 Banach 空间. 命 $C(X,\mathbb{R}) = \{f \in C(X) | f(X) \subset \mathbb{R}\}$. 这是实 Banach 空间.

定理 1(Arzelà-Ascoli) 设 X 是紧度量空间，则 $C(X)$ 的子集 E 是一致收敛下的列紧集当且仅当它满足以下两个条件：

(1) 等度连续性：对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使 $f \in E$ 时，

$$d(x,z) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

(2) 逐点有界性：对任何 $x \in X$, $\{f(x)|f \in E\}$ 是有界数集.

定理 2(Fréchet, 1907) (1) 设 $1 \leqslant p < +\infty$, 则 l^p 的有界子集 S 是列紧集当仅当对任何 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n 使 $x \in S$ 时，$\sum\limits_{i>n} |x_i|^p < \varepsilon^p$.

(2) $\mathbf{c}$(或 $\mathbf{c}_0$) 的有界子集 S 是列紧集当仅当对任何 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 n 使 $x \in S$ 时，$\sup\limits_{i,j>n} |x_i - x_j| < \varepsilon$(或 $\sup\limits_{i>n}|x_i| < \varepsilon$).

以上定理也可写成以下简单形式

定理 2'(Fréchet, 1907) (1) 设 $1 \leqslant p < +\infty$, 则 l^p 的有界子集 S 是列紧集当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in S} \sum\limits_{i>n} |x_i|^p = 0$.

(2) $\mathbf{c}_0$ 的有界子集 S 是列紧集当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in S} \sup\limits_{i>n} |x_i| = 0$.

(3) $\mathbf{c}$ 的有界子集 S 是列紧集当且仅当对 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in S} \sup\limits_{i,j>n} |x_i - x_j| = 0$.

称 $C(X)$ 的子集 A**分离**X 的点是指 X 中不同两点 a 与 b 对应至少一个 $f \in A$ 使 $f(a) \neq f(b)$.

定理 3(Stone-Weierstrass 定理) 设 X 是紧空间而 $C(X,\mathbb{R})$ 的子代数 A 包含常数函数且分离 X 的点，则 A 在 $C(X,\mathbb{R})$ 中稠密.

称 A 是 **自伴的** 是指 A 对函数共轭封闭：$\{\overline{f}|f \in A\} = A$.

定理 4(Stone-Weierstrass 定理) 设 X 是紧空间而 $C(X)$ 的自伴子代数 A 包含常数函数且分离 X 的点，则 A 在 $C(X)$ 中稠密.

以 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ 记 n 个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的多项式全体.

例 1 设 X 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集，则

(1) $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 在 $C(X)$ 中 (依上确界范数) 稠密. 只需说明 $\mathbb{C}[x]$ 分离 X 的点. 对于 X 中互异两点 a 与 b, 无妨设它们第一个分量不等: $a_1 \neq b_1$. 命 $f(x)=x_1$, 则 f 是多项式且 $f(a)\neq f(b)$.

因为 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]=\mathrm{span}\{x^\alpha|\alpha\in\mathbb{N}^n\}$, 所以 $C(X)$ 可分.

(2) 设 $1\leqslant p<+\infty$, 则 $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ 在 $L^p(X)$ 中稠密 (因而 $L^p(X)$ 可分). 任取 $f\in C(X)$. 取 $g\in\mathbb{C}[x]$ 使 $\|g-f\|<\varepsilon$. 于是

$$\|g-f\|_p=(\int_X |g(x)-f(x)|^p dx)^{1/p}\leqslant \varepsilon \mathbf{m}(X)^{1/p}.$$

这表明 P 在 $C(X)$ 中按 L^p 范数稠密. 据 §3.4 定理 6 知 $C(X)$ 在 $L^p(X)$ 中稠密, 由传递性, $\mathbb{C}[x]$ 在 $L^p(X)$ 中稠密. 从而 $L^p(X)$ 可分.

单位圆周 $\mathbb{T}$ 上的函数 $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k$(其中只有有限个系数 c_k 非零) 也可称为三角多项式. 这是因为若记 $z=\exp(\sqrt{-1}t)$, 则

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k z^k = c_0+\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}((c_k+c_{-k})\cos kt+\sqrt{-1}(c_k-c_{-k})\sin kt).$$

例 2 设 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ 是连续函数而 $\varepsilon>0$, 则存在三角多项式 g 使 $|f-g|<\varepsilon$. 为此注意到三角多项式全体是个自伴代数，它能分离 $\mathbb{T}$ 中的点 (一个函数 z 就能分离 $\mathbb{T}$ 中的点).

仿例 1 可证明三角多项式全体在 $L^p(\mathbb{T})$ 中稠密，其中 $1\leqslant p<+\infty$.

圆周上的函数 f 可视为实直线上周期 2π 的函数 $t\mapsto f(\exp(\sqrt{-1}t))$. 据此与例 2 可得以下定理.

定理 5(Weierstrass 第二逼近定理) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是周期 2π 的连续函数而 $\varepsilon>0$, 则有三角多项式 g 使 $|f-g|<\varepsilon$.

局部一致收敛 设 M 是 Euclid 空间的开集，取其子集列 (U_k) 使对应的内部列 (U_k°) 覆盖 M 而闭包 $\overline{U_k}$ 都是 M 中紧集. 如可命

$$U_j=\{x:|x|<2^j, O(x,2^{-j})\subseteq M\}.$$

(1) 对于 M 上函数列 $f,f_1,f_2,\cdots$, 以下条件等价:

(1a) 局部一致收敛: 在 M 中每点的某邻域 V 上, (f_k) 一致收敛于 f.

(1b) 内闭一致收敛: 在 M 中每个紧集 K 上, (f_k) 一致收敛于 f.

(1c) 限制在每个 U_j 上, (f_k) 一致收敛于 f.

据此与 §5.1 例 2 和 §5.1 定理 1 知，M 上函数列的内闭一致收敛可由度量刻画：$\lim d(f_k, f) = 0$，其中 $d(f,g) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} d_j(f,g)$ 而

$$d_j(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \wedge 2^{-j} : x \in U_j\}.$$

在内闭一致收敛下，$\mathbb{C}^M$ 是完备的.

(2) M 上光滑函数列的各阶偏导数内闭一致收敛可由以下度量刻画

$$d(g,h) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \sum_{j\geqslant 1} \sup_{x\in U_j} |\partial^\alpha (g-h)(x)| \wedge 2^{-|\alpha|-j}.$$

定理 6 设 $1 \leqslant p < +\infty$，则 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的有界子集 S 是列紧集当且仅当

(1) S 等度平均连续：$\lim\limits_{u\to 0} \sup\limits_{f\in S} \|f_u - f\|_p = 0$，其中 $f_u(x) = f(x-u)$（即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使 $|u| < \delta$ 且 $f \in S$ 时，$\|f_u - f\|_p < \varepsilon$).

(2) S 等度绝对连续：$\lim\limits_{r\to +\infty} \sup\limits_{f\in S} \|f\chi_r\|_p = 0$，其中 χ_r 是 $\{x : |x| > r\}$ 的特征函数（即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $r > 0$ 使 $f \in S$ 时，$\|f\chi_r\|_p < \varepsilon$).

严格而言，$L^p(\mathbb{R}^n)$ 不是函数空间，因其点都是一个函数的等价类.

速降函数 称 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 为速降函数是指当 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ 时，

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < +\infty.$$

这即 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ 时，$\lim\limits_{|x|\to\infty} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0$. 简单而言，$f$ 是光滑函数且其任意阶导数比任意阶负幂次函数下降得都快. 此时 $\xi^\alpha \partial^\beta f$ 也是速降函数.

(1) 对于速降函数 f，函数 $x^\alpha \partial^\beta f(x)$ 也是速降函数. 为此以 i, j, k, l 代表 n 个变量的非负整数组，则

$$\begin{aligned} x^k \partial^l (x^\alpha \partial^\beta f(x)) &= x^k \sum_{i+j=l} \frac{l!}{i!j!} (\partial^i x^\alpha)(\partial^j \partial^\beta f(x)) \\ &= \sum_{i\leqslant l,\alpha} \frac{l!\alpha!}{i!(l-i)!(\alpha-i)!} x^{k+\alpha-i} \partial^{l-i+\beta} f(x). \end{aligned}$$

上式最后是 x 的有界函数.

(2) 速降函数 f 全体 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 称为 Schwartz 空间，其上有以下度量：

$$d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta} \|f - g\|_{\alpha,\beta} \wedge 2^{-|\alpha|-|\beta|},$$

其中 α, β 取遍非负整数组而 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

(2a) 据 §5.1 定理 1, 度量空间 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),d)$ 中 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ 当且仅当对任何非负整数组 α 与 β, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k - f\|_{\alpha,\beta} = 0$.

(2b) 度量空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是完备的. 为此任取它的基本序列 (f_k). 据 §5.1 定理 1, 这意味着当 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 时, $\lim\limits_{k,l\to\infty}\|f_k - f_l\|_{\alpha,\beta} = 0$. 换言之 $(x^\alpha\partial^\beta f_k(x))_{k=1}^\infty$ 是一致收敛下的基本序列. 设 $(\partial^\beta f_k)_{k=1}^\infty$ 一致收敛于函数 $g_\beta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$. 一致收敛保持连续性, 于是每个 g_β 都是连续的. 现在

$$
\begin{aligned}
(\partial^\beta f_k)(x)-(\partial^\beta f_k)(0) &= \int_0^1\sum_{i=1}^n(\partial_i\partial^\beta f_k)(tx)x_i dt\\
\Rightarrow g_\beta(x)-g_\beta(0) &= \int_0^1\sum_{i=1}^n g_{\beta+e_i}(tx)x_i dt\\
\Rightarrow dg_\beta(x) &= \sum_{i=1}^n g_{\beta+e_i}(x)dx_i.
\end{aligned}
$$

可见, 若命 $f=g_0$, 则 f 光滑且 $\partial^\beta f = g_\beta$. 于是 $(\partial^\beta f_k)_{k=1}^\infty$ 一致收敛于 $\partial^\beta f$. 因为 $(x^\alpha\partial^\beta f_k(x))_{k=1}^\infty$ 一致收敛, 其极限应是 $x^\alpha\partial^\beta f(x)$. 此即 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k - f\|_{\alpha,\beta}=0$, 从而据 §5.1 定理 1 知 $\lim\limits_{k\to\infty} d(f_k,f)=0$.

(3) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 是速降函数. 命 $If=f$ 及 $(Rf)(x)=f(-x)$, 称 I 和 R 为恒等变换与反射变换. 约定 $F_-f=\hat{f}$ 而 $F_+f=\tilde{f}$.

(3a) 当 g 是速降函数时, 卷积 $f*g$ 也是速降函数.

(3b) 有与 f 无关的常数 C_{np} 使 $\|f\|_p\leqslant C_{np}(\sum\|f\|_{\alpha,0}:|\alpha|\leqslant 2n)$.

(3c) 有列紧支撑的光滑函数 (f_k) 逼近 f: 当 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ 时,

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_{\alpha,\beta}=0.$$

(3d) 设 f 是速降函数, 则 Rf 和 $F_\pm f$ 都是速降函数.

(3e) $R:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是对合, $R^2=I$(即 $R^2f=f$).

(f) $F_\pm:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $F_-F_+=F_+F_-=I$.

(g) $RF_\pm=F_\pm R=F_\mp$, $F_\pm^2=R$ 且 $F_\pm^4=I$.

紧支撑的光滑函数是速降函数. 当 $a>0$ 时, $f_\gamma:x\mapsto x^\gamma\exp(-a|x|^2)$ 是速降函数. 为此注意到 $\|f_\gamma\|<+\infty$ 及 $x^\alpha\partial^\beta f_\gamma(x)$ 是 $f_{\alpha+\zeta}:\zeta\leqslant\gamma$ 的线性组合即可.

例 3 任取调和多项式 $P(x)=\sum\limits_{|\alpha|=k}c_\alpha x^\alpha$，命 $f(x)=\exp(-\pi|x|^2)P(x)$，则 f 是速降函数且 $\hat{f}(x)=\sqrt{-1}^{-k}f(x)$. 事实上,

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-\pi\sum_k(y_k+\sqrt{-1}x_k)^2)P(y)dy\\
=&\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\exp(-\pi\sum_{k=1}^{n-1}(y_k+\sqrt{-1}x_k)^2)dy_1\cdots dy_{n-1}\times\\
&\int\limits_{\mathbb{R}}\exp(-\pi(y_n+\sqrt{-1}x_n)^2)P(y',y_n)dy_n \ (\text{此据 Fubini 定理})\\
=&\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\exp(-\pi\sum_{k=1}^{n-1}(y_k+\sqrt{-1}x_k)^2)dy_1\cdots dy_{n-1}\times\\
&\int\limits_{\mathbb{R}}\exp(-\pi y_n^2)P(y',y_n-\sqrt{-1}x_n)dy_n \ (\text{此据 Cauchy 积分公式})\\
=&\cdots\cdots=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-\pi|y|^2)P(y-\sqrt{-1}x)dy \ (\text{多次用 Cauchy 积分公式})\\
=&\int\limits_0^\infty r^{n-1}dr\int\limits_S\exp(-\pi r^2)P(rt-\sqrt{-1}x)\sigma(dt) \ (\text{此据极坐标公式})\\
=&\int\limits_0^\infty\exp(-\pi r^2)r^{n-1}dr\int\limits_S\sigma(dt)P(-\sqrt{-1}x) \ (\text{此据平均值公式})\\
=&P(-\sqrt{-1}x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-\pi|y|^2)dy=(-\sqrt{-1})^kP(x) \ (\text{此由齐次性})
\end{aligned}
$$

将上式乘上 $\exp(-\pi|x|^2)$ 即可.

习 题

练习 1 证明: 紧度量空间 X 上的连续函数列 (f_n) 一致收敛 [于函数 f] 当且仅当 (f_n) 等度连续且逐点收敛 [于函数 f].

练习 2 设 $\mathcal{F}$ 是赋范空间 X 中某些有限维线性子空间按包含关系构成的定向集使 $\bigcup\mathcal{F}$ 在 X 中稠密, 证明 X 的有界集 A 是完全有界集当且仅当 $\varepsilon>0$ 时, 存在 $E\in\mathcal{F}$ 使任何 $x\in A$ 适合 $d(x,E)<\varepsilon$.

练习 3 以练习 2 的结论证明 Fréchet 定理.

练习 4 设 Y 是完备度量空间而 X 是紧度量空间, 以 $C(X,Y)$ 表示连续映射 $f:X\to Y$ 全体按度量 $d(f,g)=\max\limits_{x\in X}d(f(x),g(x))$ 所成的完备度量空间. 证明 $C(X,Y)$ 的子集 E 是列紧集当且仅当它满足以下条件:

(1) E 逐点列紧：当 $x \in X$ 时，$\{f(x) | f \in E\}$ 是 Y 中列紧集.

(2) E 等度连续：对于 $\varepsilon > 0$, 有 $\delta > 0$ 使 $x_1, x_2 \in X$ 且 $f \in E$ 时

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

练习 5 设 $U = \{f \in C[0,1] | \operatorname{re} f < 2\}$, 证明 U 是 $C[0,1]$ 中开集.

练习 6 有界连续函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 全体 $C_b(X)$ 按上确界范数是 Banach 空间. 当 X 是紧度量空间时，将 $C_b(X)$ 记为 $C(X)$, 它是可分的.

练习 7 使 $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ 的连续函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 全体 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 按上确界范数也成为 Banach 空间.

练习 8 设 Ω 是复平面上开集. 证明：在闭包 $\overline{\Omega}$ 上有界且连续在 Ω 内全纯的函数全体 $A(\Omega)$ 按上确界范数 $\|f\| = \sup\limits_{z \in \Omega} |f(z)|$ 成为一个 Banach 空间.

练习 9 设 X 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 可测集. 如果 $1 \leqslant p < +\infty$, 证明 Banach 空间 $L^p(X)$ 可分.

练习 10 设 I 是长度为 2π 的区间而 $1 \leqslant p < +\infty$, 证明三角多项式环在 $L^p(I)$ 中稠密.

练习 11 设 $1 \leqslant p < +\infty$ 且 $\mathbb{T}$ 上取弧长测度，证明三角多项式环稠于 $L^p(\mathbb{T})$.

练习 12 设 M 是复平面上非空开集. 将 M 上全纯函数全体记为 $\mathcal{O}(M)$ 而调和函数全体记为 $\mathcal{H}(M)$, 它们视为 $\mathbb{C}^M$ 的子空间. 证明：

(1) $\mathcal{O}(M)$ 与 $\mathcal{H}(M)$ 在内闭一致收敛下是完备的度量空间.

(2) 设 $f : M \to \mathbb{C}$ 是调和函数. 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时,

$$|f(z)| \leqslant (\pi d(z, \partial M)^2)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

(3) 设 f 同上，证明 $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in M\}$.

练习 13 设 M 是复平面上有界开集而 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, 使 $\|f\|_p < +\infty$ 的全纯函数 $f : M \to \mathbb{C}$ 全体 $A^p(M)$ 称为 *Bergman* 空间，证明它们是完备的.

练习 14 符号同练习 13, 证明 $A^p(M)$ 中有界集 E 是 $A(M)$ 中列紧集.

练习 15 设 $0<\alpha\leqslant 1$, 对于函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, 命

$$H_\alpha(f)=\sup_{x,y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

证明: (1) 使 $H_\alpha(f)$ 有限的函数 f 一致连续.

(2) 在范数 $\|f\|_{0,\alpha}=\|f\|+H_\alpha(f)$ 下,

$$C^{0,\alpha}[a,b]=\{f\in C[a,b]|H_\alpha(f)<+\infty\}$$

是 Banach 空间而 H_α 是 $C^{0,\alpha}[a,b]$ 上的连续半范数.

(3) $C^{0,\alpha}[a,b]$ 中有界集是 $C[a,b]$ 中列紧集.

(4) 设 $C^k[a,b]$ 是 k 阶连续可微函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 全体按范数 $\|f\|_k=\sum\limits_{i=0}^{k}\|f^{(i)}\|$ 所成的赋范空间, 则它是 Banach 空间.

(5) 设 $C^{k,\alpha}[a,b]=\{f\in C^k[a,b]|f^{(k)}\in C^{0,\alpha}[a,b]\}$ 按

$$\|f\|_{k,\alpha}=\|f\|_k+\|f^{(k)}\|_{0,\alpha}$$

所成的赋范空间, 则它是 Banach 空间.

练习 16 设 $1<p<+\infty$, 证明 $L^p(M,\mu)$ 的闭凸集 E 对任何 $f\in L^p$ 有唯一最佳逼近 $\psi(f)$. 进而 $\psi:L^p(M,\mu)\to E$ 是连续映射.

练习 17 设 $1<p<+\infty$. 如果 p 方可积函数列 $f,f_1,f_2,\cdots:X\to\mathbb{C}$ 使 $\lim f_n\doteq f$ 且 $\lim\|f_n\|_p=\|f\|_p$, 证明 $\lim\|f_n-f\|_p=0$.

练习 18 设 $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{C}$ 都是可导函数使 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|f_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{x}$. 如果有正实数 c 恒使 $\|f_n'\|_2\leqslant c$, 证明 (f_n) 一致有界且等度连续.

练习 19 连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 有个周期当且仅当有正常数 r 使对长度至少为 r 的区间 I 有 $\inf\limits_{t\in I}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-f(x+t)|=0$.

练习 20 将 $\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ 视为 $\overline{\mathbb{R}}$ 的子空间, 证明它是紧度量空间. 数列 $(x_n)_{n=0}^\infty$ 收敛当且仅当有连续函数 $f:\overline{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}$ 使 $n\geqslant 0$ 时, $f(n)=x_n$.

§5.6 不动点原理

对于映射 $A: X \to X$, 适合方程 $Ax = x$ 的 x 称为 A 的 不动点. 本节主要介绍两个原理 —Banach 的压缩映射原理和 Schauder 的不动点定理.

设 X 是度量空间, 若有 γ 使 $0 \leqslant \gamma < 1$ 使

$$d(Ax, Ax') \leqslant \gamma d(x, x')$$

恒成立, 则称 A 为压缩映射. 此时对任何正整数 n 成立

$$d(A^n x, A^n x') \leqslant \gamma^n d(x, x').$$

定理 1(Banach 压缩映射原理) 完备度量空间上压缩映射有唯一不动点.

求压缩映射的不动点可用逐次逼近法: 任意固定个 $x_0 \in X$. 归纳地命 $x_n = Ax_{n-1}$, 则所谓的 迭代序列(x_n) 收敛于 A 的唯一不动点 x^*, 而第 n 项 x_n 与不动点 x^* 的误差 $d(x_n, x) \leqslant \gamma^n d(x_0, x_1)/(1-\gamma)$.

例 1 对于 $[a,b]$ 上连续函数 f 和 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续函数 K, 考察积分方程

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) g(y) dt.$$

其中 λ 是常数. 以 λK 代替 K 后可设 $\lambda = 1$.

对任何 $g \in C[a,b]$, 以上方程右端确定的函数记为 Ag. 显然, g 是方程的解相当于 $Ag = g$, 即 g 是 A 的不动点. 现确立何时 A 是压缩算子. 算得

$$|Ag(x) - Ah(x)| \leqslant \int_a^b |K(x,y)| dy \|g-h\| = c\|g-h\|,$$

其中 $c = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} \int_a^b |K(x,y)| dy$. 当 $c < 1$ 时, $A: C[a,b] \to C[a,b]$ 是压缩算子. 此时, 以上积分方程有唯一解.

将解方程化为求不动点的方法是种有效实用方法. 下面考虑微分方程.

例 2 设 f 是定义在平面区域 D 上的连续函数. 考察初值是 $\varphi(x_0) = y_0$ 的一阶常微分方程 $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

求这个方程解的方法是先求局部解, 再将局部解黏成一个整体解. 无妨设 D 是矩形 $[x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times [y_0 - s, y_0 + s]$, 而函数 f 关于 y 满足 Lipschitz 条件 — 存在常数 $c \geqslant 0$ 恒使 $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant c|y_1 - y_2|$.

在上面的假设下，φ 适合上面的微分方程等价于它适合下面的积分方程

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt.$$

命 $b=\sup\limits_{z\in D}|f(z)|$ 而 $r=\min\{r_1,s/(b+1),1/(c+1)\}$，则 $cr<1$. 以 F 记连续函数 $\varphi: I=[x_0-r,x_0+r]\to[y_0-s,y_0+s]$ 全体，它继承 $C[x_0-r,x_0+r]$ 由上确界范数诱导的度量而成为完备度量空间.

对于 $\varphi\in F$, 将上而积分方程右端确定的函数记为 $A\varphi$, 则

$$|A\varphi(x)-y_0|=|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt|\leqslant rb\leqslant s.$$

这表明 $A\varphi$ 仍在 F 中. 由下式知 $d(A\varphi,A\psi)\leqslant crd(\varphi,\psi)$.

$$|\int_{x_0}^{x}(f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))dt|\leqslant c\int_{x_0}^{x}|\varphi(t)-\psi(t)|dt\leqslant cr\|\varphi-\psi\|.$$

据压缩映射原理，A 有唯一不动点 φ, 此 φ 为所求的局部解.

有些映射不是压缩映射，但仍可通过压缩映射的方法求出不动点.

例 3 对于常数 λ, 连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 与连续函数 $K:\Delta\to\mathbb{R}$(其中 $\Delta=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant x\}$), 考虑以下 Volterra 型积分方程

$$g(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{x} K(x,y)g(y)dy.$$

对于 $g\in C[a,b]$, 将上式右端确定的连续函数记成 Vg. 于是

$$|Vg(x)-Vh(x)|\leqslant|\lambda|c(x-a)\|g-h\|,$$

其中 c 是 $|K|$ 的最大值. 利用上式得

$$|V^2g(x)-V^2h(x)|=|\lambda\int_{a}^{x} K(x,y)(Vg(y)-Vh(y))dy|$$

$$\leqslant|\lambda|^2c^2\int_{a}^{x}(y-a)\|g-h\|dy=\frac{(|\lambda|c(x-a))^2}{2!}\|g-h\|.$$

归纳地得到 $\|V^ng-V^nh\|\leqslant|\lambda c(b-a)|^n\|g-h\|/n!$. 取足够大的 n 使 V^n 是压缩映射. 取 V^n 的唯一不动点 g, 则

$$V^n(Vg)=V(V^ng)=Vg.$$

从而 Vg 也是 V^n 的不动点. 于是 $Vg=g$. 如果 h 也是 V 的不动点，则它也是 V^n 的不动点. 因此 $g=h$. 从而 V 有唯一不动点 g, 它也是 Volterra 型积分方程的唯一解.

例 3 中方法可得以下一般性结论.

推论 2 设 X 是完备度量空间. 如果映射 $A: X \to X$ 的 n 次复合 A^n 是 X 上压缩映射, 则 A 有唯一不动点.

以下是与凸紧性有关的不动点原理.

定理 3(Schauder 不动点定理) 设 E 是局部凸空间 (如赋范空间)X 中的完备凸集. 如果连续映射 $f: E \to E$ 使 $f(E)$ 是相对紧集, 则 f 有不动点.

需要注意的是 Schauder 不动点定理只说明了不动点的存在性而没有提供不动点的算法. 下例是 Schauder 不动点定理对常微分方程的应用.

例 4(Peano 定理) 作平面子集 $S = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$. 设 $F: S \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 使 $f(x_0) = y_0$ 的方程 $f'(x) = F(x, f(x))$ 对某个 $s > 0$ 有个解 $f: [x_0 - s, x_0 + s] \to [y_0 - r, y_0 + r]$.

证明. 设 $0 < s < r$ 使 $s|F| \leqslant r$. 记 $X = [x_0 - s, x_0 + s]$, 而

$$E = \{f \in C(X, \mathbb{R}) | \forall x \in X : |f(x) - y_0| \leqslant r\}.$$

这是 $C(X, \mathbb{R})$ 中有界完备凸集. 当 $f \in E$ 时, 作 X 上连续函数

$$Af : x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t)) dt.$$

因为 $|Af(x) - y_0| \leqslant s\|F\| \leqslant r$, 所以 $A(E) \subseteq E$.

设 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时, $|F(t, y_1) - F(t, y_2)| < \varepsilon$. 于是当 $\|g - f\| < \delta$ 时, $\|Af - Ag\| < r\varepsilon$. 这样 A 是连续映射. 现在

$$|Af(x_1) - Af(x_2)| \leqslant \|F\| |x_2 - x_1|,$$

从而 $A(E)$ 是等度连续的有界集. 据 Arzelà-Ascoli 定理, $A(E)$ 是列紧集. 据 Schauder 不动点定理, A 有不动点 f, 它为初值问题的解.

下面介绍多值映射及其不动点原理. 设 f 是 $X \times Y$ 是子集使 $x \in X$ 时截口 $f(x) = \{y | (x, y) \in f\}$ 不空, 称 f 为一多值映射. 当 f 是 $X \times Y$ 的闭集时, 称 f 为闭映射. 它使 $f(x)$ 都是 Y 中闭集. 这是因为开集的截口是开集而闭集的截口是闭集. 当 $Y = X$ 且 $x_0 \in f(x_0)$ 时, 称 x_0 称为 f 的**不动点**.

定理 4(Kakutani 不动点定理) 设 E 是赋范空间中凸紧集而 f 是 E 至 E 的多值闭映射使 $x \in E$ 时 $f(x)$ 是凸集, 则有 $x_0 \in E$ 使 $x_0 \in f(x_0)$.

习题

练习 1 设 X 是紧度量空间. 如果连续映射 $f: X \to X$ 无不动点, 证明存在 $c > 0$ 使 $x \in X$ 时, $d(x, f(x)) \geqslant c$.

练习 2 设函数 $F: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 与其关于 y 的偏导数 F_y 连续且有正实数 m, M 使 $m \leqslant F_y \leqslant M$, 证明有连续函数 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 满足隐函数方程 $F(x, f(x)) = 0$.

练习 3 证明: 压缩映射 $A: X \to X$ 是一致连续.

练习 4 设 T 是由正数组成的 n 阶方阵. 证明: 存在 $t > 0$ 及各分量都非负的非零向量 x 适合方程 $Tx = tx$.

练习 5 作 $\mathbb{R}^3$ 中紧集 $\Omega = [a,b] \times [a,b] \times [-r,r]$. 设 $F: \Omega \to \mathbb{R}$ 是连续函数且 $|F| \leqslant r/(b-a)$, 证明有连续函数 $f: [a,b] \to [-r,r]$ 使

$$f(x) = \int_a^b F(x, y, f(y))dy : a \leqslant x \leqslant b.$$

练习 6 证明当 $c > \pi$ 而 $b \in l^2$ 时, 以下无限线性方程组有唯一解 $x \in l^2$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{c(i+j)} + b_i : i = 1, 2, \cdots$$

练习 7 设 E 和 F 是度量空间 (X,d) 的非空子集, 命

$$d(E,F) = \sup\{d(x,F), d(y,E) | x \in E, y \in F\}.$$

证明: (1) $0 \leqslant d(E,F) = d(F,E) \leqslant +\infty$.

(2) $d(E,G) \leqslant d(E,F) + d(F,G)$.

(3) $d(E,F) = 0$ 当且仅当 $\overline{E} = \overline{F}$(闭包相等).

(4) $d(\bigcup_{i \in J} E_i, \bigcup_{i \in J} F_i) \leqslant \sup_{i \in J} d(E_i, F_i)$.

练习 8 在度量空间 (X,d) 的非空紧集全体 cpt 上取度量 d 使

$$d(E,F) = \max\{d(x,F), d(y,E) | x \in E, y \in F\}.$$

证明: (1) $x \mapsto \{x\}$ 是 X 至 $\operatorname{cpt} X$ 的等距嵌入.

(2) $f: X \to X$ 是压缩映射当且仅当 $f_*: \operatorname{cpt} X \to \operatorname{cpt} X$ 是压缩映射, 其中 $E \in \operatorname{cpt} X$ 时 $f_*(E) = \{f(x) | x \in E\}$.

(3) X 完备当且仅当 $\operatorname{cpt} X$ 完备. 此时若 $f_i: X \to X$ 是压缩映射, 则有唯一非空紧集 A 使 $\bigcup_{i=1}^{n} f_i(A) = A$.

练习 9 设 f 是空间 X 至紧空间 Y 的多值闭映射，证明 f 上半连续：当 V 是 Y 的开集时，$\{x \in X | f(x) \subseteq V\}$ 为 X 的开集.

练习 10 设 (X,d) 是度量空间而 $f: X \to 2^X$ 是上半连续的多值映射，证明 $x \mapsto d(x, f(x))$ 是下半连续函数.

练习 11 设 S 是度量空间 (X,d) 中子集，作 S 的非紧性测度

$$\alpha(S) = \inf\{r | S\text{可被有限个直径不过 } r \text{ 的子集覆盖}\}.$$

证明：(1) S 完全有界当且仅当 $\alpha(S) = 0$.

(2) $S \subseteq S_1$ 时，$\alpha(S) \leqslant \alpha(S_1)$.

(3) $\alpha(S_1 \cup S_2) = \max\{\alpha(S_1), \alpha(S_2)\}$.

(4) $\alpha(\overline{S}) = \alpha(S)$.

练习 12 如果 (S_n) 是完备度量空间 (X,d) 中的闭集套使 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(S_n) = 0$, 证明 (S_n) 的交集为紧集.

练习 13 设 E 是 Banach 空间中有界凸闭集而 $f: E \to E$ 是连续映射. 设 $0 \leqslant c < 1$ 使 S 为 E 的子集时 $\alpha(f(S)) \leqslant c\alpha(S)$, 证明 f 有不动点.

练习 14 证明：(1) $E = \{f \in C[a,b] | \int\limits_a^b f(x)dx = 0\}$ 不在 $C[a,b]$ 中稠密.

(2) $E = \{f \in C[a,b] | f(a)^2 = f(b)\}$ 是 $C[a,b]$ 的闭集.

(3) $E = \{f \in C[a,b] | \operatorname{re} f(a) > 0\}$ 是 $C[a,b]$ 的凸开集并求其闭包.

(4) $E = \{f \in C[a,b] | f(b) = 1\}$ 是 $C[a,b]$ 中凸闭集.

(5) $p: f \mapsto |f(a)|$ 是 $C[a,b]$ 上半范数，但不是范数.

(6) 设实数 c 使 $|c|(b-a) < 1$. 对于 $f_0 \in C[a,b]$, 归纳地定义

$$f_n(x) = c\int\limits_a^b \sin f_{n-1}(t)dt + 1, n = 1, 2, \cdots,$$

则 (f_n) 一致收敛，其极限是以下方程的解

$$f(x) = c\int\limits_a^b \sin f(x)dx + 1, f \in C[a,b].$$

(7) 设实数 c 使 $|c| < 1$. 对于 $t_0 \in \mathbb{R}$, 归纳地定义

$$t_n = c\sin t_{n-1} + 1, n = 1, 2, \cdots,$$

则 (t_n) 收敛，其极限是方程 $t = c\sin t + 1$ 的唯一解.

(8) 设 $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 设常数 c 使 $0\leqslant K\leqslant c$ 且 $c(b-a)<1$. 命 $f_0=0$ 而 $g_0=2$. 归纳地命

$$f_n(x)=\int_a^b K(x,y)f_{n-1}(y)dy+1,$$

$$g_n(x)=\int_a^b K(x,y)g_{n-1}(y)dy+1,$$

则 (f_n) 是连续函数的递增序列而 (g_n) 是连续函数的递减序列, 它们一致收敛, 其极限是以下方程的唯一解:

$$h(x)=\int_a^b K(x,y)h(y)+1,h\in C[a,b].$$

(9) 给定实数 c 与 $f\in C[a,b]$ 使 $|c(b-a)|<1$, 则有 $g\in C[a,b]$ 使

$$g(x)=c\int_a^b \sin g(y)dy+f(x).$$

(10) 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是连续函数, 则以下方程组有解:

$$x=10^{27}+\sin f(x,y),y=\cos f(x,y).$$

练习 15 设函数 $G:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使 $G(t,x_1,\cdots,x_n)$ 关于每个分量 x_i 连续且关于分量 t 可测. 如果 $f_i:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是可测函数, 证明 $g(t)=G(t,f_1(t),\cdots,f_n(t))$ 也是 t 的可测函数.

练习 16 设 S 是度量空间 X 的紧集. 将 S 对任何 $x\in X$ 的最佳逼近全体记为 $f(x)$, 证明 X 至 S 的多值映射 f 是上半连续的.

练习 17 设 E 是凸紧集而 $f:X\times E\to E$ 是连续映射. 对于每个 $x\in X$, 映射 $y\mapsto f(x,y)$ 的不点全体记为 $g(x)$, 证明 g 是上半连续的多值映射.

练习 18(Kakutani) 设 E 是凸紧集而 $\{f_i:E\to E|i\in J\}$ 是一簇相互交换 — 恒使 $f_if_j=f_jf_i$ 的连续 仿射变换— 保持凸组合的映射, 证明 $f_i:i\in J$ 有公共不动点.

练习 19 设 $a\leqslant t_0\leqslant b$ 而函数 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可积的. 设函数 $G:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使 $G(t,\cdot)$ 总连续而 $G(\cdot,x)$ 总可测. 如果总有 $|G(t,x)|\leqslant g(t)$, 证明有可测函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 使

$$f(t)=x_0+\int_{t_0}^t G(s,f(s))ds:a\leqslant t\leqslant b.$$

练习 20 设度量空间 X 是 σ- 紧的 — 它有紧集列 (X_n) 使 $\bigcup_n X_n = X$. 证明: $r > 0$ 时, X 为可数个直径不过 r 的 σ- 紧集的无交并.

练习 21 设 Y 是度量空间而 X 是 σ- 紧的度量空间. 设 $f : X \to Y$ 是连续映射而 $y \in Y$, 以 $\gamma(y)$ 表示方程 $f(x) = y$ 解的个数, 它可能的值为 $0, 1, 2, \cdots, +\infty$. 试证明 $\gamma : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ 是 Borel 函数. 这称为 f 的指示函数.

练习 22 设 X 和 Y 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, $f : X \to Y$ 是连续可微映射, γ 是其指示函数. 对于非负 Borel 函数 $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ 证明

$$\int_Y \gamma(y) g(y) dy = \int_X g f(x) |\det(Jf)(x)| dx.$$

练习 23 设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续的有界变差函数而 $\gamma : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ 是其 Banach 指示函数, 对于 $\mathbb{R}$ 上 Borel 函数 g, 证明下式有意义时成立

$$\int_{\mathbb{R}} g(y) \gamma(y) dy = \int_a^b g(f(x)) |df(x)|.$$

练习 24 设 Y 是紧空间而 $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ 是连续函数. 命

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y); \psi(x) = \min_{y \in Y} f(x, y).$$

证明 φ 和 ψ 是 X 上的连续函数.

第 6 章

赋范空间上的算子与几何

本章讨论线性泛函分析的基本对象 — 线性算子. 由于具有线性, 线性算子的连续性可用一个数值 — 算子范数刻画. 像幂级数能表达一些光滑函数一样, 线性与多重线性算子在讨论非线性算子的性质方面起着重要作用.

§6.1 有界线性算子

线性空间之间的映射 $T : X \to Y$ 是 *线性算子* 是指它保持线性运算

$$T(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1Tx_1 + a_2Tx_2.$$

如微分算子 $D : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ 是线性算子, 其中 $Df = f'$(导函数) 而 $C^n(\mathbb{R})$ 表示实直线上 n 阶连续可微函数全体.

算子范数 规定赋范空间之间线性算子 $T : X \to Y$ 的算子范数为

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\}.$$

(1) 当 $x \in X$ 时, $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$. 进而,

$$\|T\| = \min\{c \in [0, +\infty] | \forall x \in X : \|Tx\| \leqslant c\|x\|\}.$$

(2) 当 X 非平凡时, $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup\limits_{x\neq 0} \|Tx\|/\|x\|$.

(3) 非负分离性: $0 \leqslant \|T\| \leqslant +\infty$. 而 $\|T\| = 0$ 当且仅当 $T = 0$.

(4) 齐次性: $\|aT\| = |a|\|T\|$, 其中 a 是数.

(5) 次可加性: $\|T_1 + T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|$.

(6) 次可乘性: $\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|$, 其中 ST 中是复合算子.

恒等算子 $I : X \to X$ 是同构, 在 X 非平凡时 $\|I\| = 1$.

定理 1(F. Riesz) 对于赋范空间之间的线性算子 T, 以下条件等价:

(1) $T : X \to Y$ 在某点 x_0 连续.

(2) $T : X \to Y$ 一致连续.

(3) T 将 X 的有界集映为 Y 的有界集.

(4) T 的算子范数 $\|T\|$ 有限, 即 $T(X)_1$ 是有界集.

据此定理将连续线性算子也称为有界线性算子.

例 1 使 $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = 0$ 的连续函数 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 全体 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 按范数 $\|g\| = \max\{|g(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$ 成为 Banach 空间. 据 Riemann-Lebesgue 引理, 任何 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 和 Fourier 逆变换 $\tilde{f}$ 都在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中. 因此以 $F_- f$ 记 $\hat{f}$ 且以 $F_+ f$ 记 $\tilde{f}$ 后就得两个线性算子 $F_\pm : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$. 这可统一定义为

$$F_\pm f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(\pm 2\pi\sqrt{-1}x \cdot y) f(y) dy.$$

现来求 $F_\pm$ 的算子范数. 因为 $|F_\pm f| \leqslant \|f\|_1$, 从而 $\|F_\pm\| \leqslant 1$. 命

$$f(x) = \frac{1}{\pi^n(1+x_1^2)\cdots(1+x_n^2)},$$

这得 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 使 $\|f\|_1 = 1$ 且

$$(F_\pm f)(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\pi^n(1+x_1^2)\cdots(1+x_n^2)} = 1.$$

于是 $\|F_\pm f\| \geqslant 1$. 因此 $\|F_\pm\| = 1$. 将 F_- 称为 L^1-Fourier 变换.

线性算子 $S, T : X \to Y$ 的线性组合 $aS + bT : x \mapsto aSx + bTx$ 是线性算子, 从而 X 到 Y 的线性算子全体是线性空间, 其零元是零算子 $0 : X \to Y$ (恒取 0 值). 注意, 0 可代表数和算子、向量和平凡空间, 这取决于其环境.

定理 2 赋范空间 X 到赋范 [Banach] 空间 Y 的有界线性算子全体 $\mathbf{B}(X, Y)$ 按算子范数成为赋范 [Banach] 空间.

线性算子 $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ 可由一个矩阵 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 表示: $(Ax)_i = \sum\limits_j a_{ij}x_j$. 矩阵 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 就记为 A, 则两个线性算子 $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ 与 $B : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l$ 的复合算子 BA 对应的矩阵是 BA. 恒等算子 $I : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ 对应的矩阵自然是 n 阶单位阵 I_n. 如果 A 可逆, 则逆算子 A^{-1} 对应的矩阵就是逆阵 A^{-1}.

定理 3 有限维赋范空间之间的线性算子总是有界的.

以后若无特别声明，线性算子的范数总指其算子范数.

例 2 将 $C^1[0,1]$ 视为 $C[0,1]$ 的子空间. 命 $Df = f'$, 这样得到的微分算子 $D: C^1[a,b] \to C[a,b]$ 是无界的. 为此命 $f_t(x) = \exp(-tx)$. 于是 $\|f_t\| = 1$ 但 $\|f_t'\| = t$. 这样 D 将有界集 $\{f_t | t \geqslant 1\}$ 映至无界集.

设 L 是 X 的线性子空间，它确定了 X 上一个等价关系： $x \sim y$ 表示 $x - y \in L$. 而 $x \in X$ 所在的等价类 $[x] = x \pm L$, 称为一个 *线性流形*. 如 $[0] = L$. 记 $X/L = \{[x] | x \in X\}$. 以下运算使 X/L 成为线性空间 (称为 *商空间*) 而 *自然投影* $\pi : X \to X/L, x \mapsto [x]$ 是线性算子.

数乘： $a[x] = [ax]$. 此即 $a\pi(x) = \pi(ax)$.

加法： $[x] + [y] = [x + y]$. 此即 $\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y)$.

(1) $[0]$ 是 X/L 的零元而 $[-x]$ 是 $[x]$ 的负元.

(2) $[x]$ 是零向量当且仅当 $x \in L$. 此时就集合而言， $[x] = L$.

(3) $X/\{0\}$(在同构的意义下) 就是 X; 而 X/X 是平凡线性空间.

定理 4 设 L 是赋范空间 X 的闭线性子空间.

(1) 商空间 X/L 按范数 $\|[x]\| = d(x, L)$ 成为赋范空间.

(2) 自然投影 $\pi : X \to X/L$ 是有界线性算子.

(3) $\pi(X)_r = (X/L)_r$ 且 π 是开映射.

(4) 如果 X 是 Banach 空间，则商空间 X/L 也是 Banach 空间.

线性算子 $A : X \to Y$ 的核空间 $\ker A$ 规定为以下线性子空间

$$\{x \in X | Ax = 0\} = A^{-1}\{0\}.$$

作 Y 的线性子空间 $\operatorname{ran} A = \{Ax | x \in X\}$. 这称为 A 的值域. 作商空间 $\operatorname{cok} A = Y / \operatorname{ran} A$. 这称为 A 的余核空间.

(1) A 是单射当且仅当 $\ker A$ 是平凡的.

(2) A 是满射当且仅当 $\operatorname{ran} A = Y$ 当且仅当 $\operatorname{cok} A$ 是平凡的.

诱导线性算子 设 X_0 与 Y_0 分别是赋范空间 X 与 Y 的闭线性子空间. 设线性算子 $A : X \to Y$ 使 $A(X_0) \subseteq Y_0$, 则 A 诱导了唯一线性算子 $A_0 : X/X_0 \to Y/Y_0$ 使 $A_0\pi = \tau A$, 其中 $\pi : X \to X_0$ 与 $\tau : Y \to Y_0$ 是自然射影.

(1) 当 A 有界时， A_0 也有界.

(2) 在 $X_0 = \ker A$ 且 Y_0 平凡时， $A_0 : X/\ker A \to Y$ 是单射且 $\|A\| = \|A_0\|$. 此时 A 有界当且仅当 A_0 有界.

为讨论逆算子的有界性，引进一个与有界性相对的概念.

下有界算子 赋范空间之间的线性算子 $T : X \to Y$ *下有界* 是指存在 $c > 0$ 使 $x \in X$ 时, $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$. 这即 T 是单射且逆算子 $T^{-1} : T(X) \to X$ 有界 (这里的逆算子只定义在 Y 的子空间 $\operatorname{ran} T$ 上).

(1) 有界且下有界的线性算子 $T : X \to Y$ 将 X 中完备集映为完备集 (因而是闭集) 且限制 $(T : X \to T(X))$ 是拓扑同构.

(2) 称可逆线性算子 $T : X \to Y$ 为拓扑同构是指 T 和 T^{-1} 都连续 (这即 T 是下有界的有界线性满射). 此时也称 X 和 Y 拓扑同构.

(3) 称可逆线性算子 $T : X \to Y$ 为等距同构是指 $\|Tx\| = \|x\|$ 恒对. 这即 $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$. 此时也称 X 和 Y 等距同构.

例 3 设线性算子 $T : l^0 \to l^0$ 使 $(Tx)_n = nx_n$. 将 l_0 视为 l^2 的子空间, 则 T 下有界: $\|Tx\|_2 \geqslant \|x\|_2$, 但它无界. 为此以 e_n 记第 n 项为 1 其它项为零的数列, 则 $\|Te_n\|_2 = \|ne_n\|_2 = n$.

例 4 幂等阵的推广是 *幂等算子*— 使 $P^2 = P$ 的线性算子 $P : X \to X$, 其中 $P^2 = PP$. 幂等算子 P 有以下性质:

(1) $\operatorname{ran} P = \ker(I - P)$. 为此记 $Q = I - P$, 对于 $x \in X$ 而言

$$(\exists y \in X : x = Py) \Rightarrow (Qx = Py - P^2y = 0) \Rightarrow (x = Px).$$

(2) $I - P$ 也是幂等算子. 这是因为

$$Q^2 = I - 2P + P^2 = I - P.$$

(3) $\ker P = \operatorname{ran}(I - P)$. 以 Q 代替 (2) 中 P 即可.

(4) $\|P\| = 0$ 或 $\|P\| \geqslant 1$. 这源自不等式 $\|P\| \leqslant \|P\|^2$.

设线性算子 $B : Y \to X$ 与线性算子 $A : X \to Y$ 互为 *广义逆*: 即 $ABA = A$ 且 $BAB = B$, 则 AB 和 BA 是幂等算子. 如果 B 是 A 的逆算子, 则 B 自然是 A 的广义逆.

当 P_1 和 P_2 是幂等算子且 $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ 时, 称 P_1 和 P_2 直交.

习题

练习 1 在 $\mathbb{C}^n$ 上定义范数 $\|z\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |z_i|$. 求由矩阵 $[a_{ij}]_{n\times n}$ 定义的线性算子 $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, z \mapsto [a_{ij}]_{n\times n}z$ 的范数.

练习 2 设 $1 < p < +\infty$ 而 $x_0 = 0$. 求线性算子 $S_\pm : l^p \to l^p$ 的范数, 其中

$$S_\pm(x_1, x_2, \cdots) = (x_{1\pm1}, x_{2\pm1}, \cdots).$$

练习 3 求线性算子 $T: L^1[0,1] \to C[0,1]$ 的范数，其中

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt, f \in L^1[0,1].$$

练习 4 将练习 3 中的 T 视为 $L^1[0,1]$ 到 $L^1[0,1]$ 的线性算子，求其范数.

练习 5 证明：[赋范] 线性空间 X 的非空子集 L 是 [闭] 线性子空间当且仅当它是某个 [有界] 线性算子 $T: X \to Y$ 的核空间.

练习 6 设 $1 < p < +\infty$. 求线性算子 $T_p: l^p \to l^p$ 的范数，其中

$$T_p(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_1, x_2/2, \cdots, x_n/n, \cdots).$$

练习 7 求线性算子 $M: A^2(\mathbb{D}) \to A^2(\mathbb{D})$(使 $(Mf)(z) = z^n f(z)$) 的范数.

练习 8 求线性算子 $B: C[0,1] \to C[0,1]$ 的范数，其中

$$(Bf)(x) = \int_0^x \frac{f(s)}{x} ds.$$

练习 9 将多项式环 $\mathbb{C}[z]$ 视为 Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 的子空间. 命 $Af = f'$, 证明微分算子 $A: \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}[z]$ 既非有界也非下有界.

练习 10(Banach-Mazur, 1933) 设 X 是可分 Banach 空间，则有满的有界线性算子 $T: l^1 \to X$.

练习 11 证明：(1) $A: X \to Y$ 是拓扑同构时，$A^{-1}: Y \to X$ 是拓扑同构.

(2) $A: X \to Y$ 和 $B: Y \to Z$ 是拓扑同构时，BA 是拓扑同构.

(3) $A_i: X_i \to Y_i$ 是拓扑同构时，$\prod_{i=1}^n A_i: \prod_{i=1}^n X_i \times \prod_{i=1}^n Y_i$ 是拓扑同构.

练习 12 设 X 和 Y 是赋范空间使 $Y \times Y$ 与 Y 拓扑同构，证明 $X \times Y^n$ 与 $X \times Y$ 拓扑同构.

练习 13 当 n 是正整数时，命 $L_n = \{x \in \mathbf{c}_0 | x_i = 0, i \leqslant n\}$. 证明：

(1) $\mathbf{c}_0$ 的闭线性子空间 $L_1, L_2, \cdots$ 相互等距同构.

(2) $\mathbf{c}_0$ 的商空间 $\mathbf{c}_0/L_1, \mathbf{c}_0/L_2, \cdots$ 相互不拓扑同构.

练习 14 设 (M, μ) 是全有限测度空间. 如果 $1 \leqslant p < p' \leqslant +\infty$, 命 $\eta(f) = f$, 证明包含映射 $\eta: L^{p'}(M, \mu) \to L^p(M, \mu)$ 是有界线性算子.

练习 15 设 $1 \leqslant p < +\infty$, 证明 $l^p \times l^p$ 取范数

$$\|(x,y)\| = (\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$$

后与 l^p 等距同构.

练习 16 设 X 是 $\mathbf{c}_0$ 或 $l^p : 1 \leqslant p \leqslant \infty$, 证明 $\mathbb{C}^n \times X$ 与 X 拓扑同构.

练习 17 设 $A : X \to Y$ 是赋范空间之间线性算子使 $\operatorname{ran} A$ 是有限维的. 如果 $\ker A$ 是闭的, 证明 A 有界.

练习 18 当 $t > 0$ 时, 构造个幂等算子 P 使 $\|P\| \geqslant t$.

练习 19 设 X 和 Y 是赋范空间 Z 的闭线性子空间. 如果 X 是有限维的, 证明 $X + Y$ 是闭线性子空间.

练习 20 设 $p : Y \to \mathbb{R}$ 是次线性泛函或半范数而 $T : X \to Y$ 是线性算子, 证明复合 pT 是 X 上的次线性泛函或半范数.

练习 21 证明几乎处处相等是测度空间 (M,μ) 上复值可测函数全体 $\mathcal{L}(M,\mu)$ 这个线性空间上一个等价关系. 将每个可测函数 $f : M \to \mathbb{C}$ 所在的等价类记为 $[f]$. 如 $[0]$ 就是几乎处处为零的可测函数全体.

(1) 设 $1 \leqslant p < +\infty$, 命 $\mathcal{L}^p(M,\mu)$ 是 p 方可积函数 $f : M \to \mathbb{C}$ 全体所成的线性空间. 证明 $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(M,\mu) \to \mathbb{R}$ 是个半范数且 $\ker \|\cdot\|_p = [0]$.

(2) 商空间 $\mathcal{L}^p(M,\mu)/[0]$ 就是 $L^p(M,\mu)$.

练习 22 设 X 是线性空间, 其上幂等算子全体记为 $\mathbf{E}$. 证明

(1) $\leqslant$ 是 $\mathbf{E}$ 上一个偏序: $P \leqslant Q$ 表示 $P = PQ = QP$.

(2) 设 P 和 Q 是交换的幂等算子: $PQ = QP$, 则 $PQ = \inf\{P,Q\}$ 且

$$P + Q - PQ = \sup\{P,Q\}.$$

§6.2 连续线性泛函

取值于数域的线性算子也称为 *线性泛函*, 其连续性由其核空间完全决定.

定理 1 设 f 是赋范空间 X 上的线性泛函, 则

(1) f 连续当且仅当 $\ker f$ 为闭集. 此时恒有 $\|f\| d(x, \ker f) = |f(x)|$.

(2) f 不连续当且仅当其核空间 $\ker f$ 是异于 X 的稠密集.

将赋范空间 X 上连续线性泛函全体 $\mathbf{B}(X,\mathbb{K})$ 简记为 X^*, 这称为 X 的 *共轭空间*, 它按线性泛函的算子范数成为 Banach 空间.

例 1 因为任何 $x \in \mathbb{K}^n$ 有唯一线性组合 $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$(其中 e_i 是第 i 项为 1 其他项为 0 的 n 维向量), 所以对于线性泛函 $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ 有

$$f(x) = a_1f(e_1) + \cdots + a_nf(e_n).$$

可见 f 由其在诸 e_i 上的值完全决定. 通过双射 $f \mapsto (f(e_1), \cdots, f(e_n))$, 共轭空间 $(\mathbb{K}^n)^*$ 与 $\mathbb{K}^n$ 同一了起来.

共轭空间 X^* 的共轭空间 X^{**} 称为 X 的 *二次共轭空间*. 同样有 *三次共轭空间*X^{***}. 这得一串 Banach 空间 $X^*, X^{**}, X^{***}, \cdots$. 共轭空间是较为抽象的空间. 泛函分析经常将相对抽象的对象具体化. 如例 1 将 $(\mathbb{K}^n)^*$ 与 $\mathbb{K}^n$ 对等起来. 下面一些共轭空间通过等距同构与具体 Banach 空间等同起来.

线性泛函表示的 Riesz 理论 下面逐一介绍常用 Banach 空间上线性泛函的表示. 以下结论都称为 Riesz 表示定理.

(1) 设 $1 \leqslant p < +\infty$ 而 q 是 p 的共轭数, 则 φ 是 $L^p(M, \mu)$ 上连续线性泛函当且仅当有唯一 $g \in L^q(M, \mu)$ 使 $f \in L^p(M, \mu)$ 时,

$$\varphi(f) = \int_M f(t)g(t)\mu(dt).$$

此时, $\|\varphi\| = \|g\|_q$. 因此 $(L^p(M, \mu))^*$ 与 $L^q(M, \mu)$ 等距同构.

因此在等距同构的意义下, 可简写 $(L^p)^* = L^q$.

(2) 设 $1 \leqslant p < +\infty$ 而 q 是 p 的共轭数, 则 f 是 l^p 上连续线性泛函当且仅当有唯一 $y \in l^q$ 使 $x \in l^p$ 时, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_ny_n$. 此时, $\|f\| = \|y\|_q$(即 $f \mapsto y$ 是 $(l^p)^*$ 与 l^q 的等距同构).

(3) φ 是 $C[a, b]$ 上连续线性泛函当且仅当有唯一 $g \in V_0[a, b]$ 使

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t)dg(t) : f \in C[a, b].$$

此时 $\|\varphi\| = \bigvee_a^b g$. 因此 $(C[a, b])^*$ 与 $V_0[a, b]$ 等距同构.

(4) 设 M 是紧 Hausdorff 空间 (如紧度量空间), 则 φ 是 $C(M)$ 上连续线性泛函当且仅当 M 上有唯一复值 Baire 测度 μ(定义在 G_δ- 型紧集全体生成的 σ- 环上) 使

$$\varphi(f) = \int_M f(t)\mu(dt) : f \in C(M).$$

此时 $\|\varphi\| = \|\mu\|$.

(5) 周期 2π 的连续函数空间 $C_{2\pi}$ 上线性泛函 φ 是连续的当且仅当有唯一 $g \in V_0(0,2\pi]$ 使 $f \in C_{2\pi}$ 时,

$$\varphi(f) = \int\limits_{(0,2\pi]} f(t)dg(t).$$

此时 $\|\varphi\| = \bigvee\limits_0^{2\pi} g$. 因此 $V_0(0,2\pi]$ 与 $C_{2\pi}^*$ 等距同构.

(6) f 是 $\mathbf{c}_0$ 上连续线性泛函当且仅当有唯一 $y \in l^1$ 使 $x \in \mathbf{c}_0$ 时, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. 此时 $f \mapsto y$ 是 $(\mathbf{c}_0)^*$ 与 l^1 的等距同构.

(7) f 是 $\mathbf{c}$ 上连续线性泛函当且仅当有唯一 $y \in l^1(\mathbb{N})$ 使

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, x \in \mathbf{c}.$$

此时 $f \mapsto y$ 是 $\mathbf{c}^*$ 与 $l^1(\mathbb{N})$ 的等距同构.

(8) Hilbert 空间 H 上线性泛函 f 是连续的当且仅当有唯一 $y \in H$ 使 $x \in H$ 时, $f(x) = \langle x, y\rangle$. 此时, $\|f\| = \|y\|$.

本质上, (1) 和 (2) 与 (8) 可归为一个表示定理; (3)~(7) 可归为一个表示定理. 以上 (3) 或 (5) 中的 g 绝对连续时, $\|\varphi\| = \|g'\|_1$.

注记 可将 Hilbert 空间 (概念见于 §7.1) 与其共轭空间在等距同构 $\eta : H \to H^*$ 的意义下等同起来, 其中 $\eta(y) = f_y$. 这表明 Hilbert 空间是自对偶的. 当 H 是实空间时, η 是线性算子; 当 H 是复空间时, η 是共轭线性算子.

在实际应用中, 线性泛函 $f : X \to \mathbb{K}$ 在 x 处的值 $f(x)$ 常写成 $\langle x, f\rangle$, 这称为 共轭配对. 如 $1/p+1/q=1$ 时, l^p 与 l^q 有共轭配对 $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$; 而 $L^p(M,\mu)$ 与 $L^q(M,\mu)$ 有共轭配对 $\langle f, g\rangle = \int\limits_M fg d\mu$. 最后 $C[a,b]$ 与 $V_0[a,b]$ 的共轭配对是 $\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f dg$.

例 2 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是紧度量空间 M 中互异点子, 命

$$\varphi(f) = b_1 f(x_1) + \cdots + b_n f(x_n), f \in C(M),$$

其中 $b_1, \cdots, b_n$ 是复常数. 这得线性泛函 $\varphi : C(M) \to \mathbb{C}$, 则 $\|\varphi\| = \sum |b_i|$. 为此用 §5.3 例 5 的方法构造连续函数 $f : M \to \mathbb{C}$ 使 $f(x_i) = |b_i|/b_i$ 且 $|f| \leqslant 1$. 这样 $\varphi(f) = \sum |b_i|$, 从而 $\|\varphi\| \geqslant \sum |b_i|$. 易得 $\|\varphi\| \leqslant \sum |b_i|$.

上例与下例的方法类似于求跳跃函数的全变差的方法.

例 3 设 (x_n) 是紧度量空间 M 中互异点列而 $b \in l^1$, 命

$$\varphi(f) = \sum b_n f(x_n), f \in C(M).$$

显然 $\|\varphi\| \leqslant \|b\|_1$. 命 $\varphi_n(f) = \sum\limits_{i \leqslant n} b_i f(x_i)$. 对 $\varphi - \varphi_n$ 应用 φ 的结论可知 $\|\varphi_n - \varphi\| \leqslant \sum\limits_{i>n} |b_i|$. 这样 $(\|\varphi_n\|)$ 收敛于 $\|\varphi\|$. 据例 2 可知,

$$\|\varphi\| = \lim \|\varphi_n\| = \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| = \|b\|_1.$$

为得到一般赋范空间上足够多的连续线性泛函需要保范延拓这个工具.

线性延拓 设 X_0 是赋范空间 X 的线性子空间而 Y_0 是赋范空间 Y 的线性子空间. 设线性算子 $T : X \to Y$ 是线性算子 $T_0 : X_0 \to Y_0$ 的延拓.

(1) 线性延拓后范数不减: $\|T_0\| \leqslant \|T\|$.

(2) 若 $\|T\| = \|T_0\|$, 则称 T 是 T_0 的 *保范延拓*.

(3) 设 Y 是 Banach 空间而 X_0 是赋范空间 X 的稠密线性子空间, 则任何有界线性算子 $T_0 : X_0 \to Y$ 有唯一保范延拓 $T : X \to Y$. 换言之, 映射 $T \to T|_{X_0}$ 是 $\mathbf{B}(X, Y)$ 到 $\mathbf{B}(X_0, Y)$ 的等距同构.

对于 $x \in X$, 命 $\hat{x}(f) = f(x)$. 这得到个 *赋值泛函*$\hat{x} : X^* \to \mathbb{K}$. 因为 $|\hat{x}(f)| \leqslant \|x\|\|f\|$, 所以 $\|\hat{x}\| \leqslant \|x\|$. 要知等号成立需要用到以下定理.

定理 2(Hahn-Banach 定理) 设 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上赋范空间 X 的线性子空间, 则任何连续线性泛函 $g : Y \to \mathbb{K}$ 都有保范延拓 $f : X \to \mathbb{K}$.

设 E 是 X 的非空子集, 作其 *零化子*$E^\perp = \{f \in X^* | f(x) = 0, x \in E\}$. 这是 X^* 的闭线性子空间, 因为 $E^\perp = \bigcap\limits_{x \in E} \ker \hat{x}$.

对于 X^* 的非空子集 S, 命 ${}^\perp S = \{x \in X | \forall f \in S : f(x) = 0\}$. 这称为 S 的 *前零化子*. 它是闭集, 因为 ${}^\perp S = \bigcap\limits_{f \in S} \ker f$.

定理 3 设 L 是赋范空间 X 的线性子空间而 $x \in X$.

(1) 如果 $d(x, L) > 0$, 则有 $f \in L^\perp$ 使 $\|f\| = 1$ 且 $f(x) = d(x, L)$.

(2) 存在 $f \in X^*$ 使 $\|f\| \leqslant 1$ 且 $\|x\| = f(x)$(因此 $\|\hat{x}\| = \|x\|$).

(3) ${}^\perp(L^\perp) = \overline{L}$. 而 L 稠于 X 当且仅当 $L^\perp = 0$.

据此定理知 $x \mapsto \hat{x}$ 是 X 至 X^{**} 的保范算子, 这称为 *典则嵌入*. 又连续线性泛函能分离赋范空间中的点: 如果 x 与 y 是 X 中不同向量, 则有 X 上连续线性泛函 f 使 $f(x) \neq f(y)$. 事实上, 据此定理知有 $f \in X^*$ 使使 $f(x - y) = \|x - y\| > 0$.

例 4 记 $S = \text{span}\{x^n \exp(-x^2/2) | n = 0, 1, \cdots\}$ 而 $1 \leqslant p < +\infty$, 则 S 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密. 为此取 p 的共轭数 q, 任取 $f \in S^{\perp} \subseteq L^q(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) x^n \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = 0 : n = 0, 1, \cdots .$$

对非负可测函数项级数逐项积分得

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) \exp(-\frac{x^2}{2}) \frac{(-2\pi\sqrt{-1}tx)^n}{n!}| dx \\ =& \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(2\pi|tx|) dx < +\infty. \end{aligned}$$

命 $g(x) = f(x) \exp(-x^2/2)$, 得 Lebesgue 可积函数 g. 据上可以逐项积分求其 Fourier 变换

$$\begin{aligned} \hat{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-\frac{x^2}{2}) \exp(-2\pi\sqrt{-1}tx) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-\frac{x^2}{2}) \frac{(-2\pi\sqrt{-1}tx)^n}{n!} dx = 0. \end{aligned}$$

这样 $g \doteq 0$, 即 $f \doteq 0$. 在 L^q 中, $f = 0$. 据定理 3 知, S 稠于 $L^p(\mathbb{R}^n)$.

用于上例的方法可以说明 $\text{span}\{x^\alpha \exp(-|x|^2/2) | \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 及 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中依范数稠密, 这里 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

上例中用到的 Fourier 变大量地应用于数学物理中, 这是一个十分重要的分析工具, 我们将在以后陆续体会其用法.

定理 4(Banach 定理) 使共轭空间可分的赋范空间是可分的.

现介绍 Hahn-Banach 定理的一般形式.

定理 5(Hahn-Banach) 设 Y 是线性空间 X 的线性子空间. 设 p 是 X 上的次线性泛函而 g 是 Y 上的线性泛函使 $\text{re}\, g \leqslant p$, 则 g 在 X 上有个线性延拓 f 使 $\text{re}\, f \leqslant p$. 若进而 p 为半范数, 则 $|f| \leqslant p$.

这里需要注意一个事实: 复线性空间上的复线性泛函由其实部唯一确定. 换言之, $f : X \to \mathbb{C}$ 是复线性泛函当且仅当有唯一实线性泛函 $f_1 : X \to \mathbb{R}$ 恒使

$$f(x) = f_1(x) - \sqrt{-1} f_1(\sqrt{-1}x) : x \in X.$$

共轭算子 对于有界线性算子 $A : X \to Y$ 和连续线性泛函 $g : Y \to \mathbb{K}$, 记 $A^*g = gA$, 后者是复合映射. 显然 A^*g 是 X 上连续线性泛函. 这得个映射 $A^* : Y^* \to X^*$, 称之为 A 的 *共轭算子*. 请注意 $(A^*g)(x) = g(Ax)$.

(1) 有界线性算子 A 的共轭算子 A^* 是线性算子并且 $\|A^*\| = \|A\|$.

(2) I 可表示不同空间上的恒等算子且 $(I : X \to X)^* = (I : X^* \to X^*)$.

(3) 0 可表示不同空间之间的零算子且 $(0 : X \to Y)^* = (0 : Y^* \to X^*)$.

(4) $(b_1A_2 + b_2A_2)^* = b_1A_1^* + b_2A_2^*$, 其中 b_i 是数; 而 $(BA)^* = A^*B^*$.

共轭算子的共轭算子 $A^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ 称为 A 的二次共轭算子. 设 $A, A_i : X \to Y$ 及 $B : Y \to Z$ 都是有界线性算子, 则

(5) $(BA)^{**} = B^{**}A^{**}$ 且 $(b_1A_1 + b_2A_2)^{**} = b_1A_1^{**} + b_2A^{**}$.

(6) 典则嵌入下, A^{**} 是 A 的保范延拓: $A^{**}\hat{x} = \widehat{Ax}$.

若将 $f(x)$ 写成共轭配对的形式 $\langle x, f\rangle$, 则有界线性算子 $T : X \to Y$ 与其共轭算子 T^* 唯一决定于以下关系式:

$$\langle Tx, g\rangle = \langle x, T^*g\rangle : x \in X, g \in Y^*.$$

例 5 命 $S_\pm(x_n) = (x_{n\pm1})$, 其中 $x_0 = 0$. 这得 l^2 上右移算子 S_+ 与左移算于 S_- 使 $x, y \in l^2$ 时, $\langle S_+x, y\rangle = \langle x, S_-y\rangle$. 这表明 $S_+^* = S_-$ 且 $S_-^* = S_+$.

例 6 设 φ 是全 σ- 有限测度空间 (M, μ) 上本性有界函数. 点态乘法 φf 记为 $m_\varphi f$, *乘法算子* $m_\varphi : L^p(M, \mu) \to L^p(M, \mu)$ 满足 $\|m_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

首先, 从 $\varphi(f_1 + f_2) = \varphi f_1 + \varphi f_2$ 和 $\varphi(af) = a\varphi f$ 知 m_φ 是线性的. 其次, 设 $1 \leqslant p < +\infty$ 及 $\|\varphi\|_\infty > 0$. 当 $0 < r < \|\varphi\|_\infty$ 时, $(|\varphi| > r)$ 有个可测子集 E 使 $0 < \mu(E) < +\infty$. 于是

$$\|\chi_E\|_p = (\int_M \chi_E^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = \mu(E)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\varphi\chi_E\|_p = (\int_E |\varphi|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \geqslant r\mu(E)^{\frac{1}{p}}.$$

于是 $\|m_\varphi\| \geqslant r$. 命 $r \to \|\varphi\|_\infty$ 得 $\|m_\varphi\| \geqslant \|\varphi\|_\infty$. 又从 $\|\varphi f\|_p \leqslant \|\varphi\|_\infty\|f\|_p$ 得 $\|m_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$. 最后, $p = +\infty$ 时, 由 $\|m_\varphi\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_\infty^2$ 知 $m_\varphi : L^\infty(M, \mu) \to L^\infty(M, \mu)$ 的算子范数也为 $\|\varphi\|_\infty$.

上例中 m 保持代数运算: $m_\varphi m_\psi = m_{\varphi\psi}$ 且 $m_{a\varphi+b\psi} = am_\varphi + bm_\psi$. 进而设 $e : M \to \mathbb{C}$ 为取值恒为 1 的函数, 则 $ef = f$. 于是 $m_e = I$.

例 7 以下规定的线性算子 $T: L^2(X,\mu) \to L^2(Y,\nu)$ 是有界的:

$$Tf(y) = \int_M f(x)K(x,y)\mu(dx) : f \in L^2(X,\mu),$$

其中 $K: X \times Y \to \mathbb{C}$ 是关于乘积测度平方可积的函数:

$$\int_{X\times Y} |K|^2 d(\mu \times \nu) < +\infty.$$

当 $f \in L^2(X,\mu)$ 及 $g \in L^2(Y,\nu)$ 时,

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \int_Y Tf(y)g(y)\nu(dy)\\ &= \int_Y\int_X f(x)K(x,y)g(y)\mu(dx)\nu(dy)\\ &= \int_X f(x)[\int_Y K(x,y)g(y)\nu(dy)]\mu(dx).\end{aligned}$$

这表明 $T^*g(x) = \int_M K(x,y)g(y)\nu(dy)$.

下面用零化子来讨论一些共轭空间问题.

定理 6 设 L 是赋范空间 X 的线性子空间而 $\pi : X \to X/L$ 是自然投影.

(1) 商空间 $X^*/L^\perp$ 与 L^* 等距同构: $[f] \mapsto f|_L$.

(2) 如果 L 是闭集, 则 $(\pi^* : (X/L)^* \to L^\perp)$ 是等距同构.

定理 7 设 $A: X \to Y$ 是赋范空间之间的有界线性算子,则 $^\perp(\operatorname{ran} A^*) = \ker A$, 而 $(\operatorname{ran} A)^\perp = \ker A^*$. 如果 A 有闭值域, 则 $(\operatorname{cok} A)^* \cong \ker A^*$.

习 题

练习 1 命 $e_z(f) = f(z)$, 证明 赋值泛函$e_z : A^p(M) \to \mathbb{C}$ 是连续线性泛函.

练习 2 设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间.

(1) 取定 $y \in Y$ 和线性泛函 $f: X \to \mathbb{K}$, 命 $Ax = f(x)y$, 这得线性算子 $A: X \to Y$. 证明其值域维数至多为 1. 记 $y \otimes f = A$.

(2) 证明: 线性算子 $A: X \to Y$ 是 有限秩算子— 其值域是有限维的当且仅当 X 上有 (线性无关的) 线性泛函 $f_1, \cdots, f_n$ 且 Y 中有 (线性无关的) 向量 $y_1, \cdots, y_n$ 使 $A = \sum_{i=1}^n y_i \otimes f_i$.

(3) 当 X 和 Y 是赋范空间时, 求算子范数 $\|y \otimes f\|$.

(4) 设 A 同 (2). 如果 $B: Y \to Z$ 是线性算子, 证明 $BA: X \to Z$ 是有限秩算子且 $BA = \sum(By_i) \otimes f_i$. 如果 $D: W \to X$ 是线性算子, 证明 $AD: W \to Y$ 是有限秩算子且 $AD = \sum y_i \otimes f_i D$.

练习 3 赋范空间之间有限秩算子 $A: X \to Y$ 是连续的当且仅当存在有限个 (线性无关的) 连续线性泛函 $f_1, \cdots, f_n: X \to \mathbb{K}$ 和 (线性无关的) 向量 $y_1, \cdots, y_n \in Y$ 使 $A = \sum y_i \otimes f_i$ 当且仅当 $\ker A$ 是闭集.

练习 4(一般矩量问题) 设 $(x_i)_{i\in J}$ 是赋范空间 X 中向量簇而 $(c_i)_{i\in J}$ 是数簇, 证明有 $f \in X^*$ 使 $f(x_i) = c_i : i \in J$ 当且仅当有非负实数 c 使对只有有限项非零的数组 $t_i : i \in J$ 恒成立 $\left|\sum\limits_{i\in J} t_i c_i\right| \leqslant c\left\|\sum\limits_{i\in J} t_i x_i\right\|$. 此时, $\|f\| \leqslant c$.

练习 5 线性泛函 $f: X \to \mathbb{K}$ 的范数可达是指有 x 使 $\|x\| \leqslant 1$ 且 $f(x) = \|f\|$.

(1) 说明 l^1 上有范数不可达的线性泛函 f.

(2) 说明 $l^p, 1 < p < +\infty$ 上连续线性泛函 f 都范数可达.

练习 6 试证明 l^∞ 上有个线性泛函 f 使 $x \in l^\infty$ 时

$$\varliminf_{n\to\infty} \operatorname{re} x_n \leqslant \operatorname{re} f(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \operatorname{re} x_n.$$

练习 7 证明: 线性泛函 $f: X \to \mathbb{K}$ 是线性泛函组 $f_1, \cdots, f_n: X \to \mathbb{K}$ 的线性组合当且仅当 $f_1, \cdots, f_n$ 的公共零点是 f 的零点 (即 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq \ker f$).

练习 8 试证明: 线性泛函 $f_1, \cdots, f_n: X \to \mathbb{K}$ 线性无关当且仅当 X 中有向量组 $e_1, \cdots, e_n$ 使 $f_i(e_j) = \delta_{ij} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号: 当 $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$; 当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$.

练习 9 设线性空间 X 上有列线性泛函 $f, f_1, f_2, \cdots$ 使 $x \in X$ 时

$$|f(x)|^3 \leqslant |f_1(x)|^3 + |f_2(x)|^3 + \cdots < +\infty.$$

试证明存在一组数 (b_n) 使 $f(x) = b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x) + \cdots$.

练习 10 证明: 存在连续线性泛函 $f: l^\infty \to \mathbb{C}$ 使 $x \in l^\infty$ 时

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{re} x_i}{n} \leqslant \operatorname{re} f(x) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{re} x_i}{n}.$$

练习 11 证明: 存在线性泛函 $f: l^\infty \to \mathbb{C}$ 使

(1) $x \in \mathbf{c}$ 时, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2) $f \geqslant 0$, 这表示: x 的各项非负时, $f(x) \geqslant 0$.

(3) f 是 S 不变的: $f(Sx) = f(x)$ 恒成立, 其中

$$S(x_1, x_2, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots).$$

(4) $\|f\| = 1$(满足这 4 条的 f 称为一个 Banach 极限).

练习 12 设 X 和 Y 是赋范空间，在 $X \times Y$ 上定义范数

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

试证明： $F \in (X \times Y)^*$ 当且仅当有唯一 $(f,g) \in X^* \times Y^*$ 恒使

$$F(x,y) = f(x) + g(y).$$

此时 $\|F\| = \|f\| + \|g\|$.

练习 13 证明：$[0,1]$ 上绝对连续函数全体所成的线性空间 $A[0,1]$ 作为 $V[0,1]$ 的子空间是可分的完备空间.

练习 14(F. Riesz) 设 $1 < p < +\infty$ 而 $-\infty < a < b < +\infty$，则函数 $f:[a,b] \to \mathbb{C}$ 是某个 p 方 Lebesgue 可积函数 $h:[a,b] \to \mathbb{C}$ 的不定积分当且仅当有非负实数 c 使 $P: a = x_0 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a,b]$ 的分点组时，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|^p}{(x_k - x_{k-1})^{p-1}} \leqslant c.$$

练习 15 设 Y 是度量空间 X 的可最佳逼近集— 它对每个 $x \in X$ 有最佳逼近，证明 Y 是闭集.

练习 16 设 X 是赋范空间而 f 是 X 上非零连续线性泛函，证明 $\ker f$ 是可最佳逼近集当且仅当 X 中有单位向量 x_0 使 $f(x_0) = \|f\|$.

练习 17(Kottman) 无限维赋范空间 X 中有单位向量序列 (x_n) 使 $i \neq j$ 时，$\|x_i - x_j\| > 1$.

* **练习 18** 设 G 是交换半群 (如 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \mathbb{T}$)，其半群运算记为 $(s,t) \mapsto st$. 设 $l^\infty G$ 是 G 上有界实函数全体按上确界范数 $\|f\| = \sup\limits_{t \in G} |f(t)|$ 所成的 Banach 空间. 对于 $s \in G$ 和 $f \in l^\infty G$，命 $\rho_s(f)(t) = f(st)$，证明

(1) $\rho_s : l^\infty G \to l^\infty G$ 是线性算子且 $\|\rho_s\| \leqslant 1$.

(2) $\rho_s(f_1 f_2) = \rho_s(f_1)\rho_s(f_2) : f_1, f_2 \in l^\infty G$.

(3) $\rho_{st}(f) = \rho_t \rho_s(f) : s, t \in G$.

(4) $\inf\limits_{t \in G} \sum\limits_{i=1}^{n} (f_i(t) - f_i(ts_i)) \leqslant 0$，此处 $f_i \in l^\infty$ 且 $s_i \in G$.

* **练习 19** 在练习 18 的条件下，以 $e : G \to \mathbb{C}$ 代表取值恒为 1 的函数，则存在线性泛函 $\varphi : l^\infty G \to \mathbb{C}$ 使

(1) $\varphi(e) = 1$ 且 φ 是平移不变的 — 当 $s \in G$ 时，$\varphi\rho_s = \varphi$.

(2) φ 是正的 — 当 $f \geqslant 0$ 时，$\varphi(f) \geqslant 0$.

* **练习 20** 设 G 是由两个元 a, b 生成的自由群，证明无线性泛函 $\varphi : l^{\infty}G \to \mathbb{C}$ 满足练习 19 中的条件 (1) 和 (2).

* **练习 21** 证明：存在集函数 $\nu : 2^{\mathbb{T}} \to [0, +\infty)$，它满足以下条件：

(有限可加性)$\nu(E_1 \sqcup E_2) = \nu(E_1) + \nu(E_2)$.

(平移不变性)$\nu(zE) = \nu(E) : z \in \mathbb{T}$.

(对称不变性)$\nu(E^{-1}) = \nu(E)$，其中 $E^{-1} = \{z^{-1} | z \in E\}$.

(相容性)E 是 Borel 集时，$\nu(E)$ 为 E 的弧长测度 $|E|_1$.

* **练习 22** 存在集函数 $\nu : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$，它满足以下条件：

(有限可加性)$\mu(E_1 \sqcup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

(平移不变性)$\mu(x + E) = \mu(E)$

(反射不变性)$\mu(-E) = \mu(E)$.

(相容性)E 是 Lebesgue 可测集时，$\nu(E)$ 为 E 的 Lebesgue 测度 $|E|_1$.

练习 23 设 f 同练习 11，证明有 $x, y \in l^{\infty}$ 使 $f(xy) \neq f(x)f(y)$，其中 xy 表示数列 $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$.

练习 24(Phillips) 设 Y 是赋范空间 X 的线性子空间，则任何有界线性算子 $A : Y \to l^{\infty}(J)$ 有保范延拓 $B : X \to l^{\infty}(J)$.

练习 25 设 L 是赋范空间 X 的稠密线性子空间，证明 $f \mapsto f|_L$ 是 X^* 至 L^* 的等距同构.

练习 26 证明线性空间 X 上两个非零线性泛函 f 和 g 线性相关当且仅当它们有相同的核空间.

练习 27 可测空间 $(M, \mathcal{S})$ 上有界可测函数 $f : M \to \mathbb{C}$ 全体 $L_b(M, \mathcal{S})$ 按上确界范数 $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in M\}$ 成为 Banach 空间. 证明有界复值容度 $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ 全体 $\mathrm{ba}(M, \mathcal{S})$ 按以下范数

$$\|\mu\| = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| : E_1, \cdots, E_n \text{可测划分} M\}$$

成为 Banach 空间. 线性泛函 $\varphi : L_b(M, \mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ 连续当且仅当有唯一 $\mu \in \mathrm{ba}(M, \mathcal{S})$ 使 $f \in L_b(M, \mathcal{S})$ 时，$\varphi(f) = \int\limits_M f d\mu$(积分的定义见于 §4.3 练习 18). 此时 $\|\varphi\| = \|\mu\|$(因此 $L_b(M, \mathcal{S})^*$ 与 $\mathrm{ba}(M, \mathcal{S})$ 等距同构).

练习 28 设 M 是赋范空间 X 的非空子集，试证明

$$\overline{\mathrm{span}}\, M = \bigcap\{\ker f | f \in M^{\perp}\}.$$

练习 29 求 §6.1 练习 6 与练习 8 中各算子的共轭.

练习 30 设 X 和 Y 是赋范空间, 证明 $\mathbf{B}(X,Y^*)$ 与 $\mathbf{B}(Y,X^*)$ 等距同构.

练习 31 对于函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 极限 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)$ 存在时记为 $f(\infty)$. 证明存在连续线性泛函 $\varphi: l^\infty(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ 恒使

$$\varliminf_{|x|\to\infty} \operatorname{re} f(x) \leqslant \operatorname{re}\varphi(f) \leqslant \varlimsup_{x\to\infty} \operatorname{re}\varphi(f).$$

并证明 $\varphi(f)=f(\infty)$ 在右边存在时成立.

§6.3 收 敛 与 自 反 性

赋范空间中依范数收敛也称为强收敛. 放宽收敛条件得以下诸收敛性.

弱 * 收敛与弱收敛 设 X 是赋范空间而 X^* 是其共轭空间.

(1) 称 X^* 中序列 (f_n)弱 * 收敛于f 是指 $x\in X$ 时, $\lim f_n(x)=f(x)$. 这记为 $f_n \xrightarrow{w^*} f$. 此时 $\|f\|\leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|$.

(2) 称 X 中序列 (x_n)弱收敛于x 是指 $f\in X^*$ 时, $\lim f(x_n)=f(x)$. 这记为 $x_n \xrightarrow{w} x$. 此即 $(\hat{x}_n)$ 弱 * 逼近 $\hat{x}$. 因此 $\|x\|\leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$.

(3) 弱极限若存在必唯一; 弱 * 极限若存在必唯一.

(4) 设 $1\leqslant p<+\infty$ 而 q 是 p 的共轭数, 则 $L^p(M,\mu)$ 中序列 (f_n) 弱收敛于 f 相当于 $g\in L^q(M,\mu)$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_n g d\mu=\int_M fgd\mu.$$

而 $L^q(M,\mu)$ 中序列 (g_n) 弱 * 逼近 g 等价于 $f\in L^p(M,\mu)$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\int_M fg_n d\mu=\int_M fgd\mu.$$

(5) 有限维赋范空间中弱收敛与强收敛一致.

(6) 有限维赋范空间的共轭空间中弱 * 收敛与强收敛一致.

弱收敛的序列不必强收敛. 如 l^2 中序列 (e_n) 弱收敛于 0:

$$\lim\langle e_n,y\rangle=\lim y_n=0: y\in l^2.$$

但 $\|e_n\|_2=1$ 表明 (e_n) 不会强收敛于 0.

弱 * 收敛的序列不必强收敛. 如 $L^\infty(\mathbb{R})$ 中序列 $(\cos(n\cdot))_{n=1}^\infty$ 弱 * 逼近 0. 这是因为据 Riemann-Lebesgue 引理, 当 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(nt)dt=0.$$

但 $\|\cos(n\cdot)\|_\infty=1$ 表明 $(\cos(n\cdot))_{n=1}^\infty$ 不会强收敛于 0.

定理 1 可分赋范空间 X 上一致有界的线性泛函序列 (f_n) 有弱 * 收敛的子列. 换言之, X^* 的有界集是弱 * 列紧的.

有界线性算子序列 $(A_n : X \to Y)$ 和 $A : X \to Y$ 有 3 种收敛性:

(1) 一致收敛: $\lim \|A_n - A\| = 0$. 此时 (A_n^*) 一致逼近 A^*.

(2) 强算子收敛: 对任何 $x \in X$, $\lim \|A_n x - Ax\| = 0$.

(3) 弱算子收敛: 对任何 $x \in X$ 与 $g \in Y^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(A_n x) = g(Ax)$.

例 1 考察 l^2 上的左移 $T : (x_1, x_2, x_3, \cdots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \cdots)$, 算得 $\|T^n\| = 1$. 由于 $\|T^n x\|^2 = \sum\limits_{i>n} |x_i|^2$, 有界线性算子序列 (T^n) 强算子收敛于零.

因此, 即使 X 与 Y 是 Banach 空间, 以上三种收敛性也可能不等价. 然而, 有限维赋范空间之间线性算子序列的三种收敛性是一致的.

判断强算子收敛的一个有力工具是以下结论.

定理 2 设 $(A_n : X \to Y)$ 是赋范空间之间的一致有界线性算子列. 如果 X 有个子集 E 使 $\operatorname{span} E$ 在 X 中稠密且 (A_n) 在 E 上逐点逼近线性算子 $A : X \to Y$, 则 A 有界且 (A_n) 强算子逼近 A.

以后常会讨论泛函序列的有界性. 连续线性泛函序列的弱 * 收敛可视为有界线性算子序列的强算子收敛, 这种解释为后面的应用带来方便.

自反空间 使典则嵌入为满射的赋范空间 X 称为*自反空间*: 即对任何 $\varphi \in X^{**}$ 有 $x \in X$ 使 $f \in X^*$ 时, $\varphi(f) = f(x)$.

(1) 自反空间是 Banach 空间.

(2) 自反空间 X 中有界序列 (x_n) 必有弱收敛的子列.

(3) 设 L 是 X 的自反子空间, 则 L 对任何 $x \in X$ 有最佳逼近 — 存在 $y \in L$ 使 $\|x - y\| = d(x, L)$.

例 2 $L^1[0,1]$ 不是自反空间. 否则作 $L^1[0,1]$ 上模 1 连续线性泛函 φ 使

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t) \sin t dt, f \in L^1[0,1].$$

记 $L = \ker \varphi$, 取 L 对 $h \in L^1 \setminus L$ 的最佳逼近 g: $d(g, L) = \|g - h\|_1$. 据 §6.2 定理 1 知, $|\varphi(g)| = d(g, L)$. 这即

$$\left|\int_0^1 (h(t) - g(t)) \sin t dt\right| = \int_0^1 |h(t) - g(t)| dt.$$

注意到 $|h(t) - g(t)| \sin t \leqslant |h(t) - g(t)|$, 由上式知

$$|h(t) - g(t)||\sin t| \doteq |h(t) - g(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

于是在 $L^1[0,1]$ 中, $g = h$. 矛盾.

以下定理在判断某些空间的自反性方面非常有用.

定理 3(Pettis) 自反空间的闭线性子空间与共轭空间都是自反的. 反之, 共轭空间自反的 Banach 空间是自反的.

习 题

练习 1(Schur) 在 l^1 中弱收敛的序列 (x_n) 必强收敛.

练习 2 有界线性算子 A 是有限秩算子时, 证明 A^* 是有限秩算子.

练习 3 举例说明弱收敛的算子序列不一定强收敛.

练习 4 证明: (1) 设 $1 < p < +\infty$, 则 $L^p(M, \mu)$ 是自反空间.

(2) l^1 和 l^∞ 都不是自反空间.

(3) $C[0,1]$ 不是自反空间.

练习 5 证明: 赋范空间 X 是有限维的当且仅当 X^* 是有限维的. 此时

(1) X 是自反空间且 $\dim X = \dim X^*$.

(2) X 中弱收敛是依范数收敛.

(3) X^* 中弱 * 收敛是依范数收敛.

练习 6(有限矩量问题) 设 $-\infty < a < b < +\infty$. 给定实数 $b_0, \cdots, b_n$, 证明有个在 $(a, b]$ 右连续的有界变差函数 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 使

$$\int_{[a,b]} x^k dg(x) = b_k : k = 0, 1, \cdots, n.$$

练习 7(矩量问题) 设 $-\infty < a < b < +\infty$. 给定实数列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, 证明: 有个在 $(a, b]$ 右连续的有界变差函数 $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 使

$$\int_a^b x^k dg(x) = b_k : k = 0, 1, \cdots$$

当且仅当有非负常数 c 使对于实数列 $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ 和非负整数 n 成立

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right| \leqslant c \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left|\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right|.$$

练习 8 设线性泛函 $\varphi : C[a, b] \to \mathbb{C}$ 是正泛函 — 当 $f \geqslant 0$ 时 $\varphi(f) \geqslant 0$, 证明 φ 连续且 $\|\varphi\| = \varphi(e)$, 其中 e 是取值恒为 1 的函数.

练习 9(Hausdorff 定理) 对于数列 $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, 归纳地命 $\Delta^0 b_n = b_n$ 及

$$\Delta^k b_n = \Delta^{k-1} b_n - \Delta^{k-1} b_{n+1} : k = 1, 2, \cdots .$$

(1) 所有 $\Delta^k b_n : k, n \geqslant 0$ 非负当且仅当有递增 $g \in V_0[0,1]$ 恒使

$$\int_0^1 x^n dg(x) = b_n : n = 0, 1, \cdots .$$

(2) 有 $g \in V_0[0,1]$ 使上式恒成立当且仅当有非负常数 c 使

$$|\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |\Delta^{n-i} b_i| \leqslant c : n = 0, 1, \cdots$$

练习 10(Runge 定理) 设 K 是复平面 $\mathbb{C}$ 中非空紧集而 S 是与 K 不交但与 $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ 的每个分枝相交的子集, 则定义域包含 K 的全纯函数 f 可被极点都在 S 中的有理函数列在 K 上一致逼近.

练习 11 (1) 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上赋范空间而 $f: X \to \mathbb{K}$ 是范数为 1 的线性泛函, 证明 $\{f(x) : \|x\| < 1\} = \{b \in \mathbb{K} : |b| < 1\}$.

(2) 暂时约定 $C[-1,1]$ 表示区间 $[-1,1]$ 上取值于 $\mathbb{K}$ 的连续函数全体按最大模范数所成的 Banach 空间, 以 B 记其单位闭球, 证明有连续线性泛函 $\varphi : C[-1,1] \to \mathbb{K}$ 使 $\varphi(B)$ 是开集. 特别地, $|\varphi|$ 在 B 上不能取最大值.

练习 12 设 X 是赋范空间而 E 是 X^* 的线性子空间, 命

$$(J[x])(f) = f(x) : x \in X, f \in E.$$

证明: (1) $J : X/^{\perp}E \to E^*$ 是有界的单线性算子.

(2) 在 E 有限维时, J 是等距同构. 对于 $\varphi \in X^{**}$ 及 $\varepsilon > 0$, 有 $y \in X$ 使 $\|y\| < \|\varphi\| + \varepsilon$ 且 $f \in E$ 时, $\varphi(f) = f(y)$.

练习 13 设 X 是赋范空间, 固定个 $\varphi \in X^{**}$ 使 $\|\varphi\| = 1$. 设 E 是 X^* 的有限维子空间而 $0 < \varepsilon < 1$, 证明有 $z \in X$ 使 $\|z\| < 1$ 且 $f \in E$ 时,

$$|f(z) - \varphi(f)| \leqslant \varepsilon \|f\|.$$

练习 14(Helly 定理) 设 $c_1, \cdots, c_n$ 是一组数而 $f_1, \cdots, f_n$ 是赋范空间 X 上连续线性泛函, 则有 $x_0 \in X$ 使 $f_1(x_0) = c_1, \cdots, f_n(x_0) = c_n$ 当且仅当有非负数 b 使 $a_1, \cdots, a_n$ 是任意数组时, $|\sum_{i=1}^{n} a_i c_i| \leqslant b \|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\|$. 此时对任意 $\varepsilon > 0$, 可选 x_0 使 $\|x_0\| \leqslant b + \varepsilon$.

练习 15 找一个 Banach 空间 X 上的连续线性泛函序列 (f_n), 找一个数列 (c_n) 和一个常数 b 使 (a_n) 为只有有限项不为零的数列时, $|\sum\limits_n a_n c_n| \leqslant b\|\sum\limits_n a_n f_n\|$, 但无 $x \in X$ 恒使 $f_n(x) = c_n$.

练习 16 说明 $\mathbf{c}_0$ 上范数可达的连续线性泛函全体是异于 $\mathbf{c}_0^*$ 的稠密集.

练习 17 证明: 自反空间 X 上连续线性泛函 f 都是范数可达的.

练习 18 说明 $\mathbf{c}_0$ 不是自反空间.

练习 19* 设 X 和 Y 是 Banach 空间而 X 自反, 证明 X 与 Y 拓扑同构 [或等距同构] 当且仅当 Y^* 与 X^* 拓扑同构 [或等距同构]. 此时 Y 也自反.

练习 20 设 X 是赋范空间, 证明 (1)⇒(2)⇔(3)⇔(4)⇔(5):

(1) X 是一致凸空间: 当 $\varepsilon > 0$ 时, 有 $\delta > 0$ 使 X 中单位向量 x 与 y 适合 $\|x+y\| > 2-2\delta$ 时, $\|x-y\| < \varepsilon$. 这即 $\lim\limits_{\delta\to 0} u_X(\delta) = 0$, 其中

$$u_X(\delta) = \sup\{\|x-y\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x+y\| > 2-2\delta\}.$$

(2) X 是严格赋范空间: 其中非零向量 x 与 y 使 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ 时, 有正实数 a 使 $y = ax$.

(3) X 是严格凸空间: 其中使 $\|x+y\| = 2$ 的单位向量 x 和 y 相等.

(4) X 中单位向量 x 和 y 与 $0 < t < 1$ 使 $\|tx + (1-t)y\| = 1$ 时, $x = y$.

(5) X 中 2 维的线性子空间都是严格凸的.

* **练习 21(Milman 定理)** 一致凸 Banach 空间 X 都是自反的.

练习 22 说明 $L^p(M,\mu) : 1 < p < +\infty$ 是严格凸空间但 l^1 不严格凸.

练习 23 说明 $L^p(M,\mu) : 1 < p < +\infty$ 是一致凸空间.

练习 24(F. Riesz 定理) 设 $1 < p < \infty$ 而 $L^p(M,\mu)$ 中序列 (f_n) 弱收敛于 f. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

练习 25 试说明 $(C[0,1], \|\cdot\|')$ 不自反但严格凸, 其中

$$\|f\|' = \|f\| + \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

练习 26 证明: 取范数 $\|x\| = |x_1| \vee |x_2|$ 后, $\mathbb{R}^2$ 不一致凸也不严格赋范.

练习 27 说明 $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}$, l^∞, $C[0,1]$, $L^\infty[0,1]$ 既非一致凸的也非严格赋范的.

* **练习 28** 当 x, y 取遍赋范空间 X 中单位向量时，记

$$\rho_X(r) = \sup\{\|x + ry\| + \|x - ry\| - 2\}.$$

称赋范空间 X 是一致光滑的是指 $\lim\limits_{r\to 0+} \rho_X(r)/r = 0$. 证明：

(1) 如果 X 是一致光滑的，则 X^{**} 也是一致光滑的.

(2) 如果 X^* 是一致光滑的，则 X 是一致凸的.

(3) 一致光滑的 Banach 空间 X 是自反的.

练习 29 用 Riesz 表示定理和第四章的有关结论证明：如果 (φ_n) 是 $C[a,b]$ 上一致有界的连续线性泛函序列，则它有弱 * 收敛的子列.

练习 30 证明：一致凸 Banach 空间 X 中序列 (x_n) 依范数逼近 x 当且仅当 (x_n) 弱逼近 x 且 $\lim\|x_n\| = \|x\|$.

§6.4 一致有界原理

将 l^0 作为 l^2 的子空间，作线性算子 $T_n : l_0 \to l_0$ 使 $T_n x = n x_n e_1$. 取 m 使 $l > m$ 时 $x_l = 0$. 对此种 $l, T_l x = 0$. 于是 $\{T_n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ 逐点有界，显然 $\|T_n\| = n$. 这样 $\{T_n\}$ 非一致有界. 何时逐点有界蕴含一致有界就成了一个重要问题.

定理 1(一致有界原理或共鸣定理) 设 X 是第二纲赋范空间而 Y 是赋范空间. 关于有界线性算子簇 $\{A_i : X \to Y | i \in J\}$ 的以下条件等价：

(1) 一致有界 (依算子范数有界): $\sup\{\|A_i\| : i \in I\} < +\infty$.

(2) 强算子有界： $x \in X$ 时， $\sup\{\|A_i x\| : i \in I\} < +\infty$.

(3) 弱算子有界： $x \in X$ 与 $g \in Y^*$ 时， $\sup\limits_{i\in I} |g(A_i x)| < +\infty$.

证明这个定理需要用到以下有用结论.

Gelfand 引理 设 $p : X \to \mathbb{R}$ 是第二纲赋范空间上的下半连续的次线性泛函，则有非负实常数 $c \geqslant 0$ 使 $x \in X$ 时， $p(x) \leqslant c\|x\|$. 进而 p 连续.

一般情形下，一致有界 ⇒强算子有界 ⇒弱算子有界.

定理 2(Banach-Steinhaus, 1927) 设 X 是第二纲赋范空间而 Y 是赋范空间. 设有界线性算子序列 $(A_n : X \to Y)$ 逐点逼近映射 $A : X \to Y$, 则 (A_n) 一致有界并且 A 是有界线性算子. 进而， $\|A\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$.

对应于弱 * 收敛，赋范空间 X 上连续线性泛函簇 E 称为弱 * 有界是指 $x \in X$ 时， $\sup\limits_{f\in E} |f(x)| < +\infty$. 这相当于 E 是强算子有界的.

定理 3 设 X 是赋范空间, 则 X 的子集 S 强有界 (依范数有界) 当且仅当它 *弱有界*: $f \in X^*$ 时, 数集 $f(S)$ 有界.

在 X 是第二纲赋范空间时, X^* 的子集 E 强有界当且仅当它弱 * 有界.

对数值积分的应用: 在数值积分中, 常以机械求积公式 $\varphi_n(f)$ 作为连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 的定积分的近似值, 其中

$$\varphi_n(f)=f(x_{n1})c_{n1}+\cdots+f(x_{nl_n})c_{nl_n}$$

而 $a\leqslant x_{n1}<\cdots<x_{nl_n}\leqslant b$ 且 $(c_{n1},\cdots,c_{nl_n})$ 是常数. 梯形法与 Simpson 方法都是这种类型的近似方法. 它们的基础是以下定理.

定理 4(Стеклов-Szegö) 在以上设定下, 任何连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 的定积分可被机械求积分公式 $\varphi_n(f)$ 逼近:

$$\lim\varphi_n(f)=\int_a^b f(x)dx$$

当且仅当 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{i\leqslant l_n}|c_{ni}|<+\infty$ 且上式对多项式 f 都成立.

证明. 据 §6.2 例 3 知, $\|\varphi_n\|=\sum(|c_{ni}|:i\leqslant l_n)$. 命

$$\varphi(f)=\int_a^b f(t)dt:f\in C[a,b].$$

必要性: 因为 (φ_n) 逐点收敛于 φ, 所以据 Banach-Steinhaus 定理知 (φ_n) 一致有界. 这即 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{i\leqslant l_n}|c_{ni}|<+\infty$.

充分性: 将那个上确界记为 c, 则 $\|\varphi_n\|\leqslant c$. 因为 (φ_n) 在 $C[a,b]$ 的稠密集 $\mathbb{C}[x]$ 上逐点逼近 φ, 所以据 §6.3 定理 2 知 (φ_n) 弱 * 逼近 φ.

习 题

练习 1 设 X 是 Banach 空间. 设 (f_n) 是 X^* 中弱 * 基本序列: $x\in X$ 时, $\lim\limits_{m,n}(f_n(x)-f_m(x))=0$. 证明 (f_n) 弱 * 收敛.

练习 2 设数列 (a_n) 使 $x\in l^1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 的 Cauchy 和存在, 证明 (a_n) 是有界的.

练习 3 设 $1\leqslant p\leqslant+\infty$ 而 (M,μ) 是全 σ- 有限测度空间. 证明可测函数 $h:M\to\mathbb{C}$ 本性有界当且仅当 $\{hf|f\in L^p(M,\mu)\}\subseteq L^p(M,\mu)$.

练习 4 试证明 $C[a,b]$ 中序列 (f_n) 弱收敛于 f 当且仅当 (f_n) 一致有界 (即按上确界范数有界) 且 (f_n) 点态收敛于 f.

练习 5 设 Y 是 Banach 空间 X 的稠密线性子空间, $\{f_n|n\geqslant 1\}$ 是 X^* 中无界序列. 如果 $y\in Y$ 时 $\sup\limits_{n\geqslant 1}|f_n(y)|<+\infty$, 证明 Y 是 X 的第一纲集.

练习 6 设 $1\leqslant p\leqslant +\infty$, 证明 $L^p[a,b]$ 的子集 $C[a,b]$ 是第一纲集.

练习 7 证明 $L^1(M,\mu)$ 中序列 (f_n) 弱收敛于零当且仅当 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n\|_1<+\infty$ 且当 E 是 M 的可测集时, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n d\mu=0$.

练习 8 设 X 是 Banach 空间, Y 是自反空间. 设有界线性算子序列 $(T_n: X\to Y)$ 使 $x\in X$ 及 $g\in Y^*$ 时, 数列 $(g(T_nx))_{n=1}^{\infty}$ 收敛. 证明 (T_n) 一致有界并且弱算子收敛于一个有界线性算子 $T:X\to Y$.

练习 9 设 $1\leqslant p\leqslant +\infty$ 而 q 是 p 的共轭数. 设 $g:M\to\mathbb{C}$ 是可测函数使 $f\in L^p(M,\mu)$ 时 gf 可积, 证明 $\|g\|_q<+\infty$.

练习 10 设 X_i 与 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间. 称映射 $T:\prod\limits_{i=1}^{n}X_i\to Y$ 是多重线性算子是指当 $a_1\in X_1,\cdots,a_n\in X_n$ 且 $i=1,\cdots,n$ 时, 截口 $x_i\mapsto T(a_1,\cdots,a_{j-1},x_i,a_j,\cdots,a_n)$ 是 X_i 到 Y 的线性算子.

在诸 X_i 与 Y 是赋范空间时, 称 T 是有界的是指

$$\sup\{\|T(x)\|:\|x_1\|<1,\cdots,\|x_n\|<1\}<+\infty.$$

现设 X 是第二纲的, 映射 $T:X\times Y\to Z$ 使截口 $T(x,\cdot):x\in X$ 与 $T(\cdot,y):y\in Y$ 都是有界线性算子, 证明 T 是有界双重线性算子.

练习 11 在复系数多项式环 $\mathbb{C}[x]$ 上定义范数 $\|f\|=\int\limits_0^1|f(x)|dx$ 和双线性型 $\varphi(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dt$, 证明 φ 是无界双线性型.

练习 12 设 (f_n) 是 Banach 空间 X 上一列连续线性泛函使 $x\in X$ 时 $\sum\limits_{n\geqslant 1}|f_n(x)|$ 收敛, 证明有常数 c 使 $\varphi\in X^{**}$ 时 $\sum\limits_{n\geqslant 1}|\varphi(f_n)|\leqslant c\|\varphi\|$.

练习 13 设赋范空间 X 中序列 (x_n) 使 $f\in X^*$ 时 $\sum\limits_{n\geqslant 1}|f(x_n)|<+\infty$, 证明有常数 $c\geqslant 0$ 使 $\sum\limits_{n\geqslant 1}|f(x_n)|\leqslant c\|f\|$.

练习 14(Gelfand) 可分 Banach 空间 X 的子集 E 是列紧集当且仅当 X 上弱 * 收敛的连续线性泛函序列 (f_n) 在 E 上一致收敛.

练习 15 设 X 是 Banach 空间而 $A: X \to l^\infty J$ 是线性算子. 将 Ax 的第 i 项记为 $f_i(x)$, 证明 A 有界当且仅当 (f_i) 是弱 * 有界的连续线性泛函.

练习 16 用反证法与滑背法 (参见 §6.3 练习 1) 证明: Banach 空间 X 到赋范空间 Y 的强算子有界的有界线性算子簇 $\mathcal{F}$ 是一致有界的.

练习 17 设 X 和 Y 是 l^0 并分别赋以 l^1- 范数和 l^∞- 范数. 命 $f_n(x) = nx_n$, 得连续线性泛函 $f_n : X \to \mathbb{C}$. 试说明 $\{f_n| \geqslant 1\}$ 是弱 * 有界的但非强有界的. 命 $Ax = x$, 证明线性算子 $A : X \to Y$ 可逆且有界, 但逆 A^{-1} 是无界闭算子.

练习 18(奇点凝聚原理) 设 X 与 Y_n 是赋范空间. 对于 $\mathcal{T}_n \subseteq B(X, Y_n)$, 命

$$E = \{x \in X | \forall n \in \mathbb{N} : \sup_{A \in \mathcal{T}_n} \|Ax\| = +\infty\}.$$

如果 X 是第二纲的且 $\mathcal{T}_n$ 都是无界集, 则 E 是 X 的第二纲集.

练习 19 设线性算子 $A : \mathbf{c} \to \mathbf{c}$ 由一个无限阶复值矩阵 $[a_{ij}]_{i,j\geqslant 1}$ 所诱导: $y = Ax$ 当且仅当 y 的每个分量 $y_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{nj}x_j$(这是 Cauchy 和). 这可写成以下形式:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

证明 A 是有界线性算子且 $\|A\| = \sup\limits_{n\geqslant 1} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{nj}|$.

§6.5 开映射与闭算子

线性泛函分析有三大支柱: Hahn-Banach 定理、一致有界原理和开映射定理. 后者有三个等价结论: 逆算子定理、范数等价定理和闭图像定理.

定理 1(开映射定理, Banach 1932) 设 $A : X \to Y$ 是 Banach 空间之间的有界线性算子. 如果 A 是满射, 则它是开映射.

如果以上定理中的 A 不是满射但有闭值域, 则限制 $(A : X \to \operatorname{ran} A)$ 是开映射. 这个事实会在处理某些问题时带来便利.

以下是不适用**开映射**原理但仍是开映射的例子.

例 1 设 X 是赋范空间，则加法 $X \times X \to X : (x,y) \mapsto x+y$ 是开映射. 为此命 $f(x,y) = x+y$. 对于 $X \times X$ 的任何非空开集 W，据 §5.2 知，$f(W) = \bigcup\{U_i + V_i | i \in I\}$ 是开集.

在 l^0 上取 l^2- 范数. 线性算子 $A : l_0 \to l_0, (x_n) \mapsto (x_n/n)$ 有界且可逆. 因为 $A^{-1}(x_n) = (nx_n)$, A^{-1} 无界. 因此要问：什么条件才能使逆算子有界呢？

定理 2(逆算子定理， Banach) 设 $A : X \to Y$ 是 Banach 空间之间的有界线性算子. 如果 A 可逆，则其逆算子 $A^{-1} : Y \to X$ 有界.

逆算子定理相当于说， Banach 空间之间可逆的有界线性算子 $A : X \to Y$ 是拓扑同构. 如果 A 不一定是满射但有闭值域，则限制 $(A : X \to \operatorname{ran} A)$ 是拓扑同构，从而 A 下有界.

有限维线性空间上任何两个范数都等价. 对于一般线性空间，则有以下

推论 3(范数等价定理) 设线性空间 X 按两个范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 都成为 Banach 空间. 如果 $\|\cdot\|$ 弱于 $\|\cdot\|'$, 则它们等价.

设 $A : X \to Y$ 是度量空间之间映射，其图像是 $X \times Y$ 的子集

$$\operatorname{gr} A = \{(x, Ax) | x \in X\}.$$

当 A 连续时，图像 $\operatorname{gr} A$ 是 $X \times Y$ 的闭集. 为此命 $f(x,y) = (Ax, y)$, 得映射 $f : X \times Y \to Y \times Y$ 使 $\operatorname{gr} A = f^{-1}(\operatorname{diag} Y^2)$. 对角线 $\operatorname{diag} Y^2$ 是闭集且 f 连续，从而 $\operatorname{gr} A$ 是闭集.

一般地，图像是 $X \times Y$ 的闭集的映射 $A : X \to Y$ 称为*闭算子*. 这相当于：当 X 中序列 (x_n) 收敛且 Y 中对应的序列 (Ax_n) 也收敛时，

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = A \lim_{n\to\infty} x_n.$$

例 3 将区间 [0,1] 上连续可微函数组成的线性空间 $C^1[0,1]$ 视为 $C[0,1]$ 的赋范子空间，则微分算子 $D : C^1[a,b] \to C[a,b], f \to f'$ 是闭算子.

为此设 $\lim f_n = f$ 及 $\lim f_n' = g$, 则

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt, a \leqslant x \leqslant b$$

这表明 $g = f'$. 因此 D 是闭算子. 这也可另证如下：命

$$p(f,g) = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - f(0) - \int_0^x g(t)dt|.$$

得半范数 $p : C^1[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ 使

$$p(f,g) \leqslant 2(\|f\| + \|g\|)$$

且 $\ker p = \operatorname{gr} D$, 从而 $\operatorname{gr} D$ 是闭线性子空间.

可见，闭算子不必连续. 何时有闭图像的算子是连续的呢？

定理 4(闭图像定理, Banach 1929) 设 $A: X \to Y$ 是 Banach 空间之间的线性算子. 如果 A 是闭算子, 则 A 有界.

例 3 中 $C^1[a,b]$ 不是 Banach 空间, 因此例 3 的结论与定理 4 不矛盾.

例 4 设 M 是复平面上有界开集而 $1 \leqslant p < +\infty$. 如果 $\varphi: M \to \mathbb{C}$ 是全纯函数使任何 $f \in A^p(M)$ 对应的点态乘积 φf 也在 $A^p(M)$ 中, 则 φ 有界.

为此作线性算子 $T: A^p \to A^p$ 使 $Tf = \varphi f$. 设在 $A^p(M)$ 中, $\lim f_n = f$ 且 $Tf_n = g$. 由于 $A^p(M)$ 上赋值泛函是连续线泛函, 故对任何 $z \in \mathbb{D}$ 有

$$\begin{aligned} g(z) &= \lim(Tf_n)(z) \\ &= \lim \varphi(z) f_n(z) = \varphi(z) f(z). \end{aligned}$$

这表明 $g = Tf$. 由闭图像定理知 T 是有界的. 现对任何正整数 n, 有

$$\|\varphi^n\|_p = \|T^n e\|_p \leqslant \|T\|^n \|e\|_p,$$

其中 e 是值恒为 1 的全纯函数. 于是 $\|\varphi\|_{pn} \leqslant \|T\| \|e\|_p^{\frac{1}{p}}$. 据 §3.4 练习 2, 取极限得 $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|T\|$. 于是 $|\varphi| \leqslant \|T\|$. 由 φ 的连续性知 $|\varphi| \leqslant \|T\|$. 显然 $\|T\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$, 这得 $\|T\| = \|\varphi\|_\infty$.

开映射定理和 Banach 逆算子定理、范数等价定理和闭图像定理在不同场合各自发挥着重要作用. 但就本质而言, 这四个定理互为推论.

补子空间 如果 $L_1, \cdots, L_n$ 是线性空间 X 的线性子空间使 $i \neq j$ 时 $L_i \cap L_j = 0$, 将代数和 $\sum\limits_{i=1}^n L_i$ 记为 $\bigoplus\limits_{i=1}^n L_i$. 这称为 $L_1, \cdots, L_n$ 的 *代数直和*.

(1) 线性空间 X 的任何线性子空间 L 都是 *代数可补的*— 存在线性子空间 M 使 $X = L \oplus M$. 这相当于有个幂等算子 $P: X \to X$ 使 $\operatorname{ran} P = L$.

(2) Banach 空间 X 的闭线性子空间 L 是 *拓扑可补的*— 存在有界幂等算子 $P: X \to X$ 使 $\operatorname{ran} P = L$ 当且仅当 X 有闭线性子空间 M 使

$$X = L \oplus M.$$

(3) 赋范空间 X 中维数或余维数有限的闭线性子空间 L 是拓扑可补的. 所谓线性子空间 L 的余维数是指商空间 X/L 的维数.

熟知线性空间 $X_1, \cdots, X_n$ 的笛卡儿积 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 也是线性空间.

定理 5 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是线性空间 X 的线性子空间, 以下三个条件等价:

(1) X 是 $X_1, \cdots, X_n$ 的代数直和.

(2) 线性算子 $A: \prod\limits_{i=1}^n X_i \to X$ 可逆, 其中 $A(x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^n x_i$.

(3) 有相互直交的幂等算子组 $(P_i)_{i=1}^n$ 使 $P_i(X) = X_i$ 且 $\sum\limits_{i=1}^n P_i = I$.

习题

练习 1 当 X 是赋范空间时，证明数乘 $\mathbb{K}^{\times} \times X \to X, (a,x) \mapsto ax$ 是开映射，其中 $\mathbb{K}^{\times}$ 是 $\mathbb{K}$ 中非零数的全体.

练习 2 命 $X = C[0,1]$ 和它的子空间 $Y = \{f \in C^1[0,1] | f(0) = 0\}$. 命

$$(Af)(t) = \int_0^t f(s)ds, f \in X.$$

说明线性算子 $A: X \to Y$ 有界且可逆但 A^{-1} 无界.

练习 3 设线性空间 X 上有两个完备范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 证明以下条件等价：

(1) $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价范数.

(2) $(X, \|\cdot\|_1)$ 与 $(X, \|\cdot\|_2)$ 中共同的基本序列在两个空间中极限一致.

(3) $(X, \|\cdot\|_2)$ 中强收敛的序列在 $(X, \|\cdot\|_1)$ 中弱收敛且两个极限一数.

练习 4 命 $f(x,y) = (y,x)$, 证明 $f: X \times Y \to Y \times X$ 是同胚. 在 X 和 Y 是赋范空间时，f 是拓扑同构.

练习 5 证明：闭图像定理 $\Rightarrow$逆算子原理 $\Rightarrow$开映射原理.

练习 6 设 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ 而线性泛函 $\varphi: L^p(M,\mu) \to \mathbb{C}$ 是正的 — (几乎处处) 非负的 $f \in L^p(M,\mu)$ 都使 $\varphi(f) \geqslant 0$, 证明 φ 是连续的.

练习 7 设线性算子 $T: L^{p_1}(M,\mu) \to L^{p_2}(M,\mu)$ 满足条件：(几乎处处) 非负的 $f \in L^{p_1}(M,\mu)$ 使 $T(f)$ 也 (几乎处处) 非负. 试证明 T 是有界的.

练习 8 证明：维数相同的有限维赋范空间 X 和 Y 都拓扑同构.

练习 9 设 X 与 Y 是 $\mathbf{c}_0$ 中如下定义的闭线性子空间：

$$X = \{x \in \mathbf{c}_0 | \forall i \geqslant 1 : x_{2i} = 2ix_{2i-1}\},$$

$$Y = \{y \in \mathbf{c}_0 | \forall j \geqslant 1 : y_{2j-1} = 0\}.$$

说明 $X + Y$ 是 $\mathbf{c}_0$ 中不闭的稠密集.

以上练习说明了两个闭线性子空间之和不必是闭线性子空间.

练习 10 设 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是赋范空间 X 中序列且 X 中每个向量 x 对应唯一数列 $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ 使级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)e_i$ 的 Cauchy 和为 x, 证明 (e_n) 是线性无关的而 (f_n) 是线性无关的线性泛函序列恒使 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$.

练习 11 设 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 中序列. 证明以下条件等价:

(1) X 中每个向量 x 对应唯一系数列 $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ 使级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)e_i$ 的 Cauchy 和为 x. 此时 f_n 都是连续线性泛函, 称 (e_n) 是 X 的 Schauder 基.

(2) X 中序列 (e_n) 线性无关且 X 上有强算子逼近恒等算子的有界幂等算子序列 (P_n) 使 $i \leqslant n$ 时, $P_n e_i = e_i$; 而 $i > n$ 时, $P_n e_i = 0$. 此时 X 上有个等价范数 $\|\cdot\|'$ 使 $\|x\|' = \sup\{\|P_n x\| : n \geqslant 1\}$.

(3) X 为 $\{e_n | n \geqslant 1\}$ 的闭线性包 (从而 X 可分), 进而有常数 c 使 (a_n) 是数列且 $n \leqslant m$ 时, $\|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i\| \leqslant c\|\sum\limits_{i=1}^{m} a_i e_i\|$.

练习 12 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时, l^p 具 Schauder 基 $\{e_n | n \geqslant 1\}$, 其中 e_n 是第 n 项为 1 其他项为 0 的数列.

练习 13 空间 $C[0,1]$ 是否有个 Schauder 基 $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ 使 $e_n(t) = t^n$.

练习 14(Mazur 引理) 设 X 是无限维 Banach 空间而 L 是其有限维子空间. 设 $0 < c < 1$, 则 X 中有个单位向量 x 使 $y \in L$ 且 $a \in \mathbb{K}$ 时,

$$\|y\| \leqslant (1+c)\|y + ax\|.$$

练习 15 证明: 无限维 Banach 空间 X 有个具 Schauder 基的闭线性子空间.

练习 16 证明以下结论:

(1) 对于正整数 n, 有唯一非负整数对 (k,i) 使 $i < 2^k$ 且 $n = 2^k + i$. 如果 (l,j) 也是非负整数对使 $0 \leqslant j < 2^l$ 且 $m = 2^l + j$, 证明 $n < m$ 当且仅当 $k < l$ 或 $k = l$ 但 $i < j$.

(2) 命 n 和 (k,i) 同 (1), 而 f_n 是 $(0,1]$ 的子区间 $(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}]$ 的特征函数. 设 $E = \operatorname{span}\{f_n | n \in \mathbb{Z}_+\}$ 而 $1 \leqslant p < +\infty$, 则 E 稠于 $L^p(0,1]$.

(3) 命 $e_1 = f_1$ 而 $e_{2^k+i} = f_{2^k+2i-2} - f_{2^k+2i-1}$, 其中 (k,i) 是正整数对使 $i \leqslant 2^{k-1}$, 则所谓的 Haar 系 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $L^p(0,1]$ 的 Schauder 基.

(4) 当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时, 命 $g_1(t) = 1$ 而 $g_n(t) = \int\limits_0^1 e_{n-1}(s)ds$, 证明所谓的 Schauder 系 $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[0,1]$ 的 Schauder 基.

练习 17 设 $A: X \to Y$ 是赋范空间之间有界的有限秩算子, 证明 $X/\ker A$ 与 $\operatorname{ran} A$ 拓扑同构.

练习 18 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是线性空间 X 上的范数，证明 $\|\cdot\|_1$ 弱于 $\|\cdot\|_2$ 当且仅当恒等算子 $I:(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$ 是有界线性算子.

练习 19 设 $A:X\to Y$ 是赋范空间之间的线性算子使 $g\in Y^*$ 时 gA 是 X 上连续线性泛函，证明 A 有界.

练习 20 设 $1\leqslant p<+\infty$, 证明线性算子 $A:L^p(M,\mu)\to L^p(M,\mu)$ 有界当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$ 时 (Af_n) 依测度收敛于 Af.

练习 21 找个 Banach 空间之间有界线性算子 $A:X\to Y$ 使其值域不闭.

练习 22(Banach 空间的第一同构定理) 设 $A:X\to Y$ 是 Banach 空间有闭值域的有界线性算子，则 $X/\ker A$ 与 $\operatorname{ran}A$ 拓扑同构.

练习 23(Banach-Mazur, 1933) 设 X 是可分 Banach 空间，则 l^1 有个闭线性子空间 M 使 l^1/M 与 X 拓扑同构.

练习 24 设 L 是赋范空间 X 的闭线性子空间而 $\pi:X\to X/L$ 是自然投影，证明共轭算子 $\pi^*:(X/L)^*\to X^*$ 是保范算子且 $\operatorname{ran}\pi^*=L^\perp$. 进而证明：

(1) 空间 X 完备当且仅当 L 与 X/L 都完备.

(2) 空间 X 可分当且仅当 L 与 X/L 都可分.

(3) 空间 X 自反当且仅当 L 与 X/L 都自反.

(4) 空间 X 有限维当且仅当 L 与 X/L 都有限维.

一般地，与赋范空间 X 有关的性质 P 称为三空间性质是指：若 L 为 X 的闭线性子空间，则 X 有性质 P 当且仅当 L 与 X/L 有性质 P.

练习 25 赋范空间之间有闭核空间的有限秩算子 $A:X\to Y$ 连续且有闭值域. 此时 X 完备 (可分或自反) 当且仅当 $\ker A$ 完备 (可分或自反).

练习 26 设 X 和 Y 是赋范空间而 L 是 X 的闭线性子空间使 X/L 是有限维的，证明任何有界线性算子 $A:L\to Y$ 有个连续线性延拓 $B:X\to Y$.

练习 27 设 X 是 Banach 空间，证明以下条件等价：

(1) 当 Y 是 Banach 空间且 X 是其闭线性子空间时，有个有界幂等算子 $P:Y\to Y$ 使 $P(Y)=X$. 此时称 X 是内射 Banach 空间.

(2) 当 Y 是 Banach 空间且 $J:X\to Y$ 是下有界的有界线性算子时，有个有界线性算子 $Q:Y\to X$ 使 QJ 为 X 上有恒等算子.

(3) 当 Y 和 Z 是 Banach 空间且 Y 以 X 为子空间时，任何有界线性算子 $A:X\to Z$ 都有连续线性延拓 $B:Y\to Z$.

(4) 当 Y 和 Z 是 Banach 空间且 Y 以 Z 为子空间时，任何有界线性算子 $A:Z\to X$ 都有连续线性延拓 $B:Y\to X$.

练习 28 设 X 是赋范空间，证明以下条件等价：

(1) 当 Y 是赋范空间而 Z 是 Y 的子空间时，任何有界线性算子 $A: Z \to X$ 都有连续线性延拓 $B: Y \to X$. 此时 X 是内射 Banach 空间.

(2) 任何赋范空间 Z 中与 X 拓扑同构的子空间在 Z 中都拓扑可补.

(3) 任何 $l^\infty(E)$ 中与 X 拓扑同构的子空间在 $l^\infty(E)$ 中拓扑可补.

练习 29 设 X 是 Banach 空间，常数 $c \geqslant 1$. 以下条件等价：

(1) 当 Y 是以 X 为闭线性子空间的 Banach 空间时，存在有界幂等算子 $P: Y \to Y$ 使 $P(Y) = X$ 且 $\|P\| \leqslant c$.

(2) 当 Y 是以 X 为闭线性子空间的 Banach 空间时，有界线性算子 $A: X \to Z$ 都有线性延拓 $B: Y \to Z$ 使 $\|B\| \leqslant c\|A\|$.

(3) 当 Y 和 Z 是 Banach 空间且 Y 以 Z 为子空间时，有界线性算子 $A: X \to Z$ 有线性延拓 $B: Y \to Z$ 使 $\|B\| \leqslant c\|A\|$.

* **练习 30** 设 $(e_i)_J$ 和 $(f_i)_J$ 是 Banach 空间 X 的双正交系：$\{e_i | i \in J\} \subset X$ 且 $\{f_i | i \in J\} \subset X^*$ 恒使 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$.

(1) 设 $x \in X$ 且 F 取遍 J 的有限子集时 $\sup\limits_F \|\sum\limits_{i \in F} f_i(x) e_i\| < +\infty$, 证明对任何 $x \in \overline{\operatorname{span}}_{i \in J}\, e_i$ 成立 $x = \sum\limits_{i \in J} f_i(x) e_i$.

(2) 设 $f \in X^*$ 且 F 取遍 J 的有限子集时 $\sup\limits_F \|\sum\limits_{i \in F} f(e_i) f_i\| < +\infty$, 证明对任何 $f \in \overline{\operatorname{span}}_{i \in J}\, f_i$ 成立 $f = \sum\limits_{i \in J} f(e_i) f_i$.

§6.6 凸集与超平面

设 f 是线性空间 X 上非零实线性泛函. 对于实常数 b, 水平集 $(f = b)$ 即 $\{x | f(x) = b\}$ 称为 X 中一个超平面. 如 $\ker f$ 是一个超平面. 设 $f(x_0) = 1$, 则 $(f = b) = bx_0 + \ker f$. 这是 $\ker f$ 的平移.

Minkowski 泛函 设线性空间 X 中包含原点的凸集 E 是吸收的— 对任何 $x \in X$, 有非负实数 t 使 $x \in tE$. 此种 t 的下确界记为 $p_E(x)$. 称 $p_E: X \to \mathbb{R}$ 为 E 的 Minkowski 泛函(可简记为 p). 它满足以下性质：

(1) 非负性： $0 \leqslant p_E(x) < +\infty$ 且 $p(0) = 0$.

(2) 正齐次性： $p_E(tx) = tp_E(x); t > 0, x \in X$.

(3) 次可加性： $p_E(x + y) \leqslant p_E(x) + p_E(y); x, y \in X$.

(4) 当 $r > 0$ 时， $(p_E < r) \subseteq rE \subseteq (p_E \leqslant r)$.

如果 E 还是均衡集: $|c| \leqslant 1$ 蕴含 $cE \subseteq E$, 则

(5) 齐次性： $p_E(ax) = |a| p_E(x); a \in \mathbb{K}, x \in X$.

例 1 设 X 是赋范空间而 $r>0$, 则 $(X)_r$ 与 $[X]_r$ 是均衡吸收凸集, 它们有相同的 Minkowski 泛函 $p(x)=\|x\|/r$.

复平面上的"超平面"是一维的线性流形或者直线. 复平面上两个不交的凸集 (如圆盘) 可被一条直线分开. 这个事实可推广成如下结论.

定理 1(凸集分离定理) 设 A 和 B 是赋范空间 X 中不交的凸集.

(1) 设 A 有内点, 则有非零 $f\in X^*$ 使 $\sup\operatorname{re} f(A)\leqslant\inf\operatorname{re} f(B)$.

(2) 设 $d(A,B)>0$, 则有 $f\in X^*$ 使 $\sup\operatorname{re} f(A)<\inf\operatorname{re} f(B)$.

这里 $\operatorname{re} f$ 表示 f 的实部, 它是实线性泛函. 当 X 本身是实空间时, $\operatorname{re} f=f$. 另外, 定理 1(1) 中有内点的条件不能省略. 如取 $L^2[0,1]$ 的凸集

$$E_c=\{f\in C[0,1]|f(0)=c\}.$$

易说明 E_c 在 $L^2[0,1]$ 中稠密但无内点. 当 $a\neq b$ 时, E_a 与 E_b 不交. 当 φ 是 $L^2[0,1]$ 上非零连续线性泛函时, $\operatorname{re}\varphi(E_c)=\mathbb{R}$.

以上定理 1(2) 中 $d(A,B)>0$ 这个条件不能省. 为此取 $\mathbb{R}^2$ 的不交闭凸集 $A=\{(x,y)|x\geqslant 1, xy\geqslant 1\}$ 和 $B=\{(x,y)|y=0\}$, 则 $d(A,B)=0$. 若 $\mathbb{R}^2$ 上有线性泛函 $f:(x,y)\mapsto ax+by$ 使 $\sup f(A)<\inf f(B)$, 则 $a=0$(否则, $\inf f(B)=-\infty$). 此时 $f(B)=\{0\}$ 及 $f(A)=\{yb|y\geqslant 1/x, x\geqslant 1\}$, 因此 $b<0$. 但又有 $\sup f(A)=0$, 矛盾.

定理 2(S. Mazur) 设赋范空间 X 中 (x_i) 弱逼近 x, 则有强逼近 x 的序列 (y_n) 使每个 y_n 是 $\{x_i\}$ 的凸组合.

设凸集 E 中某点 x_0 不能表示成 E 中不同两点的凸组合 (相当于 x_0 不是 E 中不同两点的中点), 称 x_0 为 E 的 端点, 其全体记为 $\operatorname{ext} E$.

例 2 $\mathbf{c}_0$ 的单位闭球 B 无端点. 任取 $x\in B$, 取 n 使 $|x_n|<0.5$. 命

$$y^{\pm}=(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\pm 0.5,x_{n+1},x_{n+2},\cdots).$$

于是 $y^{\pm}$ 是 B 中不同两点使 $x=(y^++y^-)/2$. 这样 x 不是 B 的端点.

例 3 类似例 2 的方法可说明 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的单位闭球也无端点.

例 4 设 $1\leqslant p<+\infty$, 则 $L^p(M,\mu)$ 中单位向量 f 都是单位闭球 B 的端点. 为此, 设 $g,h\in B$ 且 $0<t<1$ 使 $f=tg+(1-t)h$. 于是

$$\|f\|_p\leqslant\|tg\|_p+\|(1-t)h\|_p=1.$$

这样上式取等号, 因此 $tg/\|tg\|_p=(1-t)h/\|(1-t)h\|_p$. 换言之, $g=h$.

例 5 以 B 记 $L^\infty(M,\mu)$ 中单位闭球. 固定 $f\in B$, 则 f 是 B 的端点当且仅当 $|f|=1$(这是几乎处处相等的意思).

必要性: 当 $0<t<1$ 时, 命 h 是 $(|f|<t)$ 的特征函数及 $g_\pm=f\pm(1-t)h$, 则 $\|g_\pm\|_\infty\leqslant 1$ 且 $f=(g_++g_-)/2$, 从而 $g_+\doteq g_-$. 这样 $h\doteq 0$. 即 $\mu(|f|<t)=0$. 于是 $\mu(|f|<1)=0$ 源自下式

$$(|f|<1)=\bigcup\{(|f|<2^{-n})|n\geqslant 1\}.$$

充分性: 设 $g,h\in B$ 及 $0<t<1$ 使 $f=tg+(1-t)h$, 则

$$1\doteq|f|\dot{\leqslant}|tg|+|(1-t)h|\dot{\leqslant}1.$$

这样上式几乎处处取等号. 因此 g 与 h 几乎处处同号且 $|g|\doteq|h|$, 从而 $f=g=h$. 这样 f 是端点.

例 6 c 中单位闭球 B 中点 x 是 B 的端点当且仅当诸 $|x_i|=1$.

一般地, 加上紧性条件后就能保证端点足够多.

定理 3(Krein-Milman) 设 E 是局部凸空间 (如赋范空间) 中凸紧集, 则 E 有端点且 E 是其端点集的闭凸包: $E=\overline{\mathrm{cov}}\,\mathrm{ext}\,E$.

习 题

练习 1 设 E 是 X 中的吸收凸闭集而 p 是其 Minkowski 泛函. 证明:

(1) $p:X\to\mathbb{R}$ 下半连续且 $E=(p\leqslant 1)$.

(2) p 连续当且仅当 E 是原点的邻域.

(3) X 是第二纲空间时, p 是连续的 (从而 E 是原点的一个邻域).

练习 2 证明: 赋范空间 X 的凸集 E 是闭集当且仅当它对弱极限封闭.

练习 3 设 f 是自反空间 X 上连续线性泛函, 试证明 $\mathrm{re}\,f$ 限制在 X 的任何有界凸闭集 M 上都能达到最大值.

练习 4 设 M 是自反空间 X 的凸闭集, 证明 M 对原点有最佳逼近.

练习 5 设 E 和 U 分别是赋范空间 X 中有界凸开集和单位开球, 证明有同胚 $f:X\to X$ 使 $f(E)=U$.

练习 6 设 E 是线性空间 X 中凸集. 任取函数 $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$. 证明:

(1) f 是 下凸函数— 当 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 且 $x, y \in E$ 时,

$$f(sx + (1-s)y) \leqslant sf(x) + (1-s)f(y)$$

当且仅当 $t_i \geqslant 0$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ 且 $x_i \in E$ 时

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

此时 f 是 拟下凸函数— 任何实数 c 使 $(f \leqslant c)$ 是凸集.

(2) f 是上凸函数 — 当 $0 \leqslant s \leqslant 1$ 且 $x, y \in E$ 时,

$$f(sx + (1-s)y) \geqslant sf(x) + (1-s)f(y)$$

当且仅当 $t_i \geqslant 0$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ 且 $x_i \in E$ 时

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \geqslant t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

此时 f 是 拟上凸函数— 任何实数 c 使 $(f \geqslant c)$ 是凸集.

练习 7 设 E 是赋范空间 X 中凸开集. 设 $f: E \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

证明 f 上半连续当且仅当 f 局部上有界 — 对任何 $x_0 \in E$ 有个 $r > 0$ 使

$$\sup\{f(x) : \|x - x_0\| < r\} < +\infty.$$

练习 8 设 E 是赋范空间 X 的子集. 设函数 $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是弱序列上半连续的 — 在 E 中 (x_n) 弱逼近 x 时, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n) \leqslant f(x)$. 证明 f 是上半连续函数.

练习 9 设 E 是赋范空间 X 的子集. 设函数 $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是弱序列下半连续的 — 在 E 中 (x_n) 弱逼近 x 时, $f(x) \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n)$. 证明 f 是下半连续函数.

* **练习 10** 设 E 是赋范空间 X 的凸闭集, $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ 下半连续且拟下凸, 证明 f 弱下半连续: 当 $x_0 \in E$ 且 E 中 x 弱逼近 x_0 时, $f(x_0) \leqslant \underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$.

* **练习 11** 设 E 是赋范空间 X 的凸闭集. 如果 $f: E \to \overline{\mathbb{R}}$ 是上半连续的拟上凸函数, 证明 f 弱上半连续: 当 $x_0 \in E$ 且在 E 中 x 弱逼近 x_0 时, $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0)$.

练习 12(Zabreĭko 引理) 设 X 是 Banach 空间而半范数 $p: X \to \mathbb{R}$ 是可列次可加的— 当 X 中级数 $\sum\limits_n x_n$ 有 Cauchy 和时 $p(\sum\limits_n x_n) \leqslant \sum\limits_n p(x_n)$, 则 p 是连续的.

练习 13 用练习 11 证明开映射定理.

练习 14 设 L 是赋范空间 X 的自反子空间，证明 L 中有界序列 (x_n) 必有弱收敛的子列，其弱极限在 L 中. 进而 L 对任何 $x \in X$ 的最佳逼近存在.

练习 15 证明：复 Banach 空间 X 自反当且仅当它作为实 Banach 空间时自反.

练习 16 设 S 是赋范空间 X 的非空子集，证明：

(1) $\operatorname{diam} S = \operatorname{diam} \overline{\operatorname{cov}}\, S$.

(2) $x \in X$ 时， $d(x, S) \leqslant d(x, \overline{\operatorname{cov}}\, S) + \operatorname{diam} S$.

请将下题与闭集套定理相比较.

练习 17 赋范空间 X 是完备的当且仅当 X 中直径趋向零的闭凸集套有公共交点.

练习 18 度量空间 (X, d) 是完备的当且仅当 X 中直径趋向零的子集套有公共接触点. 特别地，赋范空间是完备的当且仅当其中直径趋向零的凸集套有公共接触点.

* **练习 19** 设 X 是赋范空间，证明以下条件等价：

(1) X 是自反空间.

(2) X 中可分的闭线性子空间都自反.

(3) X 中每个有界序列 (x_n) 都有弱收敛子列.

(4) X 中每个有界凸闭集套 (E_n) 都有公共交点.

* **练习 20(R. C. James)** 设 X 是 Banach 空间. 以下条件等价：

(1) 空间 X 不是自反的.

(2) 若 $0 < c < 1$, 则 X 中有单位向量序列 (x_n) 且 X 上有模 1 泛函序列 (f_n) 使 $i \leqslant j$ 时 $\operatorname{re} f_i(x_j) \geqslant c$, 而 $i > j$ 时 $\operatorname{re} f_i(x_j) = 0$.

(3) 有个数 c 使 $0 < c < 1$ 且 (2) 中的结论成立.

(4) 若 $0 < c < 1$, 则 X 中有单位向量序列 (x_n) 使

$$d(\operatorname*{cov}_{i \leqslant n} x_i, \operatorname*{cov}_{i > n} x_i) \geqslant c : n = 1, 2, \cdots.$$

(5) 有个数 c 使 $0 < c < 1$ 且 (4) 中的结论成立.

练习 21 说明以下空间不自反: $C[0,1]$ 和 l^1, l^∞ 和 $A(\mathbb{D})$(见 §5.5 练习 8).

练习 22 在 l^1 中找个序列使其任何子列都不弱收敛.

练习 23 设 X 是自反 Banach 空间, 证明:

(1) X 中无交的凸闭集 A 和 B 中一个有界时,

$$c := \inf\{\|x-y\| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

(2) X 中任何凸闭集 E 对原点有最佳逼近 (即 E 有个点与原点最近).

(3) X 的可分闭线性子空间 L 上的连续线性泛函 f 都使 $\{x \in L | f(x) = \|f\|\}$ 有个点与原点最近.

练习 24 设 X 是可分赋范空间 X 而 $M = \{f \in X^* : \|f\| \leqslant 1\}$.

(1) 在 M 上定义度量 d 使 (M,d) 中收敛就是弱 * 收敛.

(2) 证明 (M,d) 为紧空间并作等距算子 $A : X \to C(M)$.

(3) 作等距算子 $B : C(M) \to C(K)$ 和 $E : C(K) \to C[0,1]$, 其中 K 是 Cantor 集.

(4) 基于 (2) 和 (3), 可得出什么结论?

练习 25 说明 l^∞ 中自反的闭线性子空间 X 都可分.

练习 26 证明 Banach 空间 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{c}_0$ 拓扑同构但不等距同构.

练习 27 举例说明不等距同构的 Banach 空间可有等距同构的共轭空间.

练习 28 证明可分度量空间 X 可等距嵌入至 $C[0,1]$ 中.

练习 29 设赋范空间 X 的凸集 E 有内点. 当 x_0 是 E 的边界点时, 有 $f \in X^*$ 使超平面 $\{x | \operatorname{re} f(x) = \operatorname{re} f(x_0)\}$ 与 E 在 x_0相切, 即

$$\operatorname{re} f(x) \leqslant \operatorname{re} f(x_0) : x \in E.$$

练习 30 设 E 是线性空间 X 的的非空子集. 称 x 是 E 的代数内点是指对于 X 中任何非零向量 u, 存在 $r > 0$ 使 $\{x + tu | 0 \leqslant t < r\} \subseteq E$.

设 E 是吸收凸集, 证明 $p_E(x) < 1$ 当且仅当 x 是 E 的代数内点.

第 7 章

Hilbert 空间上的几何与算子

Hilbert 在讨论积分方程时用到了今天称之为的 Hilbert 空间. 这种空间比一般赋范空间令人满意的地方在于其中任何两个向量都有夹角, 从而可将 Euclid 几何中的许多结论移植过来.

§7.1 内积空间

内积空间是 Euclid 空间的最直接推广, 它保留了向量夹角这一几何量.

内积 设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间. 如果泛函 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{K}$ 满足:

(1) 对第一变元的线性: $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$;

(2) 共轭对称性: $\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$[若 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, 则 $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$];

(3) 正定性: $\langle x,x\rangle \geqslant 0$. 若 $\langle x,x\rangle = 0$, 则 $x=0$;

则称 $\langle x,y\rangle$ 为 x 与 y 的内积而 X 为一个内积空间. 可将 (1) 换成 (4) 如下:

(4) 对第二变元的共轭线性: $\langle x,ay+bz\rangle = \overline{a}\langle x,y\rangle + \overline{b}\langle x,z\rangle$.

(5) 重要等式: $\sum\limits_{i,j\leqslant n}\langle x_i,x_j\rangle a_i\overline{a_j} = \langle\sum\limits_{i\leqslant n}a_ix_i,\sum\limits_{i\leqslant n}a_ix_i\rangle \geqslant 0$.

(6) 内积空间 X 中任何向量组 $x_1,\cdots,x_n$ 的 Gram 矩阵

$$\begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \cdots & \langle x_2,x_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \langle x_n,x_2\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle \end{pmatrix}$$

是半正定阵. 它是正定的当且仅当该向量组线性无关.

(7) 内积空间 X 中任何向量 x 与 y 满足 Schwarz 不等式

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle,$$

其中等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.

平方可积函数空间 $L^2(M,\mu)$ 是内积空间: $\langle f,g\rangle = \int\limits_M f\overline{g}d\mu$. 其特例有平方可和数列空间 l^2, Euclid 空间 $\mathbb{K}^n$(内积为 $\langle x,y\rangle = \sum\limits_i x_i\overline{y_i}$).

例 1 作 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f_i(x)=\exp(-ix)$. 作为 $L^2(0,+\infty)$ 的向量组, $f_1,\cdots,f_n$ 的 Gram 阵 $[1/(i+j)]_{n\times n}$ 是正定的. 为此说明它们线性无关即可. 设线性组合 $a_1f_1+\cdots+a_nf_n=0$, 则 $0<t<1$ 时, $a_1t+\cdots+a_nt^n$ 几乎处处为 0. 故系数 a_i 全为 0.

内积空间 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 按 $\|\cdot\|$ 成为赋范空间, 其中 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

定理 1(Jordan-von Neumann) 线性空间 X 上范数 $\|\cdot\|$ 是由内积诱导的当且仅当 $\|\cdot\|$ 适合 *平行四边形公式*: 当 $x,y\in X$ 时,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

此时, 实空间的内积确定于以下 *极化恒等式*:

$$\langle x,y\rangle=\frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}.$$

复空间的内积确定于以下 *极化恒等式*:

$$\langle x,y\rangle=\frac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}+\sqrt{-1}\frac{\|x+\sqrt{-1}y\|^2-\|x-\sqrt{-1}y\|^2}{4}.$$

下面介绍两个向量的夹角这一重要几何量.

夹角与直交 内积空间 X 的主要几何特点是两个非零向量 x 和 y 有夹角

$$\angle(x,y)=\arccos(\mathrm{re}\langle x,y\rangle/\|x\|\|y\|)=\frac{\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2}{2\|x\|\|y\|}.$$

如复平面 $\mathbb{C}$ 上, $\sqrt{-1}$ 与 1 夹角是 $\pi/2$. 内积 $\langle\sqrt{-1},1\rangle=\sqrt{-1}$ 的实部为零.

(1) 余弦定理: $\mathrm{re}\langle x,y\rangle=\|x\|\|y\|\cos\angle(x,y)$

(2) 勾股定理: x 与 y 的夹角是 $\pi/2$ 当且仅当 $\|x\|^2+\|y\|^2=\|x\pm y\|^2$.

(3) 在 $\langle x,y\rangle=0$ 时, 称 x 与 y *直交* 并记为 $x\perp y$. 非空子集 M 中的向量都与非空子集 N 中的向量直交时, 记 $M\perp N$, 此时 $M\cap N\subseteq\{0\}$.

(4) 相互直交的线性子空间 $L_1,\cdots,L_n$ 的代数和 L 称为 $L_1,\cdots,L_n$ 的 *直交和*, $L_1\oplus\cdots\oplus L_n$ 为 L 的 *直交分解*.

(5) 命 $f_y(x)=\langle x,y\rangle$, 得 X 上连续线性泛函 f_y 使 $\|f_y\|=\|y\|$.

(6) 子集 E 的 *直交补* $E^\perp=\{x\in X|\langle x,y\rangle=0,y\in E\}$ 是闭线性子空间.

(7) $0^{\perp} = X$ 而 $X^{\perp} = 0$.

(8) $E \subseteq F$ 时, $F^{\perp} \subseteq E^{\perp}$(直交补随子集的递增而递减).

(9) $\overline{\operatorname{span}} E \subseteq E^{\perp\perp}$ 且 $E^{\perp} = (\overline{\operatorname{span}} E)^{\perp}$.

(10) X 有直交分解 $X_1 \oplus X_2$ 当且仅当 $X_1^{\perp} = X_2$ 且 $X_2^{\perp} = X_1$.

(11) X 完备时, $X = \overline{\operatorname{span}} E$ 当且仅当 $E^{\perp} = 0$.

例 2 命 $L_{\pm} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) | f(-x) = \pm f(x)\}$. 任取 $f_{\pm} \in L_{\pm}$, 则 $f_+\overline{f_-}$ 是奇函数, 因此 $\langle f_+, f_- \rangle = 0$. 这样 $L_+ \perp L_-$. 每个 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 都形如 $f_+ + f_-$, 其中 $f_{\pm}(x) = (f(x) \pm f(-x))/2$. 因此 $L^2(\mathbb{R}) = L_+ \oplus L_-$.

定理 2(O. Nikodym, F. Riesz) 内积空间 X 中完备凸集 S 对任何 $x \in X$ 有唯一最佳逼近 x_0 且 S 对 x 的极小化序列 (x_n) 都收敛至 x_0.

引理 3 设 L 是内积空间 X 的线性子空间, $x \in X$ 且 $x_0 \in L$, 则 x_0 是 L 对 x 的最佳逼近当且仅当 $x - x_0 \perp L$. 此时称 x_0 是 x 在 L 上的 **直交投影**.

明显地, $x_0 + (x - x_0)$ 是 x 相对于 $L \oplus L^{\perp}$ 的直交分解, 这得以下定理.

定理 4(投影定理) 设 L 是内积空间 X 的完备线性子空间. 任何 $x \in X$ 在 L 上有唯一直交投影 (因此 X 有直交分解 $X = L \oplus L^{\perp}$).

可见, Hilbert 空间中闭线性子空间都是拓扑可补的. 一般而言, 闭线性子空间都拓扑可补的 Banach 空间与某个 Hilbert 空间拓扑同构.

若要考察内积空间 X 上连续线性泛函 f, 先将 f 保范延拓至 X 的完备化 $\tilde{X}$ 上, 然后取唯一 $y \in \tilde{X}$ 使 $f(x) = \langle x, y \rangle$ 恒成立.

最小二乘法 设 X 是内积空间. 为求 X 中向量 x 在有限维线性子空间 L 上的直交投影, 取 L 中向量组 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 使任何 $x_0 \in L$ 有唯一线性组合 $x_0 = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. 于是 x_0 为 x 在 L 上的直交投影等价于 $\langle x - x_0, e_i \rangle = 0 : 1 \leqslant i \leqslant n$. 展开这些式子得

$$
\begin{aligned}
a_1\langle e_1, e_1 \rangle + \cdots + a_n\langle e_n, e_1 \rangle &= \langle x, e_1 \rangle, \\
a_1\langle e_1, e_2 \rangle + \cdots + a_n\langle e_n, e_2 \rangle &= \langle x, e_2 \rangle, \\
&\cdots\cdots \\
a_1\langle e_1, e_n \rangle + \cdots + a_n\langle e_n, e_n \rangle &= \langle x, e_n \rangle.
\end{aligned}
$$

Cramer 阵 $[\langle e_i, e_j\rangle]_{n\times n}$ 可逆. 据 Cramer 法则求得诸系数:

$$a_i = \frac{\begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle x,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_1\rangle \\ \langle e_1,e_2\rangle & \cdots & \langle x,e_2\rangle & \cdots & \langle e_n,e_2\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle e_1,e_n\rangle & \cdots & \langle x,e_n\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_i,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_1\rangle \\ \langle e_1,e_2\rangle & \cdots & \langle e_i,e_2\rangle & \cdots & \langle e_n,e_2\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle e_1,e_n\rangle & \cdots & \langle e_i,e_n\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle \end{vmatrix}}.$$

习 题

练习 1 设 X 是内积空间, 证明内积 $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ 是 $X\times X$ 上连续函数, 其中 $X\times X$ 上取内积 $\langle (x,y),(x_1,y_1)\rangle = \langle x,x_1\rangle + \langle y,y_1\rangle$.

练习 2 设 X 是内积空间而 D 是其子集使 $\overline{\operatorname{span}}\, D = X$, 证明 X 中两个向量 x 与 x_1 相等当且仅当 $z\in D$ 时 $\langle x,z\rangle = \langle x_1,z\rangle$.

练习 3 对于一列内积空间 X_n, 作赋范空间

$$X = \{x=(x_n)|x_n\in X_n : \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 100^n\|x_n\|^2 < +\infty\}.$$

试规定 X 上内积使范数由内积诱导.

练习 4 试证明 $[1/\sqrt{i+j}]_{n\times n}$ 是正定阵.

练习 5 泛函 $f:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ 成为 $\mathbb{C}^n$ 上内积当且仅当有个 n 阶正定阵 A 恒使 $f(x,y)=\langle Ax,y\rangle$, 其中后者是 Euclid 内积.

练习 6 Banach 空间 $C[0,1]$ 与 l^3 上范数不能由内积诱导.

练习 7 设 S_i 是内积空间 X 的非空子集, 证明 $(\bigcup\limits_{i\in J} S_i)^\perp = \bigcap\limits_{i\in J} S_i^\perp$.

练习 8 使 $f(0)=f(1)=0$ 并且导函数平方可积的绝对连续函数 $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ 全体记为 H, 它按函数通常的线性运算和范数 $\|f\|=\|f'\|_2$ 成为赋范空间. 试证明 H 完备并且 $\varphi: H\to\mathbb{C}$ 是连续线性泛函当且仅当存在 $g\in H$ 恒使 $\varphi(f)=\int\limits_0^1 f'(t)g'(t)dt$. 此时 $\|\varphi\|=\|g\|$.

练习 9 在 $L^2[0,1]$ 中, 求 f 在 $E_n=\text{span}\{f_1,\cdots,f_n\}$ 上的直交投影, 其中 $f(x)=\exp x$ 而 $f_j(x)=\exp(2\pi j\sqrt{-1}x)$.

练习 10 以 $\text{tr}[a_{ij}]_{n\times n}$ 表示方阵 $[a_{ij}]_{n\times n}$ 的迹 — 其对角线上诸数之和 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$. 对于两个 $m\times n$ 阶矩阵 x 与 y, 命 $\langle x,y\rangle=\text{tr}(y^*x)$, 其中 y^* 表示对 x 取复共轭转置. 试证明 $m\times n$ 阶复阵全体 $M_{m\times n}$ 按 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 成为一个 Hilbert 空间.

练习 11 设有 $n+1$ 个数量 $x_0,x_1,\cdots,x_n$. 在 m 次观察中, 它们每次的观察值是 $x_0^{(j)},x_1^{(j)},\cdots,x_n^{(j)}$, $1\leqslant j\leqslant m$. 现在要求用 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合来近似表达 x_0. 如果用这些误差的平方和来作为衡量总误差的标准, 那么问题就归结为求系数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 使

$$\sum_{j\leqslant m}(x_0^{(j)}-\sum_{i\leqslant n}\alpha_i x_i^{(j)})^2=\inf_{\beta_1,\cdots,\beta_n}\sum_{j\leqslant m}(x_0^{(j)}-\sum_{i\leqslant n}\beta_i x_i^{(j)})^2.$$

作 $\mathbb{R}^m$ 中的向量 $u_i=(x_i^{(1)},\cdots,x_i^{(m)})$, $0\leqslant i\leqslant n$, 则上面的问题相当于求 α_i 使 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$ 与 u_0 的距离最小. 此时可用什么方法求解?

练习 12 试证明 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{T})$ 是 Banach 空间, 其中

$$H^p(\mathbb{T})=\{f\in L^p(\mathbb{T})|\int_{\mathbb{T}}f(z)z^n|dz|_1=0,n\in\mathbb{Z}_+\},$$

而 $|dz|_1$ 是 $\mathbb{T}$ 上孤长测度. 特别地, $H^2(\mathbb{T})$ 是 Hilbert 空间.

练习 13 设内积空间 X 中序列 (x_n) 弱收敛于 x 且 $(\|x_n\|)$ 收敛于 $\|x\|$, 证明 (x_n) 强收敛于 x.

练习 14 证明: Hilbert 空间 X 中序列 (x_n) 依范数收敛于 x_0 当且仅当 $(\widetilde{x_n})$ 一致收敛于 $\widetilde{x_0}$, 其中 $\tilde{x}$ 是单位球而 S 上的函数 $\tilde{x}(y)=\langle x,y\rangle$.

练习 15 用 Hilbert 空间上连续线性泛函的 F. Riesz 表示定理 (见 §6.2) 证明 Radon-Nikodym 定理 (见 §4.3).

练习 16 证明: 内积空间 X 是一致凸的和严格赋范的.

练习 17(Banach-Saks 定理) 设 $1\leqslant p<+\infty$ 且 $L^p(X,\mu)$ 中序列 (f_n) 弱收敛于 f, 则有子列 (f_{k_n}) 使算术平均序列 $(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f_{k_i}}{n})_{n=1}^{\infty}$ 平均收敛于 f. 试证明 $p=2$ 时的结论.

练习 18 (参考练习 17) 设内积空间 X 中序列 (x_n) 弱收敛于 x, 证明有子列 (x_{k_n}) 使算术平均序列 $(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_{k_i}}{n})_{n=1}^{\infty}$ 依范数收敛于 x.

练习 19 设 S 是 Hilbert 空间 X 的闭凸集. 将 $x\in H$ 在 S 上的最佳逼近记为 $f(x)$, 证明 $f:X\to S$ 是连续映射. 进而 $x\in S$ 时, $f(x)=x$.

§7.2 共轭算子

Hilbert 空间的自对偶性使得 Hilbert 空间之间有界线性算子的共轭易于讨论. 设 X 和 Y 是 Hilbert 空间, 将 $X\times Y$ 与 $Y\times X$ 作成 Hilbert 空间, 其内积分别如下

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = \langle x_1,x_2\rangle + \langle y_1,y_2\rangle,$$
$$\langle (y_1,x_1),(y_2,x_2)\rangle = \langle y_1,y_2\rangle + \langle x_1,x_2\rangle.$$

定理 1 Hilbert 空间之间的映射 $A:X\to Y$ 是有界线性算子当且仅当有 (唯一) 映射 $A^*:Y\to X$ 使 $x\in X$ 且 $y\in Y$ 时,

$$\langle Ax,y\rangle = \langle x,A^*y\rangle, \text{即} \langle (-Ax,x),(y,A^*y)\rangle = 0.$$

此时 A^* 也是有界线性算子, 称之为 A 的 共轭算子. 它们有以下性质:

(1) A 是 A^* 的共轭算子, 即 $A^{**}=A$(这源自定义).

(2) $X=\ker A\oplus\overline{\operatorname{ran}}\,A^*$ 且 $Y=\ker A^*\oplus\overline{\operatorname{ran}}\,A$.

(3) $\|A\|=\|A^*\|$ 且 $\|A^*A\|=\|A\|^2$.

(4) $(0:X\to Y)^*=(0:Y\to X)$, 此处两个 0 都代表零算子.

(5) $(I:X\to X)^*=(I:X\to X)$, 此处 I 代表恒等式.

(6) $(aA+bB)^*=\overline{a}A^*+\overline{b}B^*$.

(7) $(CA)^*=A^*C^*$, 其中 $A:X\to Y$ 而 $C:Y\to Z$.

例 1 设 (M,μ) 是全 σ- 有限测度空间. 任取 $K\in L^2(M\times M,\mu\times\mu)$, 命

$$(Af)(s)=\int_M K(s,t)f(t)dt : f\in L^2(M,\mu).$$

这得到映射 $A:L^2(M,\mu)\to L^2(M,\mu)$. 注意到

$$\int\left(\int K(s,t)f(t)dt\right)\overline{g(s)}ds=\int f(t)dt\overline{\int g(s)\overline{K(s,t)}ds},$$

这得 $(A^*g)(s)=\int_M g(t)\overline{K(t,s)}dt$. 此时, A 与 A^* 是 Fredholm 型积分算子的例子而 K 与 K^* 分别是它们的积分核, 其中 $K^*(s,t)=\overline{K(t,s)}$.

若将有界线性算子视为矩阵的推广, 则共轭算子就是共轭阵的推广.

例 2 命 $m_\varphi:L^2(M,\mu)\to L^2(M,\mu)$ 同 §6.2 例 6, 则 $m_\varphi^*=m_{\overline{\varphi}}$. 这是因为

$$\langle \varphi g,h\rangle=\langle g,\overline{\varphi}h\rangle=\int_M \varphi g\overline{h}d\mu.$$

酉算子 Hilbert 空间之间使 $U^*U = I : X \to X$ 而 $UU^* = I : Y \to Y$ 的有界线性算子 $U : X \to Y$ 称为 酉算子. 这即 $U^{-1} = U^*$, 也即 U 是满射且保持内积: $\langle Ux_1, Ux_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$. 它实现了 X 与 Y 的 酉同构.

(1) 酉算子是等距同构. 恒等算子是酉算子. 酉算子的逆算子是酉算子. 两个酉算子的复合是酉算子. 获得酉算子可用等距算子的保范延拓方法.

(2) 有对酉算子 $F_\pm : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 使 $f \in L^1 \cap L^2$ 时,

$$(F_\pm f)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp(\pm 2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)f(y)dy.$$

此时 F_- 与 F_+ 分别称为 L^2-Fourier 变换与逆变换. 它们互为共轭算子.

一般平方可积函数 f 的 L^2-Fourier(逆) 变换不能直接用以上公式定义, 因为此式中积分可能无意义. 为计算 $F_\pm f$, 当 $|x| \leqslant r$ 时, 命 $f_r(x) = f(x)$; 否则, 命 $f_r(x) = 0$. 这得 $f_r \in L^1 \cap L^2$ 使 $\lim\limits_{r\to\infty} \|f_r - f\|_2 = 0$, 从而 $\lim\limits_{r\to\infty} \|F_\pm f_r - Ff\|_2 = 0$. 因此有正无穷大量 (r_k) 使

$$F_\pm f(x) \doteq \lim_{k\to\infty} \int_{|y|\leqslant r_k} \exp(\pm 2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)f(y)dy.$$

例 3 对于函数 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, 命 $(Uf)(t) = f(\exp(\sqrt{-1}t))$, 这得区间 $[0, 2\pi)$ 上的函数 Uf. 我们将用 U 获得更多信息.

(1) U 保持函数的线性运算: $U(af + bg) = aUf + bUg$.

(2) U 保持函数的共轭运算: $U\overline{f} = \overline{Uf}$.

(3) U 保持函数的乘法运算: $U(fg) = (Uf)(Ug)$.

(4) n 是整数且 $e_n(z) = z^n$ 时, $(Ue_n)(t) = \exp(n\sqrt{-1}t)$.

(5) $f(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ 且只有有限项 a_k 非零当且仅当 Uf 是三角多项式.

此时也称 f 为三角多项式 (务请注意, 这里 $|z| = 1$).

(6) $U(A) = T$, 其中 $A = \mathrm{span}\{z^n | n \in \mathbb{T}\}$ 而 T 是三角多项式全体

$$\mathrm{span}\{\exp(n\sqrt{-1}\cdot) | n \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{span}\{\sin(n\cdot), \cos(n\cdot) | n \in \mathbb{N}\}.$$

(7) $1 \leqslant p < +\infty$ 时, $U : L^p(\mathbb{T}) \to L^p[0, 2\pi)$ 是等距同构. 首先, 对于 $f \in L^p(\mathbb{T})$ 作变量代换得

$$\int_{\mathbf{T}} |f(z)|^p |dz|_1 = \int_0^{2\pi} |f(\exp(\sqrt{-1}t))|^p dt.$$

其次, 当 $g \in L^p[0, 2\pi)$ 时, 命 $f(\exp(\sqrt{-1}t)) = g(t)$, 得 $f \in L^p(\mathbb{T})$ 使 $Uf = g$. 可见 U 是满的等距线性算子.

(8) $U: L^2(\mathbb{T}) \to L^2[0,2\pi)$ 是酉算子. 据 (7) 说明它它保持内积即可:

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}|dz|_1 = \int_0^{2\pi} f(\exp(\sqrt{-1}t))\overline{g(\exp\sqrt{-1}t))}dt.$$

(9) $U: C(\mathbb{T}) \to C_{2\pi}$ 是等距同构. 显然 $\|Uf\| = \|f\|$. 当 $g \in C_{2\pi}$ 时, 命 $f(z) = g(t)$, 其中 $z = \exp(\sqrt{-1}t)$, 则 $Uf = g$. 因此 U 是满射.

(10) $U: L^\infty(\mathbb{T}) \to L^\infty[0,2\pi)$ 是等距同构: $\|Uf\|_\infty = \|f\|_\infty$.

(11) $1 \leqslant p < +\infty$ 时, $L^p(\mathbb{T})$ 按 L^p- 范数有个稠密集 $\operatorname{span}\{z^n | n \in \mathbb{Z}\}$, 这个集合按最大模范数稠于 $C_{2\pi}$.

(12) $1 \leqslant p < +\infty$ 时, $L^p[0,2\pi)$ 按 L^p- 范数有个稠密集如下

$$\operatorname{span}\{\exp(n\sqrt{-1}\cdot) | n \in \mathbb{Z}\} = \operatorname{span}\{\sin(n\cdot), \cos(n\cdot) | n \in \mathbb{N}\}.$$

(13) $C_{2\pi}$ 按最大模范数有个稠密集如上.

据上例, $C(\mathbb{T})$ 可等同于 $C_{2\pi}$, 而 $L^p(\mathbb{T})$ 等同于 $L^p[0,2\pi)$.

例 4 设 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. 将 $[0,2\pi]$ 上函数限制在 $[0,2\pi), (0,2\pi]$ 及 $(0,2\pi)$ 上, $L^p[0,2\pi]$ 可等同于 $L^p[0,2\pi), L^p(0,2\pi]$ 及 $L^p(0,2\pi)$.

在例 2 中, $m_\varphi^* m_\varphi$ 与 $m_\varphi m_\varphi^*$ 等于 $m_{|\varphi|^2}$. 当 φ 是实函数时, $m_\varphi = m_\varphi^*$. 一般地, 使 $A^*A = AA^*$ 的有界线性算子 $A: H \to H$ 称为 正规算子. 使 $A^* = A$ 的有界线性算子 A 称为 自伴算子.

性质 2 设 H 是 Hilbert 空间而 $A: H \to H$ 是有界线性算子.

(1) H 是实空间且 A 是自伴算子时, A 满足 极化恒等式:

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \frac{\langle A(x + (-1)^k y), x + (-1)^k y\rangle}{4}.$$

(2) H 是复空间时, A 总满足 极化恒等式:

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{k=0}^{3} \sqrt{-1}^k \frac{\langle A(x + \sqrt{-1}^k y), x + \sqrt{-1}^k y\rangle}{4}.$$

此时 A 是自伴算子当且仅当 $\langle Ax, x\rangle$ 恒是实数.

(3) A 是正规算子当且仅当 $\|Ax\| = \|A^*x\|$ 恒成立. 此时, 对任何自然数 n 有 $\|A^n\| = \|A\|^n$. 进而 $\ker A = \ker A^*$ 且 $\overline{\operatorname{ran}} A = \overline{\operatorname{ran}} A^*$.

(4) A 是下有界的正规算子时, A 可逆且其逆算子有界.

(5) H 是复空间时, A 的 实部$\operatorname{re} A = (A + A^*)/2$ 与 虚部 $\operatorname{im} A = (A - A^*)/2\sqrt{-1}$ 都自伴使 $A = \operatorname{re} A + \sqrt{-1}\operatorname{im} A$ 及 $A^* = \operatorname{re} A - \sqrt{-1}\operatorname{im} A$. 进而

$$A^*A = (\operatorname{re} A)^2 + (\operatorname{im} A)^2 + \sqrt{-1}(\operatorname{re} A \operatorname{im} A - \operatorname{im} A \operatorname{re} A),$$
$$AA^* = (\operatorname{re} A)^2 + (\operatorname{im} A)^2 + \sqrt{-1}(\operatorname{im} A \operatorname{re} A - \operatorname{re} A \operatorname{im} A).$$

此时, A 是正规算子当且仅当 $\operatorname{re} A \operatorname{im} A = \operatorname{im} A \operatorname{re} A$ 当且仅当 $A^*A = (\operatorname{re} A)^2 + (\operatorname{im} A)^2$ 当且仅当 $AA^* = (\operatorname{re} A)^2 + (\operatorname{im} A)^2$.

(6) 自伴算子全体 $B(H)_{\mathrm{sa}}$ 按算子范数是实 Banach 空间. 它还自然地是偏序集: $A \leqslant B$ 表示 $x \in H$ 时, $\langle Ax, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle$.

(7) A 是自伴算子时, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|<1} |\langle Ax, x\rangle|$ 且 $\pm A \leqslant \|A\|I$.

(8) A 是正算子 (即 $A \geqslant 0$) 时, 对于 $x, y \in X$ 有 Schwarz 不等式

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle.$$

(9) A_1 与 A_2 是自伴算子时, $A_1 \leqslant A_2$ 当且仅当 $A_2 - A_1$ 是正算子. 此时 $BA_1B^* \leqslant BA_2B^*$, 其中 $B: H \to H_1$ 是有界线性算子.

零算子 0 与恒等算子 I 是正算子. 正算子是半正定阵的推广. 例 2 中当 $\varphi \geqslant 0$ 时, m_φ 是正算子; 当 $|\varphi| = 1$ 时, $m_\varphi^* m_\varphi = I$.

半双线性泛函 设 X 和 Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间. 称泛函 $f: X \times Y \to \mathbb{K}$ 为半双线性泛函是指它关于第一变量是线性的:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2, y) = a_1 f(x_1, y) + b_2 f(x_2, y)$$

且关于第二变量是共轭线性的:

$$f(x, b_1y_1 + b_2y_2) = \overline{b_1} f(x, y_1) + \overline{b_2} f(x, y_2).$$

(1) 恒使 $\overline{f(x,y)} = f(y, x)$ 的 $f: X \times X \to \mathbb{K}$ 称为 Hermite 泛函.

(2) 在 X 是复空间时, 半双线性泛函 $f: X \times X \to \mathbb{C}$ 满足极化恒等式

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{3} \sqrt{-1}^k \frac{f(x + \sqrt{-1}^k y, x + \sqrt{-1}^k y)}{4}.$$

此时, f 为 Hermite 泛函当且仅当 $f(x, x)$ 恒为实数.

(3) 在 X 为实空间时, 半双线性泛函 $f: X \times X \to \mathbb{C}$ 为 Hermite 泛函当且仅当 f 满足极化恒等式:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \frac{f(x + (-1)^k y, x + (-1)^k y)}{4}.$$

(4) 半双线性泛函 $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ 全体是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间.

(5) 在 X 和 Y 都是赋范空间时，以下条件等价：

(5a) 半双线性泛函 $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ 是连续的.

(5b) 有正实数 c 恒使 $|f(x,y)| \leqslant c\|x\|\|y\|$.

(5c) 范数 $\|f\|$ 有限，其中 $\|f\| = \sup\{|f(x,y)| : \|x\| < 1, \|y\| < 1\}$.

如命 $\varphi(f,g) = f(0)\overline{g(0)}$，得半双线性泛函 $\varphi : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{C}$ 使 $|\varphi(f,g)| \leqslant \|f\|\|g\|$. 进而，$\|\varphi\| = 1$.

定理 3 设 X 和 Y 是 [完备] 内积空间，则 $h : X \times Y \to \mathbb{K}$ 是 [有界] 半双线性的当且仅当有唯一 [有界] 线性算子 $A : X \to Y$ 恒使 $h(x,y) = \langle Ax, y\rangle$. 此时，$\|h\| = \|A\|$[在 $X = Y$ 时，h 是 Hermite 泛函当且仅当 A 是自伴算子].

这定理表明在 Hilbert 空间范畴内讨论有界半双线性泛函相当于讨论有界线性算子，而 Hermite 泛函相当于自伴算子.

二次泛函 称 $g : X \to \mathbb{K}$ 为二次泛函是指它满足二次齐性：

$$g(ax) = |a|^2 g(x) : a \in \mathbb{K}, x \in X$$

和平行四边形公式：当 $x, y \in X$ 时，

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y).$$

(1) 当 X 是复空间时，g 诱导了个半双线性泛函 $f : X \times X \to \mathbb{C}$ 使

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \frac{g(x + \mathrm{i}^k y)}{4}.$$

(2) 当 X 是实空间时，g 诱导了个半双线性泛函 $f : X \times X \to \mathbb{R}$ 使

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \frac{g(x + (-1)^k y)}{4}.$$

(3) 当 X 是赋范空间时，g 连续当且仅当以上 f 连续. 此时称 g 有界.

这表明讨论二次泛函相当于讨论半双线性泛函，据此和定理 3 得以下结论.

定理 4 设 X 是 [完备] 内积空间，则 $g : X \to \mathbb{K}$ 是 [有界] 二次泛函当且仅当有唯一 [有界] 线性算子 $A : X \to X$ 恒使 $g(x) = \langle Ax, x\rangle$[此时，$g$ 是实二次泛函当且仅当 A 是自伴算子].

称半双线性泛函 $f : X \times X \to \mathbb{K}$ 下有界是指有正实数 c 使

$$|f(x,x)| \geqslant c\|x\|^2 : x \in X.$$

定理 5(Lax-Milgram) 设 f 是 Hilbert 空间 H 上有界且下有界的半双线性泛函，则有可逆有界线性算子 $A : H \to H$ 使 $\|A^{-1}\| \leqslant 1/c$ 且 $f(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ 恒成立.

习 题

练习 1 设线性算子 $A: l^2 \to l^2$ 为无限阶复值矩阵 $[a_{ij}]_{i,j\geqslant 1}$ 所诱导：$y = Ax$ 当且仅当 y 的每个分量 $y_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}x_j$(这是 Cauchy 和). 这写成以下形式：

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

证明：(1) 当 $n = 1, 2, \cdots$ 时，$|a_{n1}|^2 + |a_{n2}|^2 + \cdots < \infty$.

(2) A 是有界线性算子当且仅当存在常数 $c \geqslant 0$ 使 m 和 n 是正整数时

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right|^2 \leqslant c \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2.$$

(3) 如果 $\sum_{i,j\geqslant 1} |a_{ij}|^2 < +\infty$, 则 $\|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j\geqslant 1} |a_{ij}|^2}$.

练习 2(Schur 判别法) 设 $[a_{ij}]_{i,j\geqslant 1}$ 是个无限阶非负数值矩阵而 (p_i) 是正数列. 设非负实数 b 和 c 使 $\sum_i a_{ij}p_i \leqslant bp_j$ 且 $\sum_j a_{ij}p_j \leqslant cp_i$ 恒对，则 $[a_{ij}]$ 诱导一个线性算子 $A: l^2 \to l^2$ 使 $\|A\|^2 \leqslant bc$.

练习 3 设 $A: l^2 \to l^2$ 是由无限阶矩阵 $[\frac{1}{i+j}]_{i,j\geqslant 1}$ 所诱导的线性算子，证明 A 是正算子且 $\|A\| \leqslant \pi$.

练习 4 设 x_0 是内积空间 X 中非零向量. 命 $Ux = x_0 + x$, 说明映射 $U: X \to X$ 是等距同胚但非线性算子.

练习 5 设 X 是复线性空间 (也视为实线性空间), 证明泛函 $\langle\cdot|\cdot\rangle: X \times X \to \mathbb{C}$ 是复内积当且仅当有个实内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle: X \times X \to \mathbb{R}$ 使恒成立

$$\langle x|y\rangle = \langle x, y\rangle + \sqrt{-1}\langle x, \sqrt{-1}y\rangle.$$

此时复内积与实内积诱导相同的范数和相同的向量夹角.

练习 6 设 X 和 Y 是实内积空间. 设等距映射 $U: X \to Y$ 使 $U0 = 0$, 证明 U 是线性算子.

练习 7 设 X 和 Y 是复内积空间. 使 $U0=0$ 的等距映射 $U:X\to Y$ 是否为线性算子? 如果不是, 试加一最简条件使它成为线性算子.

练习 8 设 X 是复 Hilbert 空间, $A:X\to X$ 是有界线性算子. 证明:

(1) $A=A^*$ 当且仅当 $x\in X$ 时, $\langle Ax,x\rangle$ 是实数.

(2) $A=-A^*$ 当且仅当 $x\in X$ 时, $\langle Ax,x\rangle$ 是虚数.

练习 9 作算子 $U_\pm:l^2(\mathbb{Z})\to l^2(\mathbb{Z})$ 使 $U_\pm x$ 的第 n 项是 $x_{n\pm1}$. 证明 U_+ 与 U_- 互为共轭算子且它们都是酉算子.

练习 10 设 $A:X\to X$ 是正算子, 证明 $\|A\|=\sup\{\langle Ax,x\rangle : x\in(X)_1\}$.

练习 11 设 (M,μ) 是非平凡的全 σ- 有限测度空间, 证明 $L^2(M,\mu)$ 上有界线性算子 A 是乘法算子 — 存在本性有界函数 φ 使 $A=m_\varphi$ 当且仅当 $L^2(M,\mu)$ 上乘法算子 B 都与 A 交换: $AB=BA$.

练习 12 试作一个无界线性算子 $A:l^2\to l^2$ 使 $Ae_n=0, n\in\mathbb{Z}_+$. 当 $c>0$ 时, 作个有界线性算子 $B:l^2\to l^2$ 使 $\sup\limits_{n\geqslant1}\|Be_n\|_2=1$ 且 $\|B\|\geqslant c$.

练习 13 设 $A:X\to Y$ 和 $B:Y\to X$ 是内积空间之间的映射使

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,By\rangle : x\in X, y\in Y.$$

问: A 和 B 是否是线性算子? 若是, 它们是否有界?

练习 14 证明: Hilbert 空间之间有界线性算子序列 $(A_n:X\to Y)$ 弱算子收敛当且仅当 $x\in X$ 且 $y\in Y$ 时数列 $(\langle A_nx,y\rangle)$ 收敛.

练习 15 证明: Hilbert 空间上自伴算子序列 $(A_n:H\to H)$ 弱算子收敛当且仅当 $x\in X$ 时数列 $(\langle A_nx,x\rangle)$ 收敛. 此时 (A_n) 的弱算子极限 A 也是自伴算子. 在 A_n 都是正算子时, A 也是正算子.

练习 16 设 H 是非平凡复 Hilbert 空间, 规定有界线性算子 $A:H\to H$ 的数值值域sr A 是数集 $\{\langle Ax,x\rangle | x\in H:\|x\|=1\}$.

(1) 求零算子 $0:H\to H$ 和恒等算子 $I:H\to H$ 的数值值域.

(2) 求 $P:l^2\to l^2$ 的数值值域, 其中 $(Px)_i=\chi_{2\mathbb{Z}_+}(i)x_i$.

(3) 设 b 和 c 是复数, 证明 $\mathrm{sr}(bA+cI)=b\,\mathrm{sr}\,A+c$.

(4) 设 sr A 中的 λ 满足 $|\lambda|=\|A\|$, 证明 λ 是 A 的特征值.

(5) 举例说明数值值域 sr A 不一定是闭集.

练习 17(Toeplitz-Hausdorff 定理) 有界线性算子的数值值域都是凸集.

练习 18 设 J 是无限集，$g: l^2(J) \to \mathbb{C}$ 是不连续的线性泛函. 使 $x|_J \in l^2(J)$ 且 $x(g) = g(x|_J)$ 的函数 $x: J \sqcup \{g\} \to \mathbb{C}$ 的全体 H 按函数通常的线性运算组成一个线性空间. 证明:

(1) H 按内积 $\langle x|y\rangle = \langle x|_J, y|_J\rangle$ 成为 Hilbert 空间.

(2) H 上赋值泛函 $x \mapsto x(i)$ 连续 (其中 $i \in J$), 但赋值泛函 $x \mapsto x(g)$ 不连续.

练习 19 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是全 σ- 有限测度空间. 关于乘积测度平方可积的函数 $K: Y \times X \to \mathbb{C}$ 诱导了映射 $A: L^2(X,\mu) \to L^2(Y,\nu)$ 使

$$(Af)(y) = \int_X K(y,x)f(x)\mu(dx) : f \in L^2(X,\mu), y \in Y.$$

证明 A 是有限秩算子当且仅当 X 上有有限个平方可积函数 $e_1, \cdots, e_n$ 且 Y 上有有限个平方可积函数 $g_1, \cdots, g_n$ 使关于乘积测度几乎处处有

$$K(y,x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(y)\overline{e_i(x)} : (y,x) \in Y \times X.$$

§7.3 基与维数

直交系是内积空间中独有的现象，它有助于理解内积空间的结构.

直交系 内积空间中相互直交的 (单位) 向量组成的集称为 (规范) 直交系.

(1) 对直交系 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 用勾股定理得

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

(2) 无零向量的直交系是线性无关集.

(3) 构造直交系可用 **Gram-Schmidt 直交化法**: 设 $\{x_i | i < m\}$ 是内积空间 X 中至多可列个线性无关的向量 $(x_n)_{1 \leqslant n < m} (2 \leqslant m \leqslant +\infty)$. 命

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|},$$

$$e_2 = \frac{x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1\|},$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_n = \frac{x_n - [\langle x_n, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x_n, e_{n-1}\rangle e_{n-1}]}{\|x_n - [\langle x_n, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x_n, e_{n-1}\rangle e_{n-1}]\|},$$

$$\cdots\cdots$$

则 $\{e_i|i<m\}$ 是规范直交系使 $1\leqslant n<m$ 时,

$$\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}.$$

(4) **修正的 Gram-Schmidt 直交化法**: 设 (x_n) 是内积空间中序列, 则 (e_n) 是直交序列: 其中 $e_1=x_1$ 而 (约定 $0/0=0$)

$$e_n=x_n-\sum_{i<n}\frac{\langle x_n,e_i\rangle e_i}{\langle e_i,e_i\rangle}.$$

对任何正整数 n, $\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$.

定理 1(Riesz-Fischer) Hilbert 空间 X 的直交系 $\{x_i|i\in J\}$ 使级数 $\sum\limits_{i\in J}x_i$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{i\in J}\|x_i\|^2<+\infty$. 此时, 至多可列项 x_i 非零.

定理 2 设 E 是内积空间 X 的规范直交系, 则任何 $x\in X$ 关于 E 的 Fourier 系数 $\langle x,e\rangle$ 非零的项至多有可列个且 x 关于 E 适合 Bessel 不等式

$$\sum_{e\in E}|\langle x,e\rangle|^2\leqslant\|x\|^2.$$

进而以下条件等价:

(1) x 关于 E 适合 Parseval 等式: $\|x\|^2=\sum\limits_{e\in E}|\langle x,e\rangle|^2$.

(2) x 关于 E 的 Fourier 级数 的和为 x, 即 $x=\sum\limits_{e\in E}\langle x,e\rangle e$.

(3) x 与 X 中任何向量 y 适合等式: $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{e\in E}\langle x,e\rangle\langle e,y\rangle$.

(4) x 是线性子空间 $\operatorname{span}E$ 的接触点: $x\in\overline{\operatorname{span}}\,E$.

直交基 设 E 是内积空间 X 中不含零向量的直交系.

(1) 如果 $\operatorname{span}E$ 稠于 X, 则称 E 是 X 的一个 直交基. 此时可得一个规范直交基 $\{e/\|e\|:e\in E\}$, 而 Parseval 等式和 Fourier 级数取如下形式:

$$\|x\|^2=\sum_{e\in E}\frac{|\langle x,e\rangle|^2}{\langle e,e\rangle},x=\sum_{e\in E}\frac{\langle x,e\rangle e}{\langle e,e\rangle}.$$

(2) 设 E 是直交基, 则 $E^\perp=\{0\}$. 逆命题在 X 完备时成立.

(3) 设 E 是 X 的闭线性子空间 L 的规范直交基, 则向量 x 在 L 上有直交投影当且仅当级数 $\sum\limits_{e\in E}\langle x,e\rangle e$ 依范数收敛 (于 x 的直交投影).

(4) 内积空间可分当且仅当它有至多可列个向量组成一个直交基.

(5) 非平凡 Hilbert 空间 X 总有个规范直交基.

以 e_i 记 J 上在 i 取值为 1 而在其他地方取值为 0 的函数, 则 $\{e_i|i\in J\}$ 是 $l^2(J)$ 的规范直交基. 在讨论实 Hilbert 空间时, 可认为 $l^2(J)$ 由平方可和的实函数构成.

定理 3 设 E 是 Hilbert 空间 H 的规范直交基，则 H 与 $l^2(E)$ 酉同构. 进而， E 的势 (称为 X 的直交维数，记为 $\dim X$) 与 E 的选取无关. 当 E 有限时， X 酉同构于 $\mathbb{K}^{|E|}$; E 可列时， X 酉同构于 l^2.

例 1(Legendre 多项式) 命 $h_k(x) = ((x^2-1)^k)^{(k)} : k = 0, 1, 2\cdots$, 其中 (k) 表示 k 阶导数. 由于 h_n 是 n 次多项式， x^n 可由 $h_0(x), \cdots, h_n(x)$ 线性组合. 这样 $\text{span}\{h_0, h_1, \cdots\}$ 在 $L^2[-1,1]$ 中稠密.

当 $0 \leqslant k < n$ 时， ± 1 是 $((x^2-1)^n)^{(k)}$ 的零点. 于是

$$\langle h_n, h_m \rangle = \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^m)^{(m)} d((x^2-1)^n)^{(n-1)}$$

$$= -\int_{-1}^{1} ((x^2-1)^n)^{(n-1)} ((x^2-1)^m)^{(m+1)} dx$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n ((x^2-1)^m)^{(m+n)} dx.$$

上面用到了分部积分. 当 $m < n$ 时， $((x^2-1)^m)^{(m+n)} = 0$, 故 $\langle h_n, h_m \rangle = 0$. 如果 $m = n$, 则 $((x^2-1)^n)^{(2n)} = (2n)!$, 因此

$$\langle h_n, h_n \rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n (2n)! dx = \frac{(n!)^2}{2n+1} 2^{2n+1}.$$

于是 $\{h_n\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 的直交基. 将 h_n 规范化得个 Legendre 多项式

$$L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(x^2-1)^n}{2^n n!} : n = 0, 1, \cdots$$

于是 Legendre 多项式序列 $\{L_0, L_1, \cdots\}$ 是 $L^2[-1,1]$ 的规范直交基.

例 2 在单位圆周 $\mathbb{T}$ 的 Borel 集代数上，取弧长测度 $|dz|_1$. 命 $e_n(z) = z^n$, 则 $E = \{e_n | n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 的直交系:

$$\int_{\mathbb{T}} e_m(z) \overline{e_n(z)} |dz|_1 = \int_0^{2\pi} e^{(m-n)\sqrt{-1}t} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n. \end{cases}$$

因为 $\text{span}\, E$ 在 $L^2(\mathbb{T})$ 中稠密 (见 §5.5 例 2), 所以 E 是直交基.

例 3 函数系 $\{\exp(\sqrt{-1}nx)|n\in\mathbb{Z}\}$ 和三角函数系 $\{1,\cos nx,\sin nx|n\geqslant 1\}$ 都是 $L^2[0,2\pi)$ 中的直交系，据 §7.2 例 3 它们还是直交基.

因为这些三角函数的周期都为 2π, 据 Lebesgue 积分的平移不变性, 这两个函数系还是 $L^2(X)$ 的直交基，其中 X 是长度为 2π 的任何类型的区间.

平方可积函数 $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ 关于三角函数系的 Fourier 级数是

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中级数依平方平均收敛于 f, 而 Fourier 系数 a_n 与 b_n 由下式确定:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx:n=0,1,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx:n=1,2,\cdots.$$

此时的 Parseval 等式是

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt=\frac{|a_0|^2}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^2+|b_n|^2}{\pi}.$$

有限维 Hilbert 空间的直交维数就是它的线性维数 — 线性基的势，而无限维 Hilbert 空间的直交维数小于其线性维数. 这见下例.

例 4 l^2 的直交维数是 $\aleph_0$, 因为 $\{e_n|n=1,2,\cdots\}$ 是其直交基. 但 l^2 的线性维数是 $\aleph$. 为此，命 $E=\{(t,t^2,t^3,\cdots):0<|t|<1\}$, 则 $|E|=\aleph$. 任取互异的数组 $t_1,\cdots,t_n$, 由 Vandermonde 行列式得

$$\det\begin{pmatrix}t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n\\ t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n\end{pmatrix}=t_1\cdots t_n\prod_{i>j}(t_i-t_j).$$

可见，$(t_1,t_1^2,\cdots,t_1^n),\cdots,(t_n,t_n^2,\cdots,t_n^n)$ 线性无关. 因此

$$(t_1,t_1^2,\cdots,t_1^n,\cdots),\cdots,(t_n,t_n^2,\cdots,t_n^n,\cdots)$$

线性无关. 这样 E 是 l^2 中线性无关集. 因此 l^2 的线性基 B 的势 $|B|\geqslant\aleph$. 又 l^2 的势是 $\aleph$, 故 $|B|\leqslant\aleph$.

习 题

练习 1 证明 Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 有个规范直交基 $\{e_n|n \geqslant 0\}$, 其中

$$e_n(z) = z^n\sqrt{(n+1)/\pi} : n = 0, 1, \cdots .$$

练习 2 证明 $L^2(\mathbb{R})$ 有个规范直交基 $\{h_n|n \geqslant 0\}$, 其中

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} \exp\frac{x^2}{2}\frac{d^n(\exp(-x^2))}{dx^n}.$$

练习 3 证明 $\{H_n|n \geqslant 0\}$ 是 $L^2(\mathbb{R}, \exp(-x^2)dx)$ 的规范直交基, 其中

$$H_n(x) = \frac{\exp(x^2)}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\frac{d^n\exp(-x^2)}{dx^n}$$

这称为 Hermite 多项式, 而 $L^2(\mathbb{R}, \exp(-x^2)dx)$ 是满足以下条件

$$\|f\|_2^2 := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \exp(-x^2)dx < +\infty$$

的 Borel 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 全体按以下内积所成的 Hilbert 空间

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\exp(-x^2)dx.$$

练习 4 (1) 记 $F = \{\sin nx|n = 1, 2, \cdots\}$, 证明它是 $L^2[0, \pi]$ 的直交基.

(2) 记 $E = \{\cos nx|n = 0, 1, \cdots\}$, 证明它是 $L^2[0, \pi]$ 的直交基.

练习 5 证明 $\{T_n|n = 0, 1, \cdots\}$ 构成 $L^2((-1, 1); \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ 的直交基, 其中

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x).$$

这称为 Чебышев 多项式, 而 $L^2((-1, 1); \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ 是满足条件:

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < +\infty$$

的 Borel 函数 f 全体按以下内积所成的 Hilbert 空间:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

练习 6 记 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, 这是复平面上的单位开圆盘. 设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ 是解析函数, $f(z)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nz^n$. 以 H^2 记使 $\sum\limits_{n\geqslant 0}|a_n|^2$ 收敛的解析函数 f 的全体, 证明 H^2 按以下内积成为一个 Hilbert 空间:

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n\geqslant 0}a_n\overline{b_n}.$$

如果 $\{e_0,e_1,\cdots\}$ 是 H^2 的一个规范直交基, 证明当 $|z|<1,|w|<1$ 时成立

$$\sum_{n\geqslant 0}e_n(z)\overline{e_n(w)}=1/(1-z\overline{w}).$$

练习 7 对于多项式 $f(z)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iz^i$, 在 $L^2(\mathbb{D})$ 中计算 $d(\overline{f},A^2(\mathbb{D}))$.

练习 8 命 $\{f_j|j\in\mathbb{Z}\}$ 同 §7.1 练习 9. 对于非零实数 t, 命 $f(x)=\exp(tx)$. 在 $L^2[0,2\pi)$ 中, 求 f 关于 $\{f_j|j\in\mathbb{Z}\}$ 的 Fourier 级数.

练习 9 对于非零实数 t, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+t^2}$. 以此求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

练习 10 证明两个 Hilbert 空间 X 与 Y 酉同构当且仅当它们的直交维数相同.

* **练习 11** 设 $(x_i|i\in J)$ 是 [完备] 内积空间 X 中的直交系, 证明级数 $\sum\limits_{i\in J}x_i$ 可和当且仅当 $\sum\limits_{i\in J}x_i$ 弱可和 [当且] 仅当 $\sum\limits_{i\in J}\|x_i\|^2<+\infty$. 此时,

$$\|\sum_{i\in J}x_i\|^2=\sum_{i\in J}\|x_i\|^2.$$

练习 12 对于实数列 $(s_n)_{n=0}^{\infty}$, 作线性泛函 $\phi:\mathbb{R}[\lambda]\to\mathbb{R}$ 使

$$\phi(\sum_{i=0}^{\infty}a_i\lambda^i)=\sum_{i=0}^{\infty}a_is_i,$$

请注意, 上式中不为零的系数 a_i 只有有限个. 证明以下条件等价:

(1) ϕ 是正泛函: $f(x)\geqslant 0\Rightarrow\phi(f(x))\geqslant 0$ 且 $f\neq 0$ 时 $\phi(f)>0$.

(2) (s_n) 是正定序列 — 它使以下方阵都正定:

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n\\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n}\end{pmatrix}:n=0,1,\cdots.$$

(3) $\mathbb{R}[\lambda]$ 上有内积: $\langle f(\lambda),g(\lambda)\rangle=\phi(f(\lambda)g(\lambda))$, 即

$$\langle\sum_{i=0}^{\infty}a_i\lambda^i,\sum_{i=0}^{\infty}b_i\lambda^i\rangle=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_ib_is_{i+j}.$$

练习 13 (1) 证明 l^2 有 $2^{\aleph}$ 个线性子空间及 $\aleph$ 个闭线性子空间.

(2) 证明 l^2 上有 $2^{\aleph}$ 个线性算子及 $\aleph$ 个有界线性算子.

(3) 说明不是每个线性算子 $A: l^2 \to l^2$ 都呈 §7.2 练习 1 的形式.

练习 14 证明 Hilbert 空间之间有界线性算子 $U: X \to Y$ 是酉算子当且仅当它将 X 的规范直交基映至 Y 的规范直交基.

练习 15 记 $L = \text{span}\{z^k\bar{z}^l \exp(-|z|^2/2)|k, l = 0, 1, \cdots\}$, 它在 $L^2(\mathbb{C})$ 中稠密, 其中复平面 $\mathbb{C}$ 取 Lebesgue 测度 $\mathbf{m}(dz)$.

练习 16 对于整函数 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, 命

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \exp(-|z|^2/2)\mathbf{m}(dz).$$

(1) 使 $\|f\|$ 有限的 f 全体 H 称为 Fock 空间, 证明它是 Hilbert 空间.

(2) 证明 Fock 空间 H 有个规范直交基 $\{e_k|k \in \mathbb{Z}_+\}$, 其中

$$e_k(z) = z^k/\sqrt{2^{k+1}\pi k!}.$$

(3) 证明 Fock 空间 H 上的赋值泛函 $f \mapsto f(z)$ 是连续的, 其中 $z \in \mathbb{C}$.

(4) 证明 Fock 空间有子集 $\{K_z|z \in \mathbb{C}\}$ 使 $f \in H$ 时 $f(z) = \langle f, K_z\rangle$.

(5) 利用 Fock 空间的直交基计算 K_z.

练习 17 Bergman 空间 $A^2(M)$ 有个子集 $\{K_z|z \in M\}$ 使

$$f(z) = \int_M f(w)\overline{K_z(w)}\mathbf{m}(dw), f \in A^2(M).$$

命 $K(z, w) = K_w(z)$, 称 K 为 $A^2(M)$ 的 Bergman 核或再生核. M 上有界全纯函数 φ 定义了一个乘法算子 $m_\varphi: A^2(M) \to A^2(M), f \mapsto \varphi f$.

(1) 证明 $m_\varphi^* K_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} K_\lambda$.

(2) 用 $A^2(M)$ 的规范直交基 $\{e_k|k\}$ 计算 K.

(3) 求 $A^2(\mathbb{D})$ 的再生核.

练习 18 概率空间 (M, μ) 上可测函数全体记为 $L(M, \mu)$, 其中两个几乎处处相等的函数视为一个函数. 这样所有 $L^p(M, \mu)$ 都是 $L(M, \mu)$ 的子空间. 如果 L 是 $L^2(M, \mu)$ 的闭线性子空间使 $L \subseteq L^\infty(M, \mu)$, 证明 L 是有限维的.

练习 19 设 (M,μ) 是概率空间. 证明以下条件等价:

(1) M 的每个可测划分中只有有限个成员非零集.

(2) M 上任何可测函数 $f: M\to\mathbb{C}$ 都是本性有界的.

(3) M 上任何可测函数 $f: M\to\mathbb{C}$ 都是可积的.

(4) M 上空间 $L^\infty(M,\mu)$ 是有限维的.

(5) M 上空间 $L^\infty(M,\mu)$ 是自反空间.

(6) M 上空间 $L^1(M,\mu)$ 是自反空间.

(7) M 上某个空间 $L^p(M,\mu)$ 是有限维的.

(8) M 上所有空间 $L^p(M,\mu)$ 都是有限维的 $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$.

练习 20 设 (M,μ) 是全 σ- 有限测度空间, 证明 $L^1(M,\mu)$ 是自反空间当且仅当 $L^\infty(M,\mu)$ 是自反空间当且仅当它们中一个是有限维的 (从而另一个也是有限维的) 当且仅当所有 $L^p(M,\mu)$ 都是有限维的.

练习 21 设 (M,μ) 是概率空间使 $L^1(M,\mu)$ 是无限维的, 证明 M 有可列个测度非 0 且相互不交的可测集. 进而 l^p 可等距嵌入至 $L^p(M,\mu)$ 中.

练习 22(Лузин) 设 (a_n) 和 (b_n) 是实数列使三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在某个非零 Lebesgue 可测集 E 上绝对收敛, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛.

练习 23 对于以 2π 为周期的可测函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 命 $\|f\|_2^2=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt$. 使 $\|f\|_2$ 有限的 f 全体成为一个 Hilbert 空间 $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 为 Young 函数 — 存在 $f_j\in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ 使

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_1(t)f_2(t+x)dt,$$

证明 f 是以 2π 为周期的连续函数.

练习 24 设 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 和 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是实数列, 证明三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

处处绝对收敛当且仅当它是一个 Young 函数 f 的 Fourier 级数.

练习 25 证明 Hardy 空间 H^2 中有个直交基 $\{e_n|n \geqslant 0\}$, 其中 $e_n(z) = z^n$.

练习 26 证明 Hardy 空间 H^2 中实函数 f 是常数函数.

* **练习 27** Hardy 空间 H^p 中实函数 f 都是常数函数.

练习 28 设 H 是集合 M 上某些复值函数按通常线性运算所成的线性空间使 $x \in M$ 时, 有 $f \in H$ 满足 $f(x) \neq 0$. 如果 H 还是 Hilbert 空间使每个 $x \in M$ 对应的赋值泛函 $f \mapsto f(x)$ 是 H 上的连续线性泛函 (即有 $c_x > 0$ 恒使 $|f(x)| \leqslant c_x\|f\|$), 则称 H 是 M 上的一个函数 Hilbert 空间. 证明:

(1) 对每个 $y \in M$ 有唯一 $K_y \in H$ 使 $f \in H$ 时, $f(y) = \langle f, K_y\rangle$. 作 $M \times M$ 上的函数 K 使 $K(x,y) = K_y(x)$, 称 K 为 H 的再生核.

(2) 由 $K_y : y \in M$ 张成的线性子空间稠于 H. 如果 $\{e_i|i \in J\}$ 是 H 的规范直交基, 则 $K(x,y) = \sum\limits_{i\in J} e_i(x)\overline{e_i(y)}$.

(3) $A^2(\mathbb{D})$ 是 $\mathbb{D}$ 上函数 Hilbert 空间而 $L^2(\mathbb{D})$ 则不是.

练习 29 设 H 是集合 M 上的一个函数 Hilbert 空间且 M 上的函数 φ 是 H 的一个乘子 — 它使 $\varphi H \subseteq H$. 将 H 的乘子全体记为 Φ.

(1) 乘子 φ 是有界函数且 $A : H \to H, f \mapsto \varphi f$ 是有界线性算子.

(2) 构造 3 个函数 Hilbert 空间 H_1, H_2, H_3 使

$$\Phi_1 \subset H_1, \Phi_2 = H_2, \Phi \supset H_2.$$

练习 30 证明所有的 Hilbert 空间 X 都与某个函数 Hilbert 空间 H 酉同构.

§7.4 投影算子

当 φ 是可测集 E 的特征函数时, 乘法算子 $m_\varphi : L^2(M,\mu) \to L^2(M,\mu)$ 是*投影算子*— 自伴且幂等的算子. 此时 m_φ 的值域是 $L^2(E,\mu)$. 一般地, 我们以下结论.

定理 1 Hilbert 空间上映射 $P : X \to X$ 是投影算子当且仅当 X 有唯一闭线性子空间 L 使任何 $x \in X$ 在 L 上的直交投影是 Px. 此时,

(1) P 的算子范数非 0 即 1(源自等式 $\|P\|^2 = \|P^*P\| = \|P\|$).

(2) P 的值域是 L(称为 P 的投影子空间) 也是 $I - P$ 的核空间.

(3) P 是正算子且 $0 \leqslant P \leqslant I$.

(4) $I - P$ 是 $L^\perp$ 对应的投影算子.

Hilbert 空间的闭线性子空间与投影算子相互对应, 可将 Hilbert 空间的闭线性子空间与它对应的投影算子视为一物.

例 1 Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 是 $L^2(\mathbb{D})$ 的闭子空间，它对应的投影算子 $P: L^2(M) \to L^2(M)$ 也称为 Bergman 投影. 当 $f \in L^2(M)$ 时,

$$
\begin{aligned}
(Pf)(z) = \langle Pf, K_z\rangle = \langle f, PK_z\rangle \\
= \langle f, K_z\rangle = \int\limits_M K(z,w)f(w)\mathbf{m}(dw),
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{m}(dw)$ 是二维 Lebesgue 测度. 上式表明了 Bergman 核 K 的重要性.

对于有限维空间 X 上的矩阵 A, 根据 Jordan 块理论，可以把 X 分解为 A 的不变子空间的直和使 A 限制在每个不变子空间上时，所得算子只有一个特征值且在每一块不变子空间上矩阵的结构特别简单，就是它的 Jordan 块. 研究矩阵的不变子空间是研究矩阵结构的关键. 在无限维 Banach 空间上，一个基本问题是研究算子的不变子空间. 这主要是因为人们总希望从整个空间中划分出某些不变子空间，使得算子在这些子空间上的结构比较简单，例如谱集中些，从而获得算子的信息. 投影算子可用来讨论不变子空间问题，从而使几何问题代数化.

不变子空间 设线性算子 $A: X \to X$ 与 X 的线性子空间 L 满足 $A(L) \subsetneq L$, 则称 L 是 A 的 不变子空间.

(1) 子空间 $\{0\}$ 和 X 是 (所谓) 平凡不变子空间.

(2) 值域 $\operatorname{ran} A$ 与核空间 $\ker A$ 是 A 的不变子空间.

(4) 在 A 有界时，不变子空间 L 的闭包是 A 的不变子空间.

(5) 一簇不变子空间 $L_i: i \in J$ 张成的线性子空间 $\operatorname{span}\{L_i : i \in J\}$ 和交成的线性子空间 $\bigcap\limits_{i\in I} L_i$ 也是 A 的不变子空间.

(6) 设 X 是 Hilbert 空间而 L 是其闭线性子空间. 设 P 是 L 对应的投影算子而 A 是有界线性算子，则 L 是 A 的不变子空间当且仅当 $AP = PAP$.

(7) 条件同 (6), 则 L 是 A 与 A^* 的不变子空间当且仅当 $AP = PA$ 当且仅当 L 与 $L^\perp$ 是 A 的不变子空间. 此时称 L 是 A 的 约化子空间.

如果 $L \supsetneq M$, 作 M 在 L 中的 直交补: $L \ominus M = L \cap M^\perp$.

投影算子的代数运算 设 P 和 Q 是 Hilbert 空间 H 上两个投影算子.

(1) PQ 是投影算子 $\Leftrightarrow PQ = QP$. 此时 $\operatorname{ran}(PQ) = \operatorname{ran} P \cap \operatorname{ran} Q$.

(2) $P+Q$ 是投影算子 $\Leftrightarrow PQ = 0 \Leftrightarrow QP = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ran} P \perp \operatorname{ran} Q$. 此时 $\operatorname{ran}(P+Q) = \operatorname{ran} P \oplus \operatorname{ran} Q$ 并记 $P \perp Q$.

(3) $Q-P$ 是投影算子 $\Leftrightarrow PQ = P \Leftrightarrow QP = P \Leftrightarrow P \leqslant Q \Leftrightarrow \operatorname{ran} P \subseteq \operatorname{ran} Q$. 此时 $\operatorname{ran}(Q-P) = \operatorname{ran} Q \ominus \operatorname{ran} P$.

上面介绍了有限个投影算子的运算，下面介绍无限个投影算子的运算.

上确界与下确界 设 $P_i : i \in J$ 是 Hilbert 空间 H 上一簇投影算子, 对应投影子空间 $L_i : i \in J$. 投影算子 P 称为 $\{P_j | j \in J\}$ 的一个上界是指恒有 $P_j \leqslant P$. 投影算子 Q 称为 $\{P_j | j \in J\}$ 的一个下界是指恒有 $P_j \geqslant Q$.

(1) $\{P_j | j \in J\}$ 有唯一上界 P 使其他上界 Q 都满足 $P \leqslant Q$. 此时称 P 为 $\{P_j | j \in J\}$ 的上确界, 记为 $\sup\limits_{j \in J} P_j$, 其投影子空间是 $\overline{\operatorname{span}} \bigcup\limits_{i \in J} L_i$.

(2) $\{P_j | j \in J\}$ 有唯一下界 P 使其他下界 Q 都满足 $P \geqslant Q$. 此时称 P 为 $\{P_j | j \in J\}$ 的下确界, 记为 $\inf\limits_{j \in J} P_j$, 其投影子空间是 $\bigcap\limits_{i \in J} L_i$.

(3) 对偶律: $\sup\limits_i (I - P_i) = I - \inf\limits_i P_i$ 且 $\inf\limits_i (I - P_i) = I - \sup\limits_i P_i$.

(4) 如果 (P_i) 递增, 则它强算子收敛于投影算子 $\sup\limits_i P_i$.

(5) 如果 (P_i) 递减, 则它强算子收敛于投影算子 $\inf\limits_i P_i$.

(6) 设 $L_i : i \in J$ 相互直交 (相当于 $i \neq j$ 时, $P_i P_j = 0$), 作直交和

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i \in J} L_i &= \{\sum_{i \in J} x_i | \forall i \in I : x_i \in L_i; \sum_{i \in J} \|x_i\|^2 < +\infty\} \\ &= \overline{\operatorname{span}} \bigcup \{L_i | i \in J\}.\end{aligned}$$

级数 $\sum\limits_{j \in J} P_j$ 强算子收敛子 $\bigoplus\limits_{j \in J} L_j$ 对应的投影算子 $\sup\limits_i P_i$. 如果 E_i 是 L_i 的规范直交基, 则 $\bigcup\limits_{i \in J} E_i$ 是 $\bigoplus\limits_{i \in J} L_i$ 的规范直交基.

* **张量积** 设 X 与 Y 是 Hilbert 空间, 它们的代数张量积记为 $\operatorname{alg}(X \otimes Y)$.

(1) $\operatorname{alg}(X \otimes Y)$ 上有唯一内积恒使

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \langle y_1, y_2 \rangle.$$

将 $\operatorname{alg}(X \otimes Y)$ 完备化所得 Hilbert 空间记为 $X \otimes Y$.

(2) E 与 F 分别是 X 与 Y 的直交系 [基] 时, $\{e \otimes f | e \in E, f \in F\}$ 是 $X \otimes Y$ 的直交系 [基]. 因此直交维数具有可乘性 (势的乘法):

$$\dim(X \otimes Y) = \dim X \dim Y.$$

(3) L 与 M 分别是 X 与 Y 的闭线性子空间且它们对应的投影算子分别是 P 与 Q 时, $L \otimes M$ 是 $X \otimes Y$ 的闭线性子空间且对应投影算子 $P \otimes Q$.

(4) 在酉同构下, $L^2(M, \mu) \otimes L^2(N, \nu) = L^2(M \times N, \mu \otimes \nu)$, 其中 $f \otimes g$ 视为 $M \times N$ 上的函数 $(s, t) \mapsto f(s)g(t)$.

(5) $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有个直交基 $\{h_\alpha | \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$, 其中 (参见 §7.3 练习 2)

$$h_\alpha(x) = h_{\alpha_1}(x_1) \cdots h_{\alpha_n}(x_n).$$

习 题

练习 1 对于左右平移 $S_{\pm}: l^2 \to l^2$(参见 §6.2 例 5), 试证明 $S_+S_- = I$ 而 $S_-S_+ = P$, 其中 P 是以 $\{x \in l^2 | x_1 = 0\}$ 为投影子空间的投影算子.

练习 2 设 $U: X \to Y$ 是 Hilbert 空间之间有界线性算子, 证明以下条件等价:

(1) U^*U 为投影算子 (称为 U 的初始投影, 其投影子空间记为 X_0).

(2) UU^* 为投影算子 (称为 U 的值域投影, 其投影子空间记为 Y_0).

(3) $U = UU^*U$.

(4) $U^* = U^*UU^*$.

此时, 称 U 是部分等距. 限制 $(U: X_0 \to Y_0)$ 是酉算子.

练习 3 设 $U: X \to Y$ 是实 Hilbert 空间之间映射. 以下条件等价:

(1) $U0 = 0$ 且 U 是等距的: $\|Ux_1 - Ux_2\| = \|x_1 - x_2\|$ 恒成立.

(2) U 保持内积: $\langle Ux_1, Ux_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$.

(3) U 是有界线性算子且 $U^*U = I$. 此时称 U 是 等距算子.

练习 4 将 $\mathbb{C}$ 视为一维复 Hilbert 空间. 命 $Uz = \overline{z}$, 证明映射 $U: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 满足练习 3 中条件 (1), 但 U 不满足条件 (2).

练习 5 设 $U: X \to Y$ 是复 Hilbert 空间实线性算子. 证明以下条件等价:

(1) U 保持范数 ($\|Ux\| = \|x\|$ 恒成立) 且 $U\sqrt{-1}x = \sqrt{-1}Ux$ 恒对.

(2) U 保持内积, $\langle Ux_1, Ux_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$.

(3) U 是有界复线性算子且 $U^*U = I$. 此时称 U 是 等距算子.

练习 6(Wood 分解) 设 H 是 Hilbert 空间, 线性算子 $V: H \to H$ 是等距的. 记 $L = H \ominus V(H)$ 及 $M = \bigcap\{V^n(H) | n \geqslant 1\}$, 则 H 有直交分解

$$H = M \oplus L \oplus V(L) \oplus V^2(L) \oplus \cdots.$$

进而 M 约化 V 而且限制 $(V: M \to M)$ 是酉算子.

练习 7 当 $0 < s, t \leqslant 1$ 且 $f \in L^2(0,1]$ 时, 命

$$(V_t f)(s) = \chi_{(0,t]}(s)\frac{1}{\sqrt{t}} f(\frac{s}{t}).$$

当 $g \in L^2(0,1]$ 时, 命 $(W_t g)(s) = \sqrt{t} g(st)$. 证明:

(1) $\|V_t f\|_2 = \|f\|_2$ 和 $\|W_t g\|_2 \leqslant \|g\|_2$.

(2) $V_t: L^2(0,1] \to L^2(0,1]$ 和 $W_t: L^2(0,1] \to L^2(0,1]$ 互为共轭.

(3) $\lim\limits_{t\to 0}\|V_t^* g\|_2 = 0$. 进而当 $0 < t_0 \leqslant 1$ 时,

$$\lim_{t\to t_0}(\|V_t f - V_{t_0} f\|_2 + \|V_t^* g - V_{t_0}^* g\|_2) = 0.$$

(4) 如果 $L^2(0,1]$ 中序列 (f_n) 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_2^2 < +\infty$, 证明

$$\lim_{t\to t_0}\sum_{n=1}^{\infty}(\|V_t f_n - V_{t_0} f_n\|_2^2 + \|V_t^* f_n - V_{t_0}^* f_n\|_2^2) = 0.$$

练习 8 设 $P_i : X \to X (i \in J)$ 是一组相互直交的非零投影算子. 证明:

(1) $(c_i)_{i\in J}$ 是有界数组时, $\sum\limits_{i\in I} c_i P_i$ 是有界线性算子, 记之为 A.

(2) $\|A\| = \sup\limits_{i\in J}|c_i|$ 且 $\operatorname{ran} A \subseteq \bigoplus\limits_{i\in J} L_i$, 其中 L_i 是 P_i 的投影子空间.

(3) A 可逆当且仅当 $\sum\limits_{i\in J} P_i = I$ 且 $\inf\limits_{i\in J}|c_i| > 0$. 此时求 A^{-1}.

以下练习 9-12 供熟悉多复变的读者参考.

* **练习 9** 设 M 是 $\mathbb{C}^n$ 中有界开集, 其上取 Lebesgue 测度 $\mathbf{m}(dz)$. 将 $\mathbb{C}^n$ 中单位开球的 Lebesgue 测度记为 ω.

(1) 设 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ 而 $f : M \to \mathbb{C}$ 是全纯函数, 则

$$|f(z)| \leqslant \frac{\|f\|_p}{(\omega d(z,\partial M)^{2n})^{\frac{1}{p}}}.$$

(2) 使 $\|f\|_p$ 有限的全纯函数 f 全体记为 $A^p(M)$ 是 Banach 空间. 当 $z \in M$ 时, 赋值泛函 $f \mapsto f(z)$ 是 $A^p(M)$ 上的连续线性泛函.

(3) 当 $z \in M$ 时, 有 $K_z \in A^2(M)$ 使 $f \in A^2(M)$ 时, $f(z) = \langle f, K_z\rangle$. 以 $A^2(M)$ 为投影子空间的投影算子 $P : L^2(M) \to L^2(M)$ 满足:

$$(Pg)(z) = \langle g, K_z\rangle, g \in L^2(M).$$

* **练习 10** 符号同练习 9. 设可测函数 $\varphi : M \to \mathbb{C}$ 满足:

$$\{\varphi f | f \in A^2(M)\} \subseteq L^2(M).$$

命 $Tf = P(\varphi f)$, 证明所谓的 Toeplitz 算子 $T : A^2(M) \to A^2(M)$ 是有界线性算子并且 $\|T\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$(注意此处 φ 可能本性无界).

* **练习 11** 对于非负整数组 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ 和全纯函数 $f: M \to \mathbb{C}$, 记

$$(\partial^\beta f)(z) = \frac{\partial^{\beta_1 + \cdots + b_n} f}{\partial z_1^{\beta_1} \cdots \partial z_n^{\beta_n}}(z).$$

证明 Bergman 空间 $A^2(M)$ 上的线性泛函 $f \mapsto (\partial^\beta f)(a)$ 是连续的.

* **练习 12** 在 $\mathbb{N}^n$ 上取字典顺序: $\alpha < \beta$ 表示存在自然数 k 使 $1 \leqslant k \leqslant n$ 且 $i < k$ 时 $\alpha_i = \beta_i$ 而 $\alpha_k < \beta_k$. 这使 $\mathbb{N}^n$ 成为一个良序集. 设 M 是 $\mathbb{C}^n$ 中非空有界开区域. 固定点 $a \in M$, 证明 Bergman 空间 $A^2(M)$ 有个规范直交基 $\{e_\alpha | \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ 使 $\alpha < \beta$ 时, $\partial^\alpha e_\beta(a) = 0$ 而 $\partial_\beta e_\beta(a) > 0$.

练习 13 设 $T: H \to H$ 是复 Hilbert 空间上次正规算子 — 存在包含 H 的 Hilbert 空间 H' 及正规算子 $A: H' \to H'$ 使 $JT = AJ$, 证明 T 是亚正规算子: $T^*T \geqslant TT^*$.

练习 14 不用 Baire 纲定理证明 Hilbert 空间 H 中弱有界集 E 是有界的.

练习 15 不用 Baire 纲定理证明 Hilbert 空间情形的一致有界原理.

练习 16 不用 Baire 纲定理证明 Hilbert 空间情形的逆算子定理.

§7.5 赋范代数

回顾一下, 数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 A 称为一个代数是指有乘法运算:

$$A \times A \to A : (x, y) \mapsto xy$$

使任何 $x, y, z \in A$ 与 $\lambda \in \mathbb{K}$ 满足以下规律:

结合律: $(xy)z = x(yz)$ 与 $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$,

分配律: $x(y + z) = xy + xz; (x + y)z = xz + yz$.

例 1 设 X 是赋范空间, 则 X 上有界线性算子全体 $\mathbf{B}(X)$ 按算子的通常代数运算成为一个代数. 另外, X 上线性算子全体 $\mathbf{L}(X)$ 也是个代数, 它自然以 $\mathbf{B}(X)$ 为子代数.

实数域 $\mathbb{R}$ 是实代数, 复数域 $\mathbb{C}$ 是复代数. 这两个都是交换代数 — 使 $ab = ba$ 恒成立 (乘法与次序无关).

可逆元与同态 (1) 如果代数 A 中异于零 0 的元 e 使 $x \in A$ 时,

$$ex = xe = x,$$

称 e 为 A 的 *单位元*. 单位元若存在必唯一. 单位元也可写成 1(其意义取决于它所处的环境), $\lambda 1 - x$ 可写成 $\lambda - x$.

(2) 如果 $yx = 1$, 称 x*左可逆* 而为 y 其 *左逆元*; 称 y*右可逆* 且为 x 为其右逆元. 左可逆且右可逆的元 x 称为 *可逆元*. 此时 x 的左逆元 y 与右逆元 z 相等 — 记为 x^{-1}. 这称为 x 的逆元.

(3) 单位元可逆且 $1^{-1} = 1$; 可逆元 x 的逆元 x^{-1} 也可逆且 $(x^{-1})^{-1} = x$; 两个可逆元 x 与 y 的积 xy 也可逆并且 $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

(4) 对于代数 A 中元 x, 约定 $x^1 = x$ 而 $x^n = x^{n-1}x$. 如果 A 有单位元, 约定 $x^0 = 1$. 如果 x 可逆, 对负整数 n, 约定 $x^n = (x^{-1})^{-n}$.

(5) 代数间的线性算子 $\phi : A \to B$ 恒使 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ 时称为同态. 非零代数同态 $f : A \to \mathbb{K}$ 称为 *特征*. 在 A 有单位 1 时, $f(x) = f(x)f(1)$, 因此 $f(1) = 1$. 这样特征在可逆元上不为零.

(6) 对于代数 A 的子集 C 与 D, 命 $CD = \{xy | x \in C, y \in D\}$. 代数 A 中满足 $AL \cup LA \subseteq L$ 的线性子空间 L 称为 A 的 *理想*. 这相当于 L 是某个同态 $\phi : A \to B$ 的核空间.

(7) 设 L 是代数 A 的理想, 则商空间 A/L 是代数, 其中乘法为 $[x][y] = [xy]$. 这使自然投影 $\pi : A \to A/L$ 是同态. 若 1 是 A 的单位元, 则 $[1]$ 是商代数 A/L 的单位元.

实数域和复数域都是 *可除代数*— 非零元都可逆的代数.

例 2 数域 $\mathbb{K}$ 上 n 阶方阵全体 $M_n(\mathbb{K})$ 按矩阵加法、数乘和乘法是代数, 其单位元就是 n 阶单位阵 I_n, 其中可逆元就是可逆阵 (或非奇异阵).

例 3 设 X 是非空集合, 则 $\mathbb{C}^X$ 按通常的函数运算成为对合代数. 对于 $x \in X$ 及 $f \in A$, 命 $\hat{x}(f) = f(x)$. 赋值泛函 $\hat{x} : A \to \mathbb{C}$ 是特征:

(1) 等式 $(af)(x) = af(x)$ 表明 $\hat{x}(af) = a\hat{x}(f)$.

(2) 等式 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ 表明 $\hat{x}(f+g) = \hat{x}(f) + \hat{x}(g)$.

(3) 等式 $(fg)(x) = f(x)g(x)$ 表明 $\hat{x}(fg) = \hat{x}(f)\hat{x}(g)$.

(4) 等式 $e(x) = 1$ 表明 $\hat{x}(e) = 1$ 非零, 其中 e 是取值恒为 1 的函数.

(5) 等式 $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$ 表明 $\hat{x}(\overline{f}) = \overline{\hat{x}(f)}$.

例 4 当 $n \geqslant 2$ 时，矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 上无特征. 为此设 $\varphi: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 是代数同态. 命 E_{ij} 是 (i,j) 位置为 1 其他位置为 0 的 n 阶矩阵. 当 $i \neq j$ 时，$E_{ij}^2 = 0$, 故 $\varphi(E_{ij}) = 0$. 这样 $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{ij}E_{ji}) = 0$. 于是

$$\varphi([a_{ij}]) = \sum_{i,j} a_{ij}\varphi(E_{ij}) = 0.$$

代数范数 代数 A 上满足次可乘性 ($\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$) 的范数 $\|\cdot\|$ 称为代数范数. 此时称 $(A, \|\cdot\|)$ 是赋范代数. 完备的赋范代数称为 Banach 代数.

(1) 赋范代数上的乘法 $A \times A \to A : (x,y) \mapsto xy$ 是连续映射.

(2) 赋范代数 A 中任何元 x 满足式子 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf\limits_{n\geqslant 1} \|x^n\|^{1/n}$.

(3) 有单位元 1 的赋范代数 A 改赋以下等价代数范数后可要求 $\|1\| = 1$,

$$\|x\|' = \sup\{\|xy\|/\|y\| : y \in A\}.$$

(4) 赋范代数 A 的子集 L 为闭理想当且仅当它是某个连续同态 $\phi : A \to B$ 的核空间. 此时，商空间 A/L 是赋范代数.

(5) Banach 代数 A 上的代数同态 $f : A \to \mathbb{K}$ 都连续且 $\|f\| \leqslant 1$.

例 5 命 $L = \{f \in C[a,b] | f(a) = 0\}$, 它是 $C[a,b]$ 的闭理想. 命 $\phi([f]) = f(a)$, 则 $\phi : C[a,b]/L \to \mathbb{C}$ 是同构 — 可逆代数同态.

例 6 设 X 是紧空间，则 $C(X)$ 按上确界范数是交换 Banach 代数，值恒为 1 的函数 e 是其单位元. 当 $f \in C(X)$ 时， f 可逆当且仅当有 g 使 $gf = e$ 当且仅当 f 无零点. 此时 $1/f$ 是 f 的逆元. 又 f^n 在 x 的值为 $(f(x))^n$.

例 7 将 $l^1(\mathbb{Z})$ 中成员写成 $[a_n]_{n\in\mathbb{Z}}$ 或简写成 $[a_n]$, 则 $l^1(\mathbb{Z})$ 按卷积是交换 Banach 代数： $[a_n]_{n\in\mathbb{Z}}[b_n]_{n\in\mathbb{Z}} = [\sum\limits_{i+j=n} a_ib_j]_{n\in\mathbb{Z}}$.

(1) 对于整数 i, 命 e_i 是第 i 项为 1 其他项为 0 的双向序列 $[\delta_{in}]_{n\in\mathbb{Z}}$. 注意到 $e_ie_j = e_{i+j}$ 且 $l^1(\mathbb{Z}) = \overline{\text{span}}\{e_n | n \in \mathbb{Z}\}$, e_0 是 $l^1(\mathbb{Z})$ 的单位元并且 e_n 与 e_{-n} 互为逆元. 进而 $e_n = e_1^n$.

(2) 对于 $[a_n] \in l^1(\mathbb{Z})$ 及 $z \in \mathbb{T}$, 命 $F([a_n])(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_nz^n$. 因为

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_kz^k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| = \|a\|_1,$$

定义 $F([a_n])(z)$ 的级数绝对一致收敛，所以 $F([a_n])$ 是 $\mathbb{T}$ 上的连续函数. 又

$$\begin{aligned} F([a_i][b_j])(z) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i+j=n} a_ib_jz^k \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_iz^ib_jz^j = F[a_i](z)F[b_j](z), \end{aligned}$$

因此 $F : l^1(\mathbb{Z}) \to C(\mathbb{T})$ 是连续代数同态. 这可称为 Fourier 变换.

例 8 Lebesgue 可积函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 全体 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 按卷积是交换 Banach 代数，其中卷积 $f*g(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(y-x)dy$.

以 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 记 $\mathbb{R}^n$ 上 Borel 复值测度全体，则它在通常线性运算与测度的全变差下是 Banach 空间. 它在以下卷积下是有单位的 Banach 代数：

$$\mu*\nu:E\mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\chi_E(x+y)\mu(dx)\nu(dy).$$

将 Lebesgue 可积函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 诱导的加权 (复值) 测度 $f(x)dx$ 记为 Mf, 则 $M:L^1(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 是等距代数同态.

对合代数 若集合 A 到自身的非恒等映射 $x\mapsto x^*$ 恒使 $(x^*)^*=x$, 称 $x\mapsto x^*$ 为 A 上一个对合运算.

(1) 若代数 A 到自身的对合运算 $x\mapsto x^*$ 与代数结构相容： $(xy)^*=y^*x^*$ 及 $(ax+by)^*=\overline{a}x^*+\overline{b}y^*$ 恒成立，称 A 为对合代数. 若 A 上还有个代数范数恒使 $\|x^*\|=\|x\|$, 称 A 为对合赋范代数.

(2) 若复 Banach 代数 A 还是对合代数恒使 $\|x^*x\|=\|x\|^2$, 称 A 是 C^*-代数. 此时从 $\|x^*x\|\leqslant\|x\|\|x^*\|$ 可得 $\|x\|\leqslant\|x^*\|$. 进而 $\|x^{**}\|\leqslant\|x^*\|$. 这样 $\|x^*\|=\|x\|$. 于是 C^* 代数是对合 Banach 代数.

例 9 (1) $l^1(\mathbb{Z})$ 是对合 Banach 代数：对合 $[a_n]^*=[\overline{a_{-n}}]$.

(2) $L^1(\mathbb{R}^n)$ 是对合 Banach 代数：对合 $f^*(x)=\overline{f(-x)}$.

(3) $C_0(\mathbb{R}^n)$ 是 C^*- 代数，其中 f 的对合定义为 f 的共轭 $\overline{f}$.

(4) $B(H)$ 是 C^* 代数，它的闭对合子代数也是 C^*- 代数 (这称为实在的 C^*- 代数，因为它具体地作用于一个 Hilbert 空间).

例 10 Fourier 变换 $F:L^1(\mathbb{R}^n)\to C_0(\mathbb{R}^n)$ 将卷积转换成乘法. 现在

$$\begin{aligned}F(f^*)(x)&=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)f^*(y)dy\\&=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)\overline{f(-y)}dy\\&=\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)f(y)dy}=\overline{F(f)(x)}.\end{aligned}$$

因此 $F(f^*)=\overline{F(f)}$. 这说明 Fourier 变换是对合代数同态.

将代数 A 中可逆元全体记为 $A^\times$, 它对求逆和乘法封闭. 赋范代数上线性运算与乘法都连续. 下面讨论求逆运算的连续性.

定理 1 设 Banach 代数 A 有单位元 1 且 $\|1\|=1$. 任取 $x\in A$ 与数 λ.

(1) $|\lambda|>\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n}$ 时, $\lambda-x$ 可逆且其逆元有 Laurent 展式

$$\frac{1}{\lambda-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

(2) $|\lambda|>\|x\|$ 时, $\|(\lambda-x)^{-1}\|\leqslant(|\lambda|-\|x\|)^{-1}$.

(3) x 可逆且 $\|y-x\|<\|x^{-1}\|^{-1}$ 时, y 也可逆 (因此 $A^\times$ 是开集).

(4) x 可逆时, $\lim\limits_{y\to x}\|y^{-1}-x^{-1}\|=0$ 且 $\|x^{-1}\|d(x,\partial A^\times)\geqslant 1$.

Hamilton 四元数体 $\mathbb{H}$ 是实的可除代数且 $\mathbb{H}^\times$ 上求逆运算是光滑映射. 回顾一下, 作为四维实线性空间, $\mathbb{H}$ 有个基 $\{1,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$. 这个基的乘法满足

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-1,\mathbf{i}\,\mathbf{j}=-\mathbf{j}\,\mathbf{i}=\mathbf{k},$$

$$\mathbf{j}\,\mathbf{k}=-\mathbf{k}\,\mathbf{j}=\mathbf{i},\mathbf{k}\,\mathbf{i}=-\mathbf{i}\,\mathbf{k}=\mathbf{j}.$$

当 $x=a+b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k}$ 时, 命 $x^*=a-b\,\mathbf{i}-c\,\mathbf{j}-d\,\mathbf{k}$. 据以上乘法表算得

$$x^*x=xx^*=a^2+b^2+c^2+d^2,$$

于是 $\mathbb{H}$ 按运算 $x\mapsto x^*$ 及范数 $|x|=\sqrt{x^*x}$ 成为对合 Banach 代数. 因为

$$(xy)^*(xy)=y^*x^*xy=y^*|x|^2y=|x|^2|y|^2,$$

这得 $|xy|=|x||y|$. 当 x 非零时, 它可逆且 $x^*/|x|^2$ 是 x 的逆元. 显然 $x\mapsto x^*/|x|^2$ 是 $\mathbb{H}^\times$ 上光滑映射.

推论 2 设 X 与 Y 是 Banach 空间. 从 X 到 Y 的可逆有界线性算子全体 $B(X,Y)^\times$ 是 $B(X,Y)$ 的开集. 它非空时, X 与 Y 拓扑同构且求逆 $A\mapsto A^{-1}$ 是 $B(X,Y)^\times$ 到 $B(Y,X)^\times$ 的连续映射.

请注意, $B^\times(X,Y)$ 可能是空集. 这在 X 与 Y 的维数不同时尤其如此. 即使维数相同也可能是空集. 如 $1\leqslant p_1<p_2\leqslant+\infty$ 时, l^{p_1} 和 l^{p_2} 不拓扑同构, 所以 $B^\times(l^{p_1},l^{p_2})$ 是空集.

习 题

练习 1 对于没有单位元的代数 A, 认为 $A\cap\mathbb{K}=0$. 形式地命 $A^+=A+\mathbb{K}$. 在 A^+ 中引入以下运算:

加法: $(x+a)+(y+b)=x+y+(a+b)$,

数乘: $\lambda(x+a)=\lambda x+\lambda a$,

乘法: $(x+a)(y+b)=(xy+ay+bx)+ab$.

证明 A^+ 是有单位的代数且 A 是 A^+ 的一个理想使 $A^+/A\cong\mathbb{K}$.

练习 2 证明代数同态 $\phi: A \to B$ 有唯一同态延拓 $\phi^+: A^+ \to B^+$ 使 $\phi^+(1) = 1$.

练习 3 (1) 如果代数 A 中某对元素 x, y 交换: $xy = yx$, 证明

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i y^{n-i};$$

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-i-1}.$$

(2) 如果代数 A 中 y 与可逆元 x 交换, 证明 y 与 x^{-1} 交换.

练习 4 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集而 $f: M \to \mathbb{C}$ 是 l 阶连续可微函数, 命

$$\|f\| = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \sup_{x \in M} \frac{|\partial^\alpha f(x)|}{\alpha!},$$

其中 α 是非负整数组使 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant l$.

(1) 使 $\|f\|$ 有限 (即 $\partial^\alpha f: |\alpha| \leqslant l$ 都有界) 的 f 全体 $C_b^l(M)$ 按函数的通常代数运算和范数 $\|\cdot\|$ 成为交换 Banach 代数, 其中收敛刻画的是次数不过 l 的各阶偏导数一致收敛.

(2) 取值恒为 1 的函数 e 是 $C_b^l(M)$ 的单位元. 而 $f \in C_b^l(M)$ 可逆当且仅当 f 下有界 — 有常数 $c > 0$ 使 $|f| \geqslant c$. 此时, f 的逆元是 $1/f$.

(3) 使 $\partial^\alpha f: |\alpha| \leqslant l$ 能 (唯一地) 连续延拓到 M 的闭包 $\overline{M}$ 上的函数 f 的全体 $C_b^l(\overline{M})$ 是 $C_b^l(M)$ 的闭子代数.

(4) 函数 $f \in C_b^l(\overline{M})$ 在 $C_b^l(M)$ 中可逆时, 其逆元在 $C_b^l(\overline{M})$ 中.

练习 5 设 A 是 Banach 代数 B 的闭子代数并且它们有相同的单位元. 证明 $\partial_A A^\times \subseteq \partial_B B^\times$, 其中下标表示相应的全空间.

练习 6 设 A 是有单位的 Banach 代数且. 设 x 是 A 中一个元素使其幂序列 $(x^n)_{n=1}^\infty$ 有界. 设 $a_{nk}: n, k \geqslant 0$ 是一些与 x 交换的元素使每个级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ 绝对可和且 $\lim\limits_{n\to\infty} (\|a_{n0}\| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|a_{n,k-1} - a_{n,k}\| = 0$. 证明:

(1) 级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} x^k$ 绝对可和, 其和记为 y_n.

(2) 当 $y \in \operatorname{cov}\{x^k | k \geqslant 0\}$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} (y-1) y_n = 0$.

练习 7 设 A 是有单位的 Banach 代数而 x 在 $\partial A^\times$ 中. 证明:

(1) x 是 *左拓扑零因子*: 即 $\inf\{\|xy\| : \|y\| = 1\} = 0$.

(2) x 是 *右拓扑零因子*: 即 $\inf\{\|yx\| : \|y\| = 1\} = 0$.

(3) $\overline{A^\times}\partial A^\times \cup \partial A^\times \overline{A^\times} \subseteq \partial A^\times$.

* **练习 8** 设 1 是复代数 A 的单位元. 证明使 $f(1) = 1$ 的线性泛函 $f : A \to \mathbb{C}$ 是特征当且仅当核空间 $\ker f$ 是异于 A 的最大理想 — 如果 A 的理想 J 使 $\ker f \subsetneq J \subseteq A$, 则 $J = \ker f$ 或 $J = A$.

练习 9 证明 $\varphi : l^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ 是特征当且仅当有唯一 $z \in \mathbb{T}$ 使

$$\varphi([a_n]) = \sum(a_n z^n : n \in \mathbb{Z}) : [a_n] \in l^1(\mathbb{Z}).$$

练习 10 证明线性泛函 $\varphi : L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ 是特征当且仅当有 $x \in \mathbb{R}^n$ 恒使

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp(-2\pi\sqrt{-1}x \cdot y) dy.$$

练习 11 证明 $L^1(\mathbb{T})$ 按卷积成为 Banach 代数, 卷积定义为

$$(f * g)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(w) g(w^{-1}z) |dw|_1.$$

仿练习 10, 求 $L^1(\mathbb{T})$ 上特征的形式.

练习 12 记 $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$. 说明 φ 是 $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 上特征当且仅当有唯一 $z \in \mathbb{T}^n$ 使对 $l^1(\mathbb{Z}^n)$ 中任何 f 成立 $\varphi(f) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k) z^k$,

练习 13 设 X 是紧度量空间, 证明 $\varphi : C(X) \to \mathbb{C}$ 是特征当且仅当有 $x \in X$ 使 $f \in C(X)$ 时 $\varphi(f) = f(x)$(熟悉拓扑者可设 X 为紧 Hausdorff 空间).

练习 14 设 A 是有单位元的代数. 如果 x 是 A 的零因子 — 存在非零元 $y \in A$ 使 $xy = 0$ 或 $yx = 0$, 证明 x 不可逆.

练习 15 设 $\pi : A \to B$ 是代数间满同态使 $\ker \pi = I$. 证明以下条件等价:

(1) I 是 A 的极大理想: A 中包含 I 的理想只有 I 和 A.

(2) B 是单代数: B 的理想只有 0 和 B.

练习 16 有界连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 全体 $C_b(\mathbb{R})$ 按通常的代数运算和上确界范数成为 C^*- 代数.

练习 17 设 I 是有单位的 Banach 代数 A 的极大理想, 证明 I 是闭的.

练习 18 设 A 是 Banach 代数而 $f: A \to M_n(\mathbb{C})$ 是满同态, 证明 f 连续.

练习 19 将 $l^1(\mathbb{N})$ 视为 $l^1(\mathbb{Z})$ 的闭子空间: 对任何 $a \in l^1(\mathbb{N})$, 当 n 是负整数时, 认为 $a_n = 0$. 说明 $l^1(\mathbb{N})$ 按 $l^1(\mathbb{Z})$ 的卷积成为有单位元的闭子代数 (从而是 Banach 代数).

练习 20 说明 f 是 $l^1(\mathbb{N})$ 的特征当且仅当有唯一复数 z 使 $|z| \leqslant 1$ 且

$$f(a) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n : a \in l^1(\mathbb{N}).$$

练习 21 证明实代数 A 的复化 $A_{\mathbb{C}}$ 按以下乘法和数乘是复代数:

$$(x + \sqrt{-1}y)(u + \sqrt{-1}v) = (xu - yv) + \sqrt{-1}(xv + yu),$$

$$(a + \sqrt{-1}b)(x + \sqrt{-1}y) = (ax - by) + \sqrt{-1}(ay + bx).$$

练习 22 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 是连续函数而 $f_s(x) = f(x + s)$, 证明以下条件等价:

(Bohr 定义) 函数 f 是几乎周期的 - - 对于 $\varepsilon > 0$ 有 $r > 0$ 使长度为 r 的区间 I 都含有一点 s 使 $|f - f_s| < \varepsilon$. 此时 f - -致连续.

(Bochner 条件) 函数 f 有界且其平移集 $\{f_t | t \in \mathbb{R}\}$ 是 $C_b(\mathbb{R})$ 的列紧集.

练习 23 作为 $C_b(\mathbb{R})$ 的子空间, 几乎周期函数的全体 AP 是 C^*- 代数.

练习 24 复数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 可简记为 (a_n), 其全体 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上规定以下运算:

加法: $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, 数乘: $c(a_n) = (ca_n)$,

乘法: $(a_n)(b_n) = (c_n)$, 其中 $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$. 特别地 $c_0 = a_0 b_0$.

试证明 (1) $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 这些运算成为交换的复代数.

(2) 当 k 是非负整数时, 命 e_k 是复数列 $(\delta_{kn})_{n=0}^{\infty}$, 则 $e_k e_l = e_{k+l}$.

(3) 复数列 e_0 是 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 的单位元.

(4) 复数列 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 在 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 中可逆当且仅当 $a_0 \neq 0$.

练习 25 以 $\mathbb{C}[[z]]$ 表示系数为复数的形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (形式幂级数没有收敛问题) 全体, 在这个集合上规定以下运算:

加法: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$,

数乘: $c \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c a_n z^n$,

乘法: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 其中 $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

这使 $\mathbb{C}[[z]]$ 成为一个有单位的复代数.

证明有 (代数) 同构 $f: \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}[[z]]$ 使 $f(e_1) = z$.

第 8 章

线性算子谱理论

谱是算子理论的基本内容，它与诸多学科有重要联系．在线性代数中，通过特征值可了解方阵的结构并写出它的相似标准形．求某些微分方程和积分方程的解可化求某个微分算子和积分算子的特征值．

§8.1 正则点与谱点

将方阵特征值这个概念一般化可得以下谱的概念．

正则点与谱点 设 $A: X \to X$ 是复线性空间 X 上线性算子．

(1) 使 $\lambda I - A$ 可逆的复数 λ 称为 A 的正则点，其全体组成 A 的豫解集 $\rho(A)$．命 $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$，这称为 A 的豫解式．

(2) 使 $\lambda I - A$ 不可逆的复数 λ 称为 A 的谱点，其全体组成 A 的谱 $\sigma(A)$．命 $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$，这称为 A 的谱半径．

(3) 使线性方程 $Ax = \lambda x$ 有非零解 (即 $\lambda I - A$ 非单射) 的复数 λ 称为 A 的特征值而非零解 x 称为 λ 对应的特征向量．核空间 $\ker(\lambda I - A)$ 称为 λ 对应的特征子空间，并记为 E_λ．

(4) 不同特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 对应的特征向量 $x_1, \cdots, x_n$ 线性无关．

可见，复平面 $\mathbb{C}$ 是豫解集 $\rho(A)$ 与谱 $\sigma(A)$ 的无交并．据线性代数理论，当 X 的维数有限时， A 的谱点只有有限个且它们都是 A 的特征值．

例 1 复平面上整函数全体记为 $\mathcal{O}(\mathbb{C})$．考虑微分算子 $D: f \mapsto f'$．对任何复数 λ，命 $f_\lambda(z) = \exp(\lambda z)$，则 $Df_\lambda = \lambda f_\lambda$．这表明每个复数都是 D 的特征值．

可见，谱可以很大．更有甚者，复平面上任何非空子集 M 都可作为某个线性算子的谱．为此命 $X = \mathrm{span}\{f_\lambda | \lambda \in M\}$，将例 1 中 D 视为 X 上线性算子，则其特征值全体是 M．又如，定义 M 上复函数全体 $\mathbb{C}^M$ 上的线性算子 A 为 $(Af)(z) = zf(z)$，则 λ 是 A 的特征值当且仅当 $\lambda \in M$．

例 2 设 $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, 考虑全 σ- 有限测度空间 (M,μ) 上本性有界函数确定的乘法算子 $m_\varphi : L^p(M,\mu) \to L^p(M,\mu)$.

(1) 复数 λ 是 m_φ 的正则点当且仅当有 $r>0$ 使 $\mu(|\varphi-\lambda|<r)=0$.

(2) 复数 λ 是 m_φ 的谱点当且仅当所有 $r>0$ 使 $\mu(|\varphi-\lambda|<r)>0$.

(3) 复数 λ 是 m_φ 的特征值当且仅当 $\mu(\varphi=\lambda)>0$.

证明：设 $\lambda=0$ 而 $E_r=(|\varphi|<r)$.

(1) 必要性：据逆算子定理知 m_φ 下有界. 因此可取 $c>0$ 使 $f\in L^p$ 时, $\|\varphi f\|_p \geqslant c\|f\|_p$. 命 $r=c/2$. 在 $p=+\infty$ 时, 以 χ_{E_r} 代替 f 得

$$c\|\chi_{E_r}\|_\infty \leqslant \|\varphi\chi_{E_r}\|_\infty \leqslant r\|\chi E_r\|_\infty.$$

因为 $\|\varphi_r\|_\infty$ 非 0 即 1, 故 $\|\varphi_r\|_\infty=0$. 因此 $\mu(E_r)=0$.

在 $p<+\infty$ 时, 任取 E_r 的测度有限子集 E. 以 χ_E 代替 f 得

$$c^p\mu(E) \leqslant \int_E |\varphi|^p d\mu \leqslant (c/2)^p\mu(E).$$

因此 $\mu(E)=0$. 据 μ 的 σ- 有限性得 $\mu(E_r)=0$.

充分性：作 M 上本性有界函数 ψ 使 $s\in E_r$ 时 $\psi(s)=0$ 而 $s\notin E_r$ 时 $\psi(s)=1/\varphi(s)$. 因为 $\psi\varphi\doteq 1$, 所以 $m_\psi m_\varphi=I$, 从而 m_φ 以 m_ψ 为逆算子.

(3) 充分性：取 $(\varphi=0)$ 的可测子集 E 使 $0<\mu(E)<+\infty$, 则 $\varphi\chi_E=0$. 这即 0 是 m_φ 的特征值而 χ_E 为对应的特征向量.

必要性：设 f 为 0 对应的特征向量而 $E=(f\neq 0)$, 则 $\varphi|_E\doteq 0$. 于是

$$\mu(\varphi=0) \geqslant \mu(E) > 0.$$

上例表明 m_φ 的谱与 φ 的值域相类似. 据此引入以下概念.

本性值域 设 (M,μ) 是测度空间而 Y 是可分度量空间. 对于 $f:M\to Y$, 命

$$\operatorname{essran} f = \{y\in Y \mid \forall r>0 : \mu^*(f^{-1}O(y,r))>0\}.$$

这称为 f 的本性值域, 它是 Y 的闭集且 $\operatorname{essran} f \subseteq \overline{\operatorname{ran} f}$.

(1) 本性值域为使 $\mu^*(f^{-1}(Y\setminus E))=0$ 的最小闭集 E.

(2) f 与一个常值映射几乎处处相等当且仅当 $\operatorname{essran} f$ 是单点集.

(3) $Y=\mathbb{C}$ 且 f 可测时, $\|f\|_\infty=\sup\{|z| : z\in\operatorname{essran} f\}$.

(4) 乘法算子 $m_\varphi : L^p(M,\mu)\to L^p(M,\mu)$ 的谱是 $\operatorname{essran}\varphi$.

连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ 关于 Lebesgue 测度的本性值域是其值域. 为此设 $z=f(x_0)$. 设 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 于是 $O(x_0,\delta)\subseteq f^{-1}O(z,\varepsilon)$. 这样 $|f^{-1}O(z,\varepsilon)|_1>0$, 从而 $\operatorname{ran} f\subseteq\operatorname{essran} f$. 反之, 设 z 不在紧集 $\operatorname{ran} f$ 中, 则有 $\varepsilon>0$ 使 $O(z,\varepsilon)\cap\operatorname{ran} f=\varnothing$. 这样 $f^{-1}O(z,\varepsilon)=\varnothing$. 从而 z 不在 $\operatorname{essran} f$ 中.

同样可说明连续函数 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ 关于弧长测度的本性值域是其值域. 于是乘法算子 $U:L^2(\mathbb{T})\to L^2(\mathbb{T}), f(z)\mapsto zf(z)$ 的谱为 $\mathbb{T}$.

例 3 设 $A: H \to H$ 是复 Hilbert 空间上有界线性算子. 记 $B = \lambda I - A$.

(1) 如果 A 是酉算子, 则 $\sigma(A) \subseteq \mathbb{T}$. 为此设 $|\lambda| \neq 1$, 则

$$\|\lambda x - Ax\| \geqslant |\|\lambda x\| - \|Ax\|| = ||\lambda| - 1|\|x\|.$$

这表明正规算子 B 下有界, 据 §7.2 性质 2(4) 知它可逆.

如酉算子 $U: L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}), (Uf)(z) = zf(z)$ 的谱是 $\mathbb{T}$.

(2) 如果 A 是自伴算子, 则 $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$. 为此记 $\lambda = a + \sqrt{-1}b$. 当 $b \neq 0$ 时, $\mathrm{re}\langle\sqrt{-1}bx, (aI - A)x\rangle = 0$. 据勾股定理得

$$\|ax + b\sqrt{-1}x - Ax\|^2 = b^2\|x\|^2 + \|ax - Ax\|^2.$$

因此正规算子 B 下有界, 同上知它可逆. 当 $b = 0$ 且 $|a| > \|A\|$ 时,

$$\|\lambda x - Ax\| \geqslant \|\lambda x\| - \|Ax\| \geqslant (|\lambda| - \|A\|)\|x\|.$$

这表明正规算子 B 下有界, 同上知它可逆.

如自伴算子 $A: L^2[0,1] \to L^2[0,1], (Af)(t) = tf(t)$ 的谱是 $[0,1]$.

(3) 如果 A 是正算子, 则 $\sigma(A) \subseteq [0, \|A\|]$. 为此设 $\lambda < 0$, 则

$$\|(\lambda I - A)x\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|^2 \geqslant \lambda^2\|x\|^2.$$

这表明正规算子 B 下有界, 同上知它可逆.

(4) 如果 A 是投影算子, 则 $\sigma(A) \subseteq \{0,1\}$. 为此设 $0 < \lambda < 1$, 则

$$B = \lambda(I - A) + (\lambda - 1)A,$$

它可逆且其逆算子是 $\lambda^{-1}(I-A)+(\lambda-1)^{-1}A$. 此时需要说明, $\sigma(A) = \{0,1\}$ 当且仅当 $A \neq 0$ 且 $A \neq I$.

以上诸例表明无限维线性空间上线性算子的谱无统一求法. 这与有限维情形大不一样. 尽管如此, 我们会陆续建立一些计算谱的方法. 读者可试证以下结论, 它与线性代数中相关结论是一致的.

定理 1 设线性算子 $A: X \to X$ 与 $B: Y \to Y$ 相似 — 存在线性同构 $U: X \to Y$ 使 $UAU^{-1} = B$, 则 A 与 B 有相同的谱点与相同的特征值.

代数中元素的谱 设 A 是有单位元的复代数. 任取 $x \in A$.

(1) 使 $\lambda - x$ 可逆的复数 λ 称为 x 的 *正则点*, 其全体 $\rho(x)$ 称为 x 的 *预解集*. 命 $R(\lambda) = (\lambda - x)^{-1}$, 则 $R: \rho(x) \to A$ 称为 x 的 *豫解式*.

(2) 使 $\lambda - x$ 不可逆的复数 λ 称为 x 的 *谱点*, 其全体 $\sigma(x)$ 称为 x 的 *谱*. 命 $r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$, 这称为 x 的 *谱半径*.

(3) 设 x 和 y 相似 — 存在可逆元 z 使 $zxz^{-1} = y$, 则 $\sigma(x) = \sigma(y)$.

需要注意, 一般代数中元素无特征值也无特征向量这两个概念.

例 4 在 X 为紧空间且 $f \in C(X)$ 时, $\lambda - f$ 不可逆当且仅当 $\lambda - f$ 有零点 — 存在 $x \in X$ 使 $\lambda = f(x)$. 因此 $\sigma(f) = f(X)$. 这是紧集.

在有限维情形, 方阵有谱点 (即特征值) 相当于说复系数多项式总有零点. 在无限维情形, 谱点的存在性依赖于以下定理.

定理 1(Gelfand) 有单位元的复 Banach 代数 A 中任何元素 x 的谱 $\sigma(x)$ 是复平面上非空紧集, 且成立谱半径公式 $r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

设 T 是复 Banach 空间 X 上有界线性算子. 它既可视为代数 $\mathbf{L}(X)$ 中成员, 又可视为代数 $\mathbf{B}(X)$ 中成员. 当 $\lambda I - T$ 在 $\mathbf{L}(X)$ 中可逆时, 据逆算子定理知其逆算子有界, 因此 $\lambda I - T$ 在 $\mathbf{B}(X)$ 中可逆. 这样 T 相对于 $\mathbf{L}(X)$ 的谱与相对于 $\mathbf{B}(X)$ 的谱一致. 因此, 在讨论谱时将 T 视为 Banach 代数 $\mathbf{B}(X)$ 中成员考察就行了.

例 5 据 §7.2 性质 2(3) 可知正规算子 A 的谱半径 $r(A) = \|A\|$.

Gelfand 定理只描述了谱的大致性质, 但它也能为某些算子的谱提供算法.

例 6 设 M 是复平面上有界开集而 φ 是 M 上有界全纯函数. 求乘法算子 $m_\varphi : A^2(M) \to A^2(M)$ 的谱 (注意当 λ 是复数时, $\lambda I - m_\varphi = m_{\lambda-\varphi}$).

若有 $z \in M$ 使 $\lambda = \varphi(z)$, 则 $f \in A^2(M)$ 时 $(\lambda I - m_\varphi)f$ 在 z 处为零. 因此无 $f \in A^2(\Omega)$ 使 $m_{\lambda-\varphi}f = 1 \in A^2(\Omega)$. 于是 $\lambda I - m_\varphi$ 不是满射. 这样的 λ 是 m_φ 的谱点. 于是 $\varphi(M) \subseteq \sigma(m_\varphi)$. 对 Banach 代数 $B(A^2(\Omega))$ 中算子 m_φ 应用 Gelfand 定理知 $\overline{\varphi(M)} \subseteq \sigma(m_\varphi)$. 如果 λ 不在紧集 $\overline{\varphi(M)}$ 中, 则 $d(\lambda, \varphi(M)) > 0$. 命 $\psi = (\lambda - \varphi)^{-1}$. 这是 M 上有界全纯函数使 $\psi(\lambda - \varphi) = 1$. 这样 $m_\psi m_{\lambda-\varphi}$ 与 $m_{\lambda-\varphi} m_\psi$ 是恒等算子. 于是 $\lambda I - m_\varphi$ 可逆. 从而 λ 不在 $\sigma(m_\varphi)$ 中. 于是 $\overline{\varphi(M)} = \sigma(m_\varphi)$.

使 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0$ 的 x 称为*广义幂零元*, 它只以 0 为谱点. 如积分算子 $V : C[0,1] \to C[0,1]$ 是广义幂零算子, 其中

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt, 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

事实上, $|Vf(x)| \leqslant \int_0^x \|f\|dt = \|f\|x$. 归纳地有 $|V^n f(x)| \leqslant \|f\|x^n/n!$. 于是 $\|V^n\| \leqslant 1/n!$. 这样 V 是广义幂零算子.

定理 2(Gelfand-Mazur) 可除复 Banach 代数与复数域等距代数同构.

用特征可求交换 Banach 代数中元素的谱, 这基于以上和以下定理.

定理 3 设 A 是有单位元的交换复 Banach 代数. 任取 $x \in A$ 与 $\lambda \in \mathbb{C}$, 则 λ 是 x 的谱点当且仅当有特征 $\varphi : A \to \mathbb{C}$ 使 $\varphi(x) = \lambda$.

同一元素在不同代数中的谱可能不一致. 如将 $\mathbb{C}[z]$ 视为 $C(\mathbb{D})$ 的子代数, 则 $2-z$ 在 $C(\mathbb{D})$ 有逆元 $1/(2-z)$. 但 $1/(2-z)$ 不是多项式, 所以 $2-z$ 在 $\mathbb{C}[z]$ 中不可逆. 因此在多个代数出现谱时, 可将代数作为谱和豫解集的下标而写成 $\sigma_A(x)$ 和 $\rho_A(x)$ 以示其确切意义.

定理 4(Silov) 设 A 是 Banach 代数 B 的闭子代数, 并且它们有相同的单位元. 当 $x \in A$ 时, $\partial\sigma_A(x) \subseteq \partial\sigma_B(x)$.

习 题

练习 1 设 $A : l^0 \to l^0$ 是对角算子 — 存在复数列 (a_n) 使恒有

$$A(x_1, x_2, \cdots) = (a_1x_1, a_2x_2, \cdots).$$

此时称复数列 (a_n) 是 A 的对角线. 试证明:

(1) 对角算子的线性组合和复合都是对角算子.

(2) 对角算子 A 是恒等算子当且仅当其对角线都是 1.

(3) 对角算子 A 可逆当且仅当其对角线无零点. 此时 A^{-1} 是对角算子.

(4) 对角算子 A 的谱点与特征值恰是 A 的对角线中的数.

练习 2 设 $A : l^2 \to l^2$ 是对角算子 — 存在复数列 (a_n) 使恒有

$$A(x_1, x_2, \cdots) = (a_1x_1, a_2x_2, \cdots),$$

则 (a_n) 是有界数列且 $\|A\| = \sup\limits_{n\geqslant 1} |a_n|$. 此时称 (a_n) 是 A 的对角线.

(1) 证明对角算子的线性组合和复合都是对角算子.

(2) 证明对角算子 A 是恒等算子当且仅当其对角线都是 1.

(3) 证明对角算子 A 可逆当且仅当其对角线下有界. 此时 A^{-1} 是对角算子.

(4) 求对角算子 A 的谱点和特征值.

练习 3 设 Hilbert 空间 H 而 $A : H \to H$ 是有界线性算子. 如果 H 有个规范直交基 $\{e_i | i \in J\}$ 使每个 e_i 都是 A 的特征向量, 则称 A 是可对角化的算子. 设 $Ae_i = a_ie_i$. 证明:

(1) (a_i) 是有界数组且 $\|A\| = \sup\limits_{i\in J} |a_i|$.

(2) A 可逆当且仅当 $\inf\limits_{i\in J} |a_i| > 0$. 此时 A^{-1} 也是可对角化算子.

(3) λ 是 A 的特征值当且仅当有 i 使 $\lambda = a_i$.

(4) λ 是 A 的谱点当且仅当 λ 是 $\{a_i | i \in J\}$ 的聚点.

练习 4 设 X 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 可测集并在其上取 Lebesgue 测度 $\mathbf{m}$. 当 $x \in X$ 时, 命 $O(x,r) = \{y \in X : |y-x| < r\}$. 作 $\mathbb{R}^n$ 的子集

$$\overline{X}^e = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall r > 0 : \mathbf{m}(O(x,r)) > 0\}.$$

这称为 X 的本性闭包(参见 §2.2 练习 20). 下设 $X \subseteq \overline{X}^e$, 证明:

(1) 使 $f \doteq 0$ 的连续函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 满足 $f = 0$.

(2) 使 $g \dot{\leqslant} h$ 的下半连续函数 $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 和上半连续函数 $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 满足

$$g(x) \leqslant h(x) : x \in X.$$

(3) 当 f 是 X 上的连续函数时, $\operatorname{essran} f = \overline{\operatorname{ran} f}$.

(4) 当 f 是 X 上的连续函数时, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

练习 5 设 $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ 是连续函数, 求乘法算子 $m_\varphi : C[0,1] \to C[0,1]$ 的谱点与特征值.

练习 6 求左移算子 $S_+ : l^2 \to l^2$ 的谱点与特征值.

练习 7 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是线性算子 $A : X \to X$ 的互异特征值, $x_1, \cdots, x_n$ 是它们对应的特征向量. 试证明 $x_1, \cdots, x_n$ 线性无关.

练习 8 命 $S(\cdots, x_{-1}, [x_0], x_1, \cdots) = (\cdots, x_{-2}, [x_{-1}], x_0, \cdots)$ (方括号所在的项为第零项), 证明平移算子 $S : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ 是酉算子. 求 S 的谱.

练习 9(Jacobson) 设 A 是有单位的代数. 对于 $x, y \in A$ 及非零数 λ, 则 $\lambda - xy$ 可逆当且仅当 $\lambda - yx$ 可逆. 换言之,

$$\rho(xy) \setminus \{0\} = \rho(yx) \setminus \{0\},$$
$$\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\},$$

从而 $r(xy) = r(yx)$.

练习 10 构造两个有界线性算子 S 与 T 使 ST 与 TS 的谱不同.

练习 11 设 A 是有单位的复 Banach 代数, 证明 $x, y \in A$ 时 $xy - yx \neq 1$.

练习 12(Reid 不等式) 设 A 和 B 是 Hilbert 空间 H 上有界线性算子. 设 A 是正算子而 AB 是自伴算子, 则 $x \in H$ 时,

$$|\langle ABx, x\rangle| \leqslant r(B)\langle Ax, x\rangle.$$

* **练习 13** 设 A 是有单位的复 Banach 代数. 证明谱作为 A 上多值函数上半连续：当 V 是复平面上开集时，$\sigma^{-1}(V) := \{x \in A | \sigma(x) \subseteq V\}$ 是 A 中开集.

* **练习 14** 设 A 是有单位的复 Banach 代数，证明谱半径作为函数 $r : A \to \mathbb{R}$ 上半连续.

练习 15 设 A 是有单位的复 Banach 代数. 如果有正实数 c 使 $x, y \in A$ 时 $\|x\|\|y\| \leqslant c\|xy\|$，证明 A 与 $\mathbb{C}$ 等距同构.

练习 16 证明 Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 上乘法算子 m_z 没有特征值.

练习 17 证明：对任何有理数 r 成立 $f(x) \doteq f(x+r)$ 的 Lebesgue 可测函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 与一个常数函数几乎处处相等.

练习 18(P. R. Halmos, A. L. Shields) Hilbert 空间 X 上有界线性算子 A 与一个函数 Hilbert 空间上乘法算子酉等价当且仅当 A^* 的全体特征向量张成的线性子空间稠于 X.

练习 19 求函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 关于一维 Lebesgue 测度的的本性值值域.

练习 20 设 x 和 y 是有单位元的复 Banach 代数 A 中两个交换元素，证明：

$$r(x+y) \leqslant r(x) + r(y).$$

练习 21 当 $a \in l^1(\mathbb{N})$ 且复数 z 使 $|z| \leqslant 1$ 时，命 $f(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$. 证明 a 在 $l^1(\mathbb{N})$ 中可逆当且仅当 f 无零点. 此时有 $b \in l^1(\mathbb{N})$ 使 $1/f(z) = \sum\limits_{n} b_n z^n$.

练习 22 设 A 是线性空间 X 上线性算子. 如果 λ 是 A^n 的特征值，证明 λ 的 n 次方根中至少有一个是 A 的特征值.

练习 23 设 X 是复 Banach 空间而 $A : X \to X$ 是有界线性算子. 如果 $\lambda \neq \mu$，证明 A 相应于 λ 的特征向量 x 与 A^* 相应于 μ 的特征向量 f 正交：$f(x) = 0$.

练习 24 设 H 是复 Hilbert 空间而 $A : X \to X$ 是有界线性算子. 如果 $\lambda \neq \overline{\mu}$，证明 A 相应于 λ 的特征向量 x 与 A^* 相应子 μ 的特征向量 y 直交：$\langle x, y \rangle = 0$.

§8.2 紧算子与 Fredholm 算子

使有界集的像集为列紧集的线性算子 $A: X \to Y$ 称为 紧算子, 它有界且其值域可分. 如有限秩算子 $A: X \to Y$(值域维数有限的有界线性算子) 是紧算子.

例 1 考虑连续函数 $K: [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ 诱导的积分算子

$$A: C[a,b] \to C[a,b], (Af)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy.$$

任取 $C[a,b]$ 中有界集 M, 记 $L = \sup\limits_{f \in M} \|f\|$. 对于 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 使 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|K(x_1,y) - K(x_2,y)| < \varepsilon$. 当 $f \in M$ 时,

$$|\int (K(x_1,y) - K(x_2,y))f(y)dy| \leqslant L(b-a)\varepsilon.$$

因此 $|Af(x_1) - Af(x_2)| < L(b-a)\varepsilon$. 故像集 $A(M)$ 有界且等度连续. 由 Arzela-Asoli 定理知 $A(M)$ 是列紧集. 这样 A 是紧算子.

(1) 两个紧算子 $A_1, A_2: X \to Y$ 的线性组合 $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ 是紧算子. 因此 X 到 Y 的紧算子全体 $\mathbf{K}(X,Y)$ 是 $\mathbf{B}(X,Y)$ 的线性子空间.

(2) 设算子 $A: X \to Y$ 与 $B: Y \to Z$ 中一个有界而另一个紧, 则复合 BA 是紧算子. 因此 $\mathbf{K}(X) := \mathbf{K}(X,X)$ 是 $\mathbf{B}(X)$ 的理想, 简称 紧算子理想.

(3) 在 Y 完备时, $\mathbf{K}(X,Y)$ 按算子范数完备. 特别地, $\mathbf{K}(Y)$ 为闭理想.

定理 1(Schauder, 1930) 设 $A: X \to Y$ 是有界线性算子. 如果 A 是紧算子, 则共轭 A^* 是紧算子. 逆命题在 Y 完备时成立.

如果 Banach 空间之间的两个算子 $A_1, A_2: X \to Y$ 相差一个紧算子, 则称它们互为 紧摄动. 记为 $A_1 \sim A_2$ 或 $A_1 \equiv A_2 \mod \mathbf{K}$.

(1) 紧摄动是 $B(X,Y)$ 上一个等价关系.

(2) 如果 $A_1 \sim A_2$, 则 $A_1^* \sim A_2^*$. 反之也对.

(3) 如果 $A_1 \sim A_2$ 且 $B_1 \sim B_2$, 则 $aA_1 + bB_1 \sim aA_2 + bB_2$.

(4) 如果 $A_1 \sim A_2$ 且 $B_1 \sim B_2$, 则 $B_1 A_1 \sim B_2 A_2$.

引理 2 设 B 是 Banach 空间 X 上恒等算子 I 的紧摄动.

(1) 如果 L 是 X 的闭线性子空间, 则 $B(L)$ 也是闭线性子空间.

(2) $\dim \operatorname{cok} B = \dim \ker B^* = \dim \ker B < +\infty$.

以下是紧算子谱的 Riesz-Schauder 理论.

定理 3(Riesz-Schauder) 设 A 是复 Banach 空间 X 上紧算子, 则

(1) X 是无限维空间时, 0 是 A 的谱点.

(2) A 的非零谱点 λ 都是它的特征值且其特征子空间维数有限.

(3) A 的谱 $\sigma(A)$ 是至多可列集且可列时只以 0 为聚点.

(4) A 与 A^* 有相同的非零谱点 λ 且相应的特征子空间维数相同.

(5) λ 是 A 的非零谱点时, 方程 $(\lambda I - A)x = y$ 可解当且仅当 y 与 A^* 相应于 λ 的任何特征向量 f 正交: $f(y) = 0$.

(6) λ 是 A 的非零谱点时, 共轭方程 $(\lambda I - A^*)f = g$ 可解当且仅当 g 与 A 相应于 λ 的任何特征向量 x 正交: $g(x) = 0$.

如果 A 是 X 上有限秩算子, 则 $\sigma(A)$ 必是有限集. 事实上, 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 $\sigma(A)$ 中不同的非零点, 则它们都是 A 的特征值, 各取一个相应的特征向量 $x_1, \cdots, x_n$. 则它们线性无关并且都在 $\operatorname{ran}(A)$ 中. 这样有 $n \leqslant \dim \operatorname{ran} A$. 这表明 $\sigma(A)$ 只多有 $\dim \operatorname{ran} A + 1$ 个点.

例 2 设 $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ 是一个 Volterra 核 — 它是有界 Borel 函数且 $x < y$ 时 $K(x,y) = 0$, 则它诱导一个 Volterra 算子

$$V : L^2[a,b] \to L^2[a,b], (Vf)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy.$$

它是紧算子. 下面求 V 的谱. 首先用归纳法证得

$$(V^{n+1})f(x)| \leqslant \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} \cdots \int_a^{x_n} |f(t)|dt.$$

因为 $\int_a^{x_n} |f(t)|dt \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2$, 所以

$$|V^{n+1}f(x)| \leqslant \frac{c^{n+1}(b-a)^{1.5}\|f\|_2}{n!},$$

故 $\|V^{n+1}f\|_2 \leqslant \dfrac{c^{n+1}(b-a)^2}{n!}\|f\|_2$. 这表明 $\lim\limits_{n\to\infty} \|V^{n+1}\|^{\frac{1}{n+1}} = 0$. 从而 V 是广义幂零算子, 并且 $\sigma(V) = \{0\}$. 特别 V 无非零特征值.

(1) 设 K 是 $[0,1] \times [0,1]$ 的子集 $\{(x,y)|y < x \wedge 1/2\}$ 的特征函数. 取 f 为区间 $[0,1]$ 的子集 $(1/2, 1]$ 的特征函数, 知 $Vf = 0$. 此时, 0 是 V 的特征值.

(2) 取 K 为 $\{(x,y)|y \leqslant x\}$ 的特征函数, 则由 $\int_0^x f(y)dy = 0$ 得 $f = 0$. 此时, 0 不是 V 的特征值.

将定理 3 应用至正规紧算子上可得以下定理.

定理 4 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上紧算子.

(1) 复数 λ 是 A 的谱点当且仅当 $\overline{\lambda}$ 是 A^* 的谱点.

(2) 设 λ 是 A 的非零谱点，则 $\ker(\lambda I - A)$ 与 $\ker(\overline{\lambda} I - A^*)$ 维数相同.

(3) 设 λ 是 A 的非零谱点，则方程 $(\lambda I - A)x = y$ 可解当且仅当 y 与 A^* 相应于 $\overline{\lambda}$ 的任何特征向量 z 正交：$\langle y, z\rangle = 0$.

(4) 设 λ 是 A 的非零谱点，则共轭方程 $(\lambda I - A^*)y = x$ 可解当且仅当 x 与 A 相应于 $\overline{\lambda}$ 的任何特征向量 z 正交：$\langle x, z\rangle = 0$.

正规阵酉等价于一个对角阵，以下结论推广了这一思想.

定理 5 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上正规紧算子而 $\sigma(A) = \{\lambda_k\}$.

(1) 记 $E_k = \ker(\lambda_k I - A)$, 则 H 有直交分解 $H = \bigoplus\limits_k E_k$.

(2) 设 P_k 是 E_k 对应的投影算子，则 $\sum\limits_k \lambda_k P_k$ 依算子范数收敛于 A.

(3) H 有个规范直交基 $\{e_i\}$, 它由 A 的特征向量构成.

现将 Banach 空间之间的有界线性算子简称为算子. 算子 A 可逆的条件为 $\ker A$ 与 $\operatorname{cok} A$ 是平凡的. 放宽此条件可得以下结论.

定理 6 对于 Banach 空间之间的算子 $A: X \to Y$, 以下条件等价：

(1) $\ker A$ 和 $\operatorname{cok} A$ 是有限维的. 此时称 A 是 Fredholm 算子并规定 A 的指标是 $\operatorname{ind} A = \dim\ker A - \dim\operatorname{cok} A$.

(2) A 有闭值域，并且 $\ker A$ 与 $\ker A^*$ 的维数都有限. 此时

$$\operatorname{ind} A = \dim\ker A - \dim\ker A^*.$$

(3) A 有闭值域且 A^* 是 Fredholm 算子. 此时 $\operatorname{ind} A^* = -\operatorname{ind} A$.

(4) 有算子 $B: Y \to X$ 使 $I - BA$ 与 $I - AB$ 是有限秩幂等算子.

(5) 有算子 $B: Y \to X$ 使 $I - BA$ 与 $I - AB$ 是有限秩算子. 此时

$$\operatorname{ind} A = \dim\operatorname{ran}(I - BA) - \dim\operatorname{ran}(I - BA).$$

(6) 有算子 $B: X \to Y$ 使 $I - BA$ 与 $I - AB$ 是紧算子. 此时称 B 是 A 的一个仿逆，它也是 Fredholm 算子且 $\operatorname{ind} B = -\operatorname{ind} A$.

仿逆不必唯一，这与逆算子的唯一性有明显区别. 但仿逆在紧摄动的意义下是唯一的，这见以下性质 7(1).

性质 7 设 A 是 Fredholm 算子而 B 是 A 的仿逆.

(1) B_1 是 A 的仿逆当且仅当 B_1 是 B 的紧摄动.

(2) $\operatorname{ind} A = 0$ 当且仅当 A 是一个可逆算子 A_1 的紧摄动.

(3) $\operatorname{ind} A = 0$ 当且仅当 A 与一个可逆算子 A_1 之差是有限秩算子.

可见指标是 Fredholm 算子与一个可逆算子相互紧摄动的障碍.

例 3 左右平移 $S_\pm : l^p \to l^p$ 是 Fredholm 算子且 $\operatorname{ind} S_\pm = \pm 1$. 这是因为 $\ker S_+ = \mathbb{C}e_1$ 而 $\operatorname{cok} S_+ = \{0\}$; $\ker S_- = \{0\}$ 而 $\operatorname{cok} S_- \cong \mathbb{C}e_1$.

例 4 例 3 中, $I - S_-S_+$ 是以 $\mathbb{C}e_1$ 为投影子空间的投影算子而 $I = S_+S_-$. 这样 S_+ 与 S_- 互为仿逆.

称 $A_t : 0 \leqslant t \leqslant 1$ 是连结 A_0 与 A_1 的 Fredholm 算子道路是指 A_t 都是 Fredholm 算子且 $t \mapsto A_t$(依范数) 连续.

性质 8 (1) 指标的可加性 (Atkinson): 两个 Fredholm 算子 $A : X \to Y$ 与 $B : Y \to Z$ 的复合 $BA : X \to Z$ 是 Fredholm 算子且

$$\operatorname{ind}(AB) = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B.$$

(2) 指标的紧摄动不变性: 设 A_1 是 Fredholm 算子 A_0 的紧摄动, 则 $A_0 + t(A_1 - A_0) : 0 \leqslant t \leqslant 1$ 都是 Fredholm 算子且它们有相同指标.

(3) 指标的同伦不变性: 如果有 Fredholm 算子道路 $A_t : 0 \leqslant t \leqslant 1$ 连接 A_0 与 A_1, 则 $\operatorname{ind} A_0 = \operatorname{ind} A_1$.

这些性质结合以下定理可求一些复杂算子的指标.

定理 9(Dieudonné) Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的 Fredholm 算子全体 $\mathbf{F}(X, Y)$ 是 $\mathbf{B}(X, Y)$ 的开集, 其连通分支也是开集. 进而

(1) 指标映射 $\operatorname{ind} : \mathbf{F}(X, Y) \to \mathbb{Z}$ 是局部常值函数 (因而连续).

(2) 核维数 $\dim\ker : \mathbf{F}(X, Y) \to \mathbb{Z}$ 是上半连续函数.

(3) 余核维数 $\dim\operatorname{cok} : \mathbf{F}(X, Y) \to \mathbb{Z}$ 是上半连续函数.

在用以上定理求指标时, 指标函数的连续性极为重要.

例 5 对于平移 $S_\pm : l^p \to l^p$ 及复数 λ, 讨论 $\lambda I - S_\pm$ 的本质可逆性.

(1) 在 $|\lambda| > 1$ 时, $\lambda I - S_\pm$ 可逆, 所以 $\operatorname{ind}(zI - S_\pm) = 0$.

(2) 在 $|\lambda| < 1$ 时, 因为 S_- 与 S_+ 互为仿逆, 所以

$$\lambda I - S_\pm \sim (\lambda S_\mp - I)S_\pm.$$

注意到 $\|\lambda S_\mp\| < 1$, 知 $\lambda S_\mp - I$ 是可逆算子. 据性质 8(1) 知 $\lambda I - S_\mp$ 是 Fredholm 算子且 $\operatorname{ind}(\lambda I - S_\pm) = \operatorname{ind} S_\pm = \pm 1$.

(3) 在 $|\lambda|=1$ 时，$\lambda I-S_{\pm}$ 都不是 Fredholm 算子. 否则, 如果 $\lambda I-S_{+}$ 是 Fredholm 算子，则据指标的连续性得

$$\operatorname{ind}(\lambda I-S_{+})=\lim_{z\to\lambda}(\operatorname{ind}(zI-S_{+}):|z|<1)=1,$$
$$\operatorname{ind}(\lambda I-S_{+})=\lim_{z\to\lambda}(\operatorname{ind}(zI-S_{+}):|w|>1)=0.$$

矛盾. 这样 $\lambda I-S_{\pm}$ 是 Fredholm 算子当且仅当 $|\lambda|\neq 1$.

习 题

练习 1 设 X 是自反空间. 有界线性算子 $A:X\to Y$ 是紧算子当且仅当 X 中序列 (x_n) 弱逼近 0 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\|Ax_n\|=0$.

练习 2 证明 §8.1 练习 2 中的对角算子 A 为紧算子当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

练习 3 如果 Banach 空间 X 有个 Schauder 基 $\{e_n|n\geqslant 1\}$, 证明 X 上每个紧算子 A 可由有限秩算子按范数逼近.

练习 4 设 (X,μ) 及 (Y,ν) 是全 σ- 有限测度空间. 设 $K:X\times Y\to\mathbb{C}$ 是可测函数，$1<p<+\infty$ 且 q 是 p 的共轭数. 如果

$$\int_X\Big(\int_Y|K(x,y)|^q\nu(dy)\Big)^{\frac{p}{q}}\mu(dx)<+\infty,$$

试证明积分算子 $K:L^p(Y)\to L^p(X)$ 是紧算子，其中

$$(Kf)(x)=\int_Y K(x,y)f(y)\nu(dy),f\in L^p(Y).$$

练习 5 设 A 是复 Banach 空间 X 上紧算子而 λ 是非零复数. 证明：对任何 $[x]\in X/\ker(\lambda I-A)$, 存在 $x'\in[x]$ 使 $\|x'\|=\|[x]\|$.

练习 6 设 T 是复 Banach 空间 X 上紧算子. 当 1 不是 T 的特征值时，方程 $x-Tx=y$ 对任何 y 有唯一解.

练习 7 乘法算子 $m_\varphi:L^2[0,1]\to L^2[0,1]$ 为紧算子时是零算子.

练习 8 定义函数 $K:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ 与线性算子 $A:L^2[0,1]\to L^2[0,1]$ 如下：

$$K(x,y)=\begin{cases}(1-x)y: y\leqslant x;\\(1-y)x: x\leqslant y.\end{cases}$$

$$(Af)(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y):f\in L^2[0,1].$$

证明：(1) λ 是 A 的特征值当且仅当有正整数 n 使 $\lambda=1/(n\pi)^2$. 此时，相应的特征子空间是 $\mathbb{C}\sin(n\pi\cdot)$.

(2) A 是正的紧算子且其算子范数为 π^{-2}.

练习 9 当 $0<\alpha<\beta\leqslant 1$ 时，证明包含映射 $A:C^{0,\beta}[a,b]\to C[a,b]$ 和包含映射 $B:C^{0,\beta}[a,b]\to C^{0,\alpha}[a,b]$ 都是紧算子.

练习 10 设 X_i 和 Y_i 是 Banach 空间，作 l^1 积 $X=X_1\times X_2$ 及 $Y=Y_1\times Y_2$. 设 $T_i:X_i\to Y_i$ 是有界线性算子，作有界线性算子 $T:X\to Y$ 使 $T(x_1,x_2)=(T_1x_1,T_2x_2)$. 证明 $\|T\|=\|T_1\|\vee\|T_2\|$. 进而证明 T 是紧算子当且仅当每个 T_i 是紧算子.

练习 11(Douglas) 设 $A:X\to Y$ 及 $B:W\to Y$ 是 Banach 空间之间的有界线性算子使 $\operatorname{ran}A\subseteq\operatorname{ran}B$ 且 B 是单射，则有有界线性算子 $C:X\to W$ 使 $A=BC$.

练习 12 设 $A:X\to Y$ 及 $B:W\to Y$ 是 Banach 空间之间的有界线性算子使 $\operatorname{ran}A\subseteq\operatorname{ran}B$. 如果 B 是紧算子，证明 A 是紧算子.

练习 13 设 X 是自反空间，证明有界线性算子 $A:X\to l^1$ 是紧算子.

练习 14 命 Af 是 f 的导函数，求 $A:C^1[a,b]\to C[0,1]$ 的指标.

练习 15 设 X 是自反空间而算子 $A:X\to Y$ 的共轭算子 A^* 为 Fredholm 算子，证明 A 也是 Fredholm 算子.

练习 16 证明在 §7.2 练习 1 的条件 (3) 下， A 是紧算子.

* **练习 17** 设 H 是 Hilbert 空间而 $A:H\to H$ 是紧算子. 命 $X=\{x\in H:\|x\|\leqslant 1\}$ 及 $f(x)=\langle Ax,x\rangle$，证明 $f:X\to\mathbb{C}$ 是弱连续函数.

练习 18 设 $A:X\to Y$ 是单的线性算子而 $B:Y\to Z$ 是满的线性算子使 $\operatorname{ran}A=\ker B$，证明线性维数 $\dim Y=\dim X+\dim Z$.

练习 19 设 $A: X \to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子. 证明以下条件等价:

(1) A 是单射.

(2) 存在算子 $B: Y \to X$ 使 $BA = I$.

(3) A 是满射.

(4) 存在算子 $B: Y \to X$ 使 $AB = I$.

练习 20(Banach 闭值域定理) 设 $A: X \to Y$ 是 Banach 空间之间有界线性算子, 则以下条件等价:

(1)A 有闭值域 (此时称 A 是正规能解算子).

(2)A 满足 Fredholm 二择性: $(\ker A)^{\perp} = \operatorname{ran} A^*$ 且 ${}^{\perp}(\ker A^*) = \operatorname{ran} A$.

(3)A 满足先验估计: $\exists b > 0, \forall x \in X: \|Ax\| \geqslant bd(x, \ker A)$.

练习 21 设 $A_i: X \to Y$ 是线性空间之间的线性算子恒使 $\operatorname{ran} A_{i-1} = \ker A_i$, 则称 $\cdots X_{i-1} \xrightarrow{A_{i-1}} X_i \xrightarrow{A_i} X_{i+1} \cdots$ 为正合序列.

试证明任何线性算子 $A: X \to Y$ 都诱导了正合序列

$$0 \xrightarrow{0} \ker A \xrightarrow{\eta} X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{\pi} \operatorname{cok} A \xrightarrow{0} 0,$$

其中 η 是包含映射, π 是自然射影.

练习 22 设 L, X, Y 是 Banach 空间. 设 $A: L \to X$ 及 $B: X \to Y$ 是有界线性算子. 证明以下条件等价:

(1) 序列 $0 \xrightarrow{0} L \xrightarrow{A} X \xrightarrow{B} Y \xrightarrow{0} 0$ 是正合序列.

(2) 序列 $0 \to Y^* \xrightarrow{B^*} X^* \xrightarrow{A^*} L^* \xrightarrow{0} 0$ 是正合序列.

练习 23 证明算子 $A: X \to Y$ 使 $\operatorname{cok} A$ 是有限维的当且仅当 $\ker A^*$ 是有限维的且 A 有闭值域. 此时 $\ker A^* \cong \operatorname{cok} A$ 且 $\operatorname{ran} A$ 拓扑可补.

练习 24 设 L 是 Banach 空间 X 的闭线性子空间, 证明 $(X/L)^{**}$ 与 X^{**}/L^{**} 等距同构.

练习 25 设 X 是 Banach 空间, 证明线性算子 $B: X \to \mathbf{c}_0$ 有界当且仅当 X 上有弱 *- 收敛于 0 的连续线性泛函序列 (f_n) 使 $Bx = (f_n(x))_{n=1}^{\infty}$. 此时 $\|B\| = \sup\limits_{n \geqslant 1} \|f_n\|$.

练习 26 命 B 与 (f_n) 同练习 25, 证明 B 是紧算子当且仅当 (f_n) 强收敛于 0.

练习 27 设 X 和 Y 是 Banach 空间, 证明有界线性算子 $A: X \to Y$ 是紧算子当且仅当有紧算子 $B: X \to \mathbf{c}_0$ 使 $x \in X$ 时, $\|Ax\| \leqslant \|Bx\|$.

* **练习 28(推广的 Dini 定理)** 设 H 是 Hilbert 空间而自伴紧算子 $A_i: H \to H$ 递增至自伴紧算子 $A: H \to H$, 证明 A_i 按算子范数逼近 A.

练习 29 设 $A, B: X \to Y$ 是 Banach 空间之间有界线性算子.

(1) 如果 A 有闭值域且是单射，证明有 $r > 0$ 使 $\|B - A\| < r$ 时，B 也有闭值域且是单射. 举例说明这个结论在 A 无闭值域时不成立.

(2) 如果 X 和 Y 是自反空间且 A 是满射，证明有 $r > 0$ 使 $\|B - A\| < r$ 时，B 也是满射.

练习 30 设 $A: X \to Y$ 是 Banach 空间之间的有界线性算子. 如果 Z 是 Banach 空间使有单的紧算子 $B: X \to Z$, 证明以下条件等价：

(1) 先验估计：有常数 $c > 0$ 使 $\|Ax\| + \|Bx\| \geqslant c\|x\|$.

(2) A 有闭值域且 $\ker A$ 是有限维的.

§8.3 函数演算与谱

计算谱的一个有效方法是函数演算. 这包括关于多项式的演算、关于全纯函数的演算和关于连续函数的演算.

(一) 设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上有单位的代数而 $f(z)$ 是系数在 $\mathbb{K}$ 中的多项式 $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$. 当 $x \in A$ 时，命 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. 这称为 x 相对于 f 的*函数演算*. 它保持保持代数运算：设 a 与 b 是数而 f 与 g 是多项式，则

$$(af + bg + fg)(x) = af(x) + bg(x) + f(x)g(x).$$

定理 1(谱映射定理) 设 $f(z)$ 是复系数多项式而 x 是有单位复代数 A 中的元素. 当 λ 取遍 x 的谱点时，$f(\lambda)$ 取遍 $f(x)$ 的谱点，即 $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$.

例 1 求 L^2-Fourier 变换 $F: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的谱点与特征值. 为此设 λ 是 F 的谱点，由 $F^4 = I$ 与谱映射定理知 $\lambda^4 = 1$. 据 §5.5 例 3 知 1 的四次方根都是 F 的特征值. 于是 F 的谱点都是特征值，它们是 ± 1 和 $\pm\sqrt{-1}$.

(二) 设 $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ 是复平面中可求长闭路 — 使 $\gamma(a) = \gamma(b)$ 的连续有界变差函数. 它关于点 $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ 的*绕数*为以下整数：

$$n(\gamma; z) = \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{2\pi\sqrt{-1}(\lambda - z)}.$$

作为 z 的函数，$n(\gamma, z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ 的 [无界] 连通分支上是常数 [零].

对于有限条相互不交的可求长闭路 γ_i 与整数 c_i, 作闭链 $\gamma=\sum\limits_{i=1}^{k}c_i\gamma_i$ 与子集 $\{\gamma\}=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\{\gamma_i\}$. 闭链 γ 关于 $z\in\Omega\setminus\{\gamma\}$ 的绕数$n(\gamma;z)=\sum\limits_{i=1}^{k}c_in(\gamma_i;z)$. 作 γ 的内部$\operatorname{ins}\gamma=\{z|n(\gamma;z)=1\}$ 与外部$\operatorname{out}\gamma=\{z|n(\gamma;z)=0\}$. 如果 $n(\gamma;z)$ 非 0 即 1, 则称 γ 是正定向闭链.

设 A 是有单位的复 Banach 代数而 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的开集. 如果某个 $x\in A$ 的谱 $\sigma(x)$ 含于 Ω 中, 对于全纯函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$, 取 $\operatorname{dom}f$ 中正定向闭链 γ 使 $\sigma(x)\subseteq\operatorname{ins}\gamma$ 而 $\mathbb{C}\setminus\Omega\subseteq\operatorname{out}\gamma$. 命

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma\frac{f(z)}{z-x}dz.$$

它不依赖于以上闭链 γ 的选取, 称为 x 关于 f 的 Riesz 函数演算.

(1) g 也是定义域包含 $\sigma(x)$ 的全纯函数时, $(fg)(x)=f(x)g(x)$.

(2) a 与 b 是复数且 g 同 (1) 时, $(af+bg)(x)=af(x)+bg(x)$.

(3) $f(z)=\sum\limits_{n\geqslant0}a_nz^n$ 的收敛半径 $r>r(x)$ 时, $f(x)=\sum\limits_{n\geqslant0}a_nx^n$.

(4) $f(z)$ 恒为数 1 时, $f(x)=1$; $g(z)$ 恒为 z 时, $g(x)=x$.

(5) (f_n) 是紧一致逼近 f 的全纯函数列时, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

定理 2(谱映射定理) 设 A 是有单位的复 Banach 代数而 $x\in A$. 如果全纯函数 f 定义在谱 $\sigma(x)$ 的一个开邻域内, 则 $\sigma(f(x))=f(\sigma(x))$. 换言之, λ 取遍 x 的谱点时, $f(\lambda)$ 取遍 $f(x)$ 的谱点.

当 $F:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^2)$ 是 Fourier 变换 (见例 1) 时, 据谱映射定理知 $\exp(F)$ 与 $\exp(\sqrt{-1}F)$ 的谱都是 $\{\mathrm{e},\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{\sqrt{-1}},\mathrm{e}^{-\sqrt{-1}}\}$.

例 2 设 Banach 代数 A 中两个元素 x 与 y 交换: $xy=yx$, 则

(1) $(x+y)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{n!x^iy^{n-i}}{i!(n-i)!}$, 此处 n 是自然数.

(2) $\exp(x+y)=\exp x\exp y$(请读者用上面的结论证明此式).

(3) $\exp(\sqrt{-1}x)=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$(这也称为 Euler 公式).

(4) $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.

(5) $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$.

(6) $(\exp x)^{-1}=\exp(-x)$. 这是因为据 (2) 得

$$\exp(-x)\exp(x)=\exp(x)\exp(-x)=\exp(-x+x)=1.$$

谱映射定理有以下推论, 这是有关 C^*- 代数的重要结论.

定理 3 设 A 是有单位元的 C^*- 代数.

(1) 设 u 是 A 中酉元: $u^*u = uu^* = 1$, 则 $\|u\| = 1$ 且 $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T}$.

(2) 设 x 是 A 中自伴元: $x = x^*$, 则 x 的谱点都是实数.

(3) 设 φ 是 A 上的特征, 则 $\varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}$ 恒成立.

当 A 是 B 的子代数时, 对于 $x \in A$ 何时成立 $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$? 这个问题在 C^*- 代数范畴内有令人满意的答案.

定理 4 设 A 是 C^*- 代数 B 的 C^*- 子代数且两者有相同的单位元. 任取 $x \in A$, 则 x 相对于 A 与 B 的谱一致: $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

(三) 设 $A : H \to H$ 是 Hilbert 空间上正规算子. 从 C^*- 代数 $C(\sigma(A))$ 到 $\mathbf{B}(H)$ 有唯一同态 $f \mapsto f(A)$ 使 $\zeta(A) = A$, 其中 $\zeta(z) = z$. 将 $f(A)$ 称为 A 关于连续函数 f 的*函数演算*.

(1) f 是多项式 $\sum a_{ij} z^i \bar{z}^j$ 时, $f(A) = \sum a_{ij} A^i A^{*j}$.

(2) $f(A)$ 是正规算子且 $\|f(A)\| = \|f\|$.

(3) $f(A)$ 是自伴算子当且仅当在 $\sigma(A)$ 上 f 是实函数.

(4) $f(A)$ 是正算子当且仅当在 $\sigma(A)$ 上 $f \geqslant 0$.

(5) $f(A)$ 酉算子当且仅当在 $\sigma(A)$ 上 $|f| = 1$.

(6) $f(A)$ 是投影算子当且仅当 $\sigma(A)$ 有个既开又闭的子集 E 使 f 是 E 的特征函数 (在复平面上, E 是闭集但非开集).

(7) f 是全纯函数 $g : \Omega \to \mathbb{C}$ 在 σA 上的限制时, $f(A) = g(A)$.

(8) 在 A 是正规紧算子时, $f(A) = \sum\limits_{\lambda} f(\lambda) P_\lambda$(符号见 §4.2 定理 5).

(9) 如果 (8) 中, $f(0) = 0$, 则 $f(A)$ 是紧算子.

定理 5(谱映射定理) 设 A 是正规算子而 $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ 是连续函数, 则 λ 取遍 A 的谱点时, $f(\lambda)$ 取遍 $f(A)$ 的谱点, 即 $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

当 A 是正算子时, $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$. 将 A 关于上非负连续函数 $z \mapsto z^t$(其中 $t \geqslant 0$) 的函数演算记为 A^t. 这是正算子. 对于自然数 n, 将 $A^{\frac{1}{n}}$ 称为 A 的 n 次方根, 记为 $\sqrt[n]{A}$. 它们有以下性质:

(1) $0 < t < +\infty$ 时, $\ker A = \ker A^t$ 且 $\overline{\operatorname{ran}}\, A = \overline{\operatorname{ran}}\, A^t$.

(2) $s, t \geqslant 0$ 时, $A^s A^t = A^{s+t}$ 且 $(A^s)^t = A^{st}$.

正算子是非负实数的推广而部分等距则是模 1 复数的推广. 复数 z 都有极坐标 $z = \exp(\sqrt{-1}t)|z|$. 这个思想推广可得以下重要结论.

定理 6(极分解) 设 $T: X \to Y$ 是复 Hilbert 空间之间的有界线性算子. 记 $|T| = \sqrt{T^*T}$ 记为 $|T|$, 则有唯一部分等距 $U: X \to Y$ 使 U^*U 与 UU^* 分别以 $\overline{\operatorname{ran}} T^*$ 与 $\overline{\operatorname{ran}} T$ 为投影子空间, $T = U|T|$ 且 $|T| = U^*T$.

(四) 设 H 和 X 是 Hilbert 空间而 $J: H \to X$ 是等距算子. 如果 $A: H \to H$ 和 $B: X \to X$ 是有界线性算子使 $A = J^*BJ$, 称 B 为 A 的一个膨胀. 此时若将 H 视为 X 的子空间而 J 视为包含映射, B 是 A 的膨胀当且仅当在直交分解 $X = H \oplus H^{\perp}$ 下, B 的分块阵表示 $[B_{ij}]_{2\times 2}$ 中 $B_{11} = A$.

例 3 $[\frac{1}{i+j}]_{4\times 4}$ 是 $[\frac{1}{i+j}]_{2\times 2}$ 的一个膨胀.

有时也要考虑一簇算子 $(A_i: H \to H)_{i\in J}$ 的膨胀 $(B_i: X \to X)_{i\in J}$, 通常取性质较好的膨胀来获得原来算子的一些信息.

习 题

练习 1 (1) 设 x 是代数 A 中幂等元 (即 $x^2 = x$), 证明 $\sigma(x) \subseteq \{0,1\}$. 何时 $\sigma(x) = \{0\}$? 何时 $\sigma(x) = \{1\}$? 何时 $\sigma(x) = \{0,1\}$?

(2) 设 p 和 q 是代数 A 中两个幂等元, 证明 $p+q$ 是幂等元当且仅当 p 与 q 直交 (即 $pq = qp = 0$).

(3) 设 $p_1, \cdots, p_n$ 是相互直交的非零幂等元. 证明数组 $a_1, \cdots, a_n$ 使线性组合 $a_1p_1 + \cdots + a_np_n$ 可逆当且仅当 $p_1 + \cdots + p_n = 1$ 并且 a_i 都非零.

练习 2 设 A 是有单位的 Banach 代数. 如果 A 中有两个元 x 和 y 对任何实数 t 满足 $\exp(tx)y = y\exp(tx)$, 证明 x 和 y 交换: $xy = yx$.

练习 3 证明有单位的复 Banach 代数 A 在以下条件之一是交换的:

(1) 有正实数 c 使 $\|xy\| \leqslant c\|yx\|$ 恒成立 (Le Page, 1967).

(2) 有正实数 c 使 $\|x\| \leqslant cr(x)$ 恒成立 (Le Page, 1967).

(3) 有常数 c 使 $\|x\|^2 \leqslant c^2\|x^2\|$ 恒成立 (Le Page, Hirschfeld-Zelazko).

(4)A 是有限维的且 A 中只有零元是幂零元.

练习 4 设 $A: H \to H$ 是正规算子. 设 $1 < p < +\infty$ 而 q 是 p 的共轭数. 设 f 与 g 是 $\sigma(A)$ 上非负连续 (可测) 函数. 对于 $x \in H$, 证明

(1) $\langle f(A)g(A)x, x\rangle \leqslant \langle f(A)^p x, x\rangle^{\frac{1}{p}} \langle g(A)^q x, x\rangle^{\frac{1}{q}}$.

(2) $\langle (f(A)+g(A))^p x, x\rangle^{\frac{1}{p}} \leqslant \langle f(A)^p x, x\rangle^{\frac{1}{p}} + \langle g(A)^p x, x\rangle^{\frac{1}{p}}$.

练习 5 设 x 是复代数 A 中元且 f 是复系数多项式使 $f(x) = 0$, 试证明 x 的谱点 λ 都是 f 的根.

练习 6 设 A 与 B 是复 Hilbert 空间 H 上正算子, 则 AB 是正算子当且仅当 $AB=BA$.

练习 7(函数演算的连续性) 设 M 是复平面的紧集而 $f: M \to \mathbb{C}$ 是连续函数. 当复 Hilbert 空间 H 上正规算子 A 和 A_0 的谱都在 M 上时,

$$\lim_{A\to A_0} \|f(A)-f(A_0)\|=0.$$

练习 8 设复 Banach 空间 X 上有界线性算子 A 关于某个全纯函数 f 的函数演算 $f(A)$ 是紧算子. 如果 $\sigma(A)$ 是不可数集, 证明 f 限制在某点的一个邻域内是常数函数.

练习 9 设 H 是 Hilbert 空间而 $T: H \to H$ 是压缩算子 (即 $\|T\| \leqslant 1$, 每个向量 x 的像 Tx 长度不增长), 证明 T 的不动点也是 T^* 的不动点.

练习 10 设 T 是 Hilbert 空间 H 上压缩算子, $\ker(I-T)$ 对应投影算子 P. 设 $a_{nk}: n,k \in \mathbb{N}$ 是非负实数簇使 $n \geqslant 0$ 时, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}=1$ 且

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n0}+\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}-a_{n,k-1}|)=0.$$

证明 (1) $k\in\mathbb{N}$ 时, $T^kP=PT^k=P$.

(2) $x\in H$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{nk}T^kx=Px$.

(3) $x\in H$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{T^kx}{n}=Px$(平均遍历定理).

(4) $0<b_n<1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n(1-b_n)=0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}(b_nI+(1-b_n)T)^nx=Px.$$

练习 11 设 H 是 Hilbert 空间而 $T: H \to H$ 是有界线性算子. 设数 λ 使 $|\lambda|=\|T\|$. 如果 L 是 $\ker(\lambda I-T)$ 的闭线性子空间而 P 是 L 对应的投影算子, 证明 $TP=PT=\lambda P$. 特别地, L 约化 T.

练习 12 设线性算子 $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ 有矩阵表示

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

说明 $\|T\|\neq 1$. $L=\ker(I-T)$, 求 P 对应的矩阵. 说明 $PT\neq T$.

练习 13 Hilbert 空间 X 和 Y 酉同构当且仅当有个具有稠密值域的单的有界线算子 $A: X \to Y$.

练习 14 设 L 和 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间使 $L \cap M^{\perp} = 0$, 证明 $\dim L \leqslant \dim M$.

* **练习 15(Fuglede-Putnam 定理)** 设 $M: X \to X$ 和 $N: Y \to Y$ 是 Hilbert 空间上的正规算子而 $B: X \to Y$ 是有界线性算子使 $BM = NB$, 则 $BM^* = N^*B$.

* **练习 16(Douglas)** 条件同练习 15, 则 $\ker B$ 和 $\overline{\operatorname{ran}} B^*$ 都约化 M 而 $\ker B^*$ 和 $\overline{\operatorname{ran}} B$ 都约化 N. 进而限制 $M_1 = (M : \overline{\operatorname{ran}} B^* \to \overline{\operatorname{ran}} B^*)$ 和限制 $N_1 = (N : \overline{\operatorname{ran}} B \to \overline{\operatorname{ran}} B)$ 酉等价.

* **练习 17(Putnam)** 两个相似的正规算子 $M: X \to X$ 和 $N: Y \to Y$ 是酉等价的.

* **练习 18(Halmos)** 复 Hilbert 空间上压缩算子 $T: H \to H$ 有个膨胀 U 是酉算子. 此时称 U 为 T 的 酉膨胀.

* **练习 19(Nagy)** 复 Hilbert 空间上压缩算子 $T: H \to H$ 有个酉膨胀 U 使非负整数 n 对应的 U^n 是 T^n 的酉膨胀而 U^{*n} 是 T^{*n} 的酉膨胀.

* **练习 20(von Neumann-Heinz 不等式)** 绝对收敛的复值级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 确定的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 记为 $f(z)$. 设 $|z| \leqslant 1$ 时 $|f(z)| \leqslant 1$ (或 $\operatorname{re} f(z) \geqslant 0$). 如果 T 是复 Hilbert 空间上压缩算子, 则 $\|f(T)\| \leqslant 1$(或 $\operatorname{re} f(T) \geqslant 0$).

练习 21 证明复 Hilbert 空间 H 上压缩正算子 A 有个膨胀 P 为投影算子.

练习 22 设 A 和 B 分别是 Hilbert 空间 H 和 X 上的有界线性算子且 $H \subseteq X$, 证明以下条件等价:

(1) B 是 A 的延拓 — 当 $x \in H$ 时, $Bx = Ax$.

(2) B 是 A 的膨胀且 B^*B 是 A^*A 的膨胀.

(3) $B^{*i}B^j$ 是 $A^{*i}A^j$ 的膨胀, 其中 i, j 是非负整数.

* **练习 23(Frobenius)** 有限维实可除代数 A 与 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 和 $\mathbb{H}$ 之一同构.

§8.4 无界线性算子

讨论无界算子的有效工具是图像. 以 $A : X \circ\!\!\rightarrow Y$ 表示映射 A 的定义域 $\operatorname{dom} A$ 是 X 的子集, 其图像 $\operatorname{gr} A$ 是 $X \times Y$ 的子集 $\{(x, Ax) | x \in \operatorname{dom} A\}$.

称 $A : X \circ\!\!\rightarrow Y$ 是 *闭算子* 是指 $\operatorname{gr} A$ 是 $X \times Y$ 的闭集. 这相当于 $\operatorname{dom} A$ 中序列 (x_n) 收敛于 x 而 (Ax_n) 收敛于 y 时, $x \in \operatorname{dom} A$ 且 $y = Ax$. 这里的定义推广了 §6.5 中相关概念, 主要是这里不要求算子定义域是全空间.

例 1 作线性算子 $D : C[0,1] \circ\!\!\rightarrow C[0,1]$ 使 $\operatorname{dom} D = C^1[0,1]$ 且 Df 为 f 的导函数, 则 D 是闭算子. 为此作半范数 $p : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ 为

$$p(f, g) = \max\{|f(x) - f(0) - \int_0^x g(t)dt| : 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

因为 $p(f, g) \leqslant 2(\|f\| + \|g\|)$, 所以 $\operatorname{gr} D = \ker p$ 是闭的.

因为 $C^1[0,1]$ 包含所有多项式, 所以据 Weierstrass 定理知上例中的算子 D 的定义域 D 在 $C[0,1]$ 中稠密. 一般地, 使 $\operatorname{dom} A$ 稠于 X 的线性算子 $A : X \circ\!\!\rightarrow Y$ 称为 *稠定算子*. 下设 W 是 $X \times Y$ 的非空子集.

(1) 有映射 $A : X \circ\!\!\rightarrow Y$ 使 $W = \operatorname{gr} A$ 当且仅当每个截口 W_x 是单点集或空集. 此时 A 的定义域 $\operatorname{dom} A = \{x | W_x \neq \varnothing\}$ 而值域 $\operatorname{ran} A = \{y | W^y \neq \varnothing\}$.

(2) 有线性算子 $A : X \circ\!\!\rightarrow Y$ 使 $W = \operatorname{gr} A$ 当且仅当 W 是线性子空间且不含形如 $(0, y)$ 的非零向量. 此时 $\ker A = W^0$.

(3) 回顾 §1.2 的事实: 映射 $B : X \circ\!\!\rightarrow Y$ 是映射 $A : X \circ\!\!\rightarrow Y$ 的扩张当且仅当 $\operatorname{gr} A \subseteq \operatorname{gr} B$. 此时记 $A \subseteq B$.

(4) 如果 B 是闭算子且是 A 的扩张, 称 B 是 A 的 *闭扩张*. 此时, $\operatorname{gr} A$ 的闭包满足 $\overline{\operatorname{gr}} A \subseteq \operatorname{gr} B$. 于是每个截口 $(\overline{\operatorname{gr}} A)_x \subseteq (\operatorname{gr} B)_x$. 这样 $(\overline{\operatorname{gr}} A)_x$ 是单点集或空集. 因此有个映射 $\overline{A} : X \circ\!\!\rightarrow Y$ 使 $\operatorname{gr} \overline{A} = \overline{\operatorname{gr}} A$. 此时 $\overline{A}$ 是 A 的最小闭扩张. 这说明有闭扩张的算子必有最小闭扩张.

(5) 因为线性子空间的闭包是线性子空间, 所以线性算子的最小闭扩张 (若存在) 也是线性算子. 但线性算子的一般闭扩张不必是线性算子.

共轭算子 设 $A : X \circ\!\!\rightarrow Y$ 是 Hilbert 空间之间的稠定算子, 命

$$E = \{y \in Y | \operatorname{dom} A \ni x \mapsto \langle Ax, y \rangle \text{是连续泛函}\}.$$

据 Riesz 表示定理, 任何 $y \in E$ 对应唯一 $A^*y \in X$ 恒使 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$. 称 $A^* : Y \circ\!\!\rightarrow X$ 为 A 的 *共轭算子*. 它是闭线性算子使 $Y = \ker A^* \oplus \overline{\operatorname{ran}} A$.

约定 $\operatorname{rg} A = \{(-Ax, x) | x \in \operatorname{dom} A\}$, 则共轭算子有以下特征刻画.

定理 1 设 $A: X \circ\!\!\rightarrow Y$ 是 Hilbert 空间之间线性算子，则 A 是稠定算子当且仅当有唯一映射 $A^*: Y \circ\!\!\rightarrow X$ 满足以下等价条件之一：

(1) 有直交分解 $Y \times X = \operatorname{gr} A^* \oplus \overline{\operatorname{rg}} A$(即 $X \times Y = \operatorname{rg} A^* \oplus \overline{\operatorname{gr}} A$).

(2) $\operatorname{dom} A^* = \{y | \exists c \geqslant 0 \forall x \in \operatorname{dom} A : |\langle Ax, y\rangle| \leqslant c\|x\|\}$ 且

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle : x \in \operatorname{dom} A, y \in \operatorname{dom} A^*.$$

以 $C_c^\infty(\Omega)$ 记 Euclid 空间的开集 Ω 上紧支撑的光滑函数全体 (参见 §3.5 练习 1). 下面用此空间讨论一个 *自伴算子*— 与其共轭相等的算子.

例 2 命 $(Af)(t) = tf(t)$, 记 $L = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \|Af\|_2 < +\infty\}$. 注意到 $f_n(t) = t^n e^{-t^2}$ 时，$\|Af_n\|_2^2 = (2n+1)\|f_n\|^2/4$. 定义域为 L 的算子 $A: L^2(\mathbb{R}) \circ\!\!\rightarrow L^2(\mathbb{R})$ 是无界的而 L 包含稠密集 $C_c^\infty(\mathbb{R})$. 当 $f, g \in L$ 时，

$$\int tf(t)\overline{g(t)}dt = \int f(t)\overline{tg(t)}dt.$$

这表明 $g \in \operatorname{dom} A^*$ 且 $A^*g = Ag$. 反之取 $g \in \operatorname{dom} A^*$, 则 $f \in L$ 时

$$\int f(t)(\overline{tg(t)})dt = \int f(t)\overline{(A^*g)(t)}dt.$$

由 L 的稠密性知 $tg(t) \doteq (A^*g)(t)$. 于是 $g \in L$. 可见 $A^* = A$.

当 $B: X \circ\!\!\rightarrow Y$ 是稠定算子 $A: X \circ\!\!\rightarrow Y$ 的扩张 (此处及以后都指线性延拓) 时，A^* 是 B^* 的扩张.

性质 2 设 $A: X \circ\!\!\rightarrow Y$ 是复 Hilbert 空间之间的稠定算子.

(1) A^* 是稠定的当且仅当 A 有闭扩张. 此时 $A^{**} = \overline{A}$ 而 $A^{***} = A^*$.

(2) A 是闭算子时，A^* 是稠定的且 $A^{**} = A$.

(3) A 是闭算子时，A 有界当且仅当 A 是整体定义的：$\operatorname{dom} A = X$.

在 $A: X \circ\!\!\rightarrow Y$ 是单射时，以 $A^{-1}: Y \circ\!\!\rightarrow X$ 记定义域为 $\operatorname{ran} A$ 的映射使 $A^{-1}(Ax) = x$. 显然，$\operatorname{gr} A^{-1} = \operatorname{rg}(-A)$ 且 $\operatorname{rg} A^{-1} = \operatorname{gr}(-A)$.

定理 3 既单又满的稠定算子 $A: X \circ\!\!\rightarrow Y$ 是闭算子当且仅当 A 是逆有界的 — 存在 (唯一) 有界线性算子 $B: Y \to X$ 使 $BA \subseteq I$ 且 $AB = I$. 此时称 B 为 A 的 *有界逆*.

规定 $A: X \circ\!\!\rightarrow Y$ 与 $B: Y \circ\!\!\rightarrow Z$ 的复合 $BA: X \circ\!\!\rightarrow Z$ 的定义域是 $A^{-1}(\operatorname{dom} B)$. 当 BA 与 B 稠定时，A 也稠定且 $A^*B^* \subseteq (BA)^*$.

对于数 λ 与线性算子 A, 约定数乘 λA 与 A 的定义域相同. 如果 λ 非零且 A 是稠定算子，则 $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

约定和差 $A_1 \pm A_2$ 定义在 A_1 与 A_2 的公共定义域上. 如果 $A_1 \pm A_2$ 是稠定算子，则 $A_1^* \pm A_2^* \subseteq (A_1 \pm A_2)^*$.

例 3 当 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 时, 以 f' 记 f 的导函数并命 $Df = f'/(2\pi\sqrt{-1})$. 试用 Fourier 变换 $F: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 这个酉算子讨论 $D: L^2(\mathbb{R}) \circ\!\!\to L^2(\mathbb{R})$ 与其共轭算子. 为此取 $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(x)}{2\pi\sqrt{-1}}\overline{g(x)}dx = \left.\frac{f(x)\overline{g(x)}}{2\pi\sqrt{-1}}\right|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\left(\frac{g'(x)}{2\pi\sqrt{-1}}\right)}dx,$$

这即 $\langle Df, g\rangle = \langle f, Dg\rangle$. 因此 $D \subseteq D^*$, 从而 D 有闭扩张.

据 §3.5 性质 5(5) 知 $FDf = AFf$, 其中 A 同例 1. 于是 $D \subseteq F^*AF$, 从而 $F^*AF \subseteq D^*$. 当 $g \in \operatorname{dom} D^*$ 时,

$$\langle f, D^*g\rangle = \langle Df, g\rangle = \langle F^*AFf, Fg\rangle = \langle AFf, Fg\rangle.$$

因此 $(AF)^*(Fg) = D^*g$. 于是 $D^* \subseteq F^*AF$. 这样 $F^*AF = D^*$. 可见 D^* 是自伴算子.

一般地, A^* 自伴当且仅当 $\overline{A} = A^{**}$, 此时称 A 为本性自伴算子.

定理 4 设 $A: X \circ\!\!\to Y$ 是稠定闭算子, 则

(1) A^*A 是自伴算子且 $I + A^*A: X \to X$ 是逆有界正算子.

(2) AA^* 是自伴算子且 $I + AA^*: Y \to Y$ 是逆有界正算子.

(3) $\operatorname{gr} A$ 有个稠密集 $L = \{(x, Ax) | x \in \operatorname{dom} A^*A\}$.

(4) A 与 A^* 都是单射时, A^{-1} 与 $(A^*)^{-1}$ 都是稠定闭算子且

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

使 $A^*A = AA^*$ 的稠定闭算子 $A: H \circ\!\!\to H$ 称为正规算子. 此时 A^* 也是正规算子且 $\operatorname{dom} A = \operatorname{dom} A^*$ 及 $\|Ax\| = \|A^*x\|$ 恒成立.

定理 5 设 $A_i: H \to H (i \in J)$ 是一簇有界正规算子使 $i \neq j$ 时,

$$A_i^*A_j = A_iA_j^* = 0.$$

记 $L = \{x \in H : \sum_{i\in J} \|A_ix\|^2 < +\infty\}$. 当 $x \in L$ 时, 命

$$Ax = \sum_{i\in J} A_ix,$$

则 $A: H \circ\!\!\to H$ 是正规算子且 $x \in L$ 时, $A^*x = \sum A_i^*x$. 进而

$$\operatorname{dom} A^*A = \{x | \sum_{i\in J} \|A_i^*A_ix\|^2 < +\infty\}$$

且 $A^*Ax = \sum_{i\in J} A_i^*A_ix$.

这个定理中构造正规算子的方法在无界函数谱积分中发挥重要作用.

例 4 设 φ 是全 σ- 有限测度空间 (M,μ) 上的可测函数，命

$$L=\{f\in L^2(M,\mu)|\varphi f\in L^2(M,\mu)\}.$$

使 $\operatorname{dom} m_\varphi=L$ 且 $m_\varphi f=\varphi f$ 的线性算子 $m_\varphi: L^2 \circ\!\!\rightarrow L^2$ 是正规算子.

为此, 命 $E_n=(n-1\leqslant|\varphi|<n)$, 这得到 M 的一个可测划分 $\{E_n|n\geqslant 1\}$. 命 $A_nf=\varphi f\chi_{E_n}$, 则 $A_n: L^2(M,\mu)\to L^2(M,\mu)$ 是正规算子. 算得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|A_nf\|_2^2=\int_M|\varphi f|^2d\mu.$$

按定理 5 的方法得到的正规算子 A 的定义域是 $\{f\in L^2|\varphi f\in L^2\}$ 且 $A=m_\varphi$. 进而 $A^*=m_{\overline{\varphi}}$. 因此 m_φ 是正规算子.

也可这样说明 m_φ 是稠定闭算子：L 包含 $\operatorname{span}_{n\geqslant 1} L^2(E_n,\mu)$, 这在 $L^2(M,\mu)$ 中稠密. 从而 m_φ 是稠定的. 任取 $(g,h)\in \operatorname{gr} m_\varphi^*$, 则 $\langle\varphi f,g\rangle=\langle f,h\rangle$. 由 L 的稠密性知 $\overline{\varphi}g=h$. 于是 $g\in L$. 这表明 $\operatorname{dom} m_\varphi^*=L$.

因此 $m_\varphi^*=m_{\overline{\varphi}}$ 及 $m_{\overline{\varphi}}^*=m_\varphi$. 所以 m_φ 是闭的.

这个例子结合 Fouier 变换可使我们讨论更多的微分算子.

例 5 设算子 $D: L^2(\mathbb{R}^n)\circ\!\!\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ 将 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (在一个紧集外为零的光滑函数全体) 映至 $\partial^\alpha f/(2\pi\sqrt{-1})^{|\alpha|}$. 多次用分部积分知, 对于 $f,g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有 $\langle Df,g\rangle=\langle f,Dg\rangle$. 这说明 $D\subseteq D^*$.

命 $(Af)(x)=x^\alpha f(x)$. 由例 4 知， A 是自伴算子. 像例 3 一样用 L^2-Fourier 变换可说明 D^* 是自伴算子，从而 D 是本性自伴算子.

若将例 5 中 D 的定义域换一下，则 D 可能不是本性自伴算子.

例 6 设 $D: L^2(0,1)\circ\!\!\rightarrow L^2(0,1)$ 将 $f\in C_c^\infty(0,1)$ 映至 $\sqrt{-1}f'$. 像例 5 一样， $D\subseteq D^*$. 于是 $\overline{D}\subseteq D^*$. 下说明 $\overline{D}\neq D^*$.

当 $f\in C_c^\infty(0,1)$ 时， $\langle Df,1\rangle=\langle f,0\rangle$. 因此 $D^*1=0$. 如果 1 在 $\overline{D}$ 的定义域中，则 $\overline{D}1=D^*1=0$. 从而有 C_c^∞ 中序列 f_n 使

$$\lim\|f_n-1\|_2=\|\sqrt{-1}f_n'-0\|_2=0.$$

但 $|f_n(x)|=|\int_0^x f_n'(t)dt|\leqslant\|f_n'\|_2$. 这表明 (f_n) 一致逼近 0, 矛盾.

使 $A\subseteq A^*$ 的稠定算子 $A: H\circ\!\!\rightarrow H$ 称为对称算子. 这相当于

$$x,y\in\operatorname{dom}A:\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle.$$

本性自伴算子是对称算子. 反之不然，如例 6 中的微分算子 D.

Cayley 变换 设 H 是复 Hilbert 空间. 对于线性算子 $A: H \circ\!\!\rightarrow H$ 与线性算子 $U: \operatorname{ran}(A+\sqrt{-1}I) \rightarrow \operatorname{ran}(A-\sqrt{-1}I)$, 以下两条等价:

(1) A 是对称算子且 $U=(A-\sqrt{-1}I)(A+\sqrt{-1}I)^{-1}$.

(2) U 是等距同构, $\overline{\operatorname{ran}}(I-U)=H$ 且 $A=\sqrt{-1}(I+U)(I-U)^{-1}$.

此时称 A 与 U 互为 Cayley 变换. 直交维数对

$$(m_+, m_-)=(\dim(\operatorname{ran}(A+\sqrt{-1}I))^{\perp}, \dim(\operatorname{ran}(A-\sqrt{-1}I))^{\perp})$$

称为对称算子 A 的亏指数. 它们有以下性质:

(3) A 是闭算子当且仅当 U 的定义域与值域是闭的.

(4) A 是自伴算子当且仅当 U 是 H 到 H 的酉算子.

(5) A 有界且自伴当且仅当 $I-U: H \rightarrow H$ 可逆 (因而逆算子有界).

(6) A 有自伴扩张当且仅当其亏指数满足 $m_+=m_-$.

(7) $\overline{A}$ 与 $\overline{U}: \overline{\operatorname{ran}}(A+\sqrt{-1}I) \rightarrow \overline{\operatorname{ran}}(A-\sqrt{-1}I)$ 互为 Cayley 变换.

实数 λ 的 Cayley 变换是模 1 复数 $(\lambda-\sqrt{-1})/(\lambda+\sqrt{-1})$. 这也是 Cayley 变换的基本思想. 显然, A 与 $\overline{A}$ 的亏指数相等. 例 2 中算子 A 的 Cayley 变换 U 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上酉算子. 显然 $(Uf)(t)=(t-\sqrt{-1})f(t)/(t+\sqrt{-1})$.

稠定算子的谱 设 $A: H \circ\!\!\rightarrow H$ 是复 Hilbert 空间上稠定算子.

(1) 使 $\lambda I-A$ 逆有界的复数 λ 称为 A 的正则点, 其全体 $\rho(A)$ 称为 A 的预解集 (这是复平面的开集).

(2) 将 A 的预解集的余集 $\sigma(A)$ 称为 A 的谱 (这是复平面的非空闭集).

(3) 使 $Ax=\lambda x$ 的非零向量 x 称为特征值 λ 对应的特征向量而 $\ker(\lambda I-A)$ 称为 λ 对应的特征子空间.

有种可能是 $\lambda I-A$ 可逆但逆无界. 此情形在 $\operatorname{dom} A=H$ 且 A 有界时不会发生, 因为逆算子原理蕴含 $\lambda I-A$ 的逆有界.

定理 6 复数 λ 是自伴算子 $A: H \circ\!\!\rightarrow H$ 的谱点当且仅当 $(\lambda-\sqrt{-1})/(\lambda+\sqrt{-1})$ 是 A 的 Cayley 变换 $U: H \rightarrow H$ 的非 1 谱点. 此时, λ 是实数.

例 2 中算子 A 的谱是 $\mathbb{R}$. 由例 3 知 D 的谱也是 $\mathbb{R}$. 这样 A 与 D 的 Cayley 变换的谱是 $\{(t-\sqrt{-1})(t+\sqrt{-1})^{-1} | t \in \mathbb{R}\}$ 的闭包. 这即 $\mathbb{T}$.

习 题

练习 1 设 X 和 $Y_1,\cdots,Y_n$ 都是度量空间. 如果 $A_i:X\circ\!\!\rightarrow Y_i$ 是闭算子且它们的定义域有公共交点, 证明 $A:X\circ\!\!\rightarrow Y_1\times\cdots\times Y_n$ 是闭算子, 其中

$$\forall x\in \operatorname{dom}A_1\cap\cdots\cap\operatorname{dom}A_n: Ax=(A_1x,\cdots,A_nx).$$

* **练习 2** 作稠定算子 $A:L^2(\mathbb{R}^n)\circ\!\!\rightarrow \bigoplus\limits_{|\alpha|\leqslant m}L^2(\mathbb{R}^n)$ 使 $\operatorname{dom}A=C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且当 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时, $Af=(\partial^\alpha f/\sqrt{-1}^{|\alpha|})_{|\alpha|\leqslant m}$. 试证明 A 有闭扩张, 其最小闭扩张的定义域记为 W^m 并在 W^m 上规定内积

$$\langle f,g\rangle_m=\langle Af,Ag\rangle.$$

这使 W^m 成为 Hilbert 空间, 称为 Sobolev 空间.

练习 3 设 A 是自伴算子而 B 为 A 的对称扩张, 证明 $A=B$.

练习 4 设 $\{e_i\}$ 是 Hilbert 空间 H 的规范直交基. 对于复数簇 (a_i), 命

$$L=\{x\in H|\sum_{i\in J}|a_i\langle x,e_i\rangle|^2<+\infty\}.$$

当 $x\in L$ 时, 命 $Ax=\sum\limits_i a_i\langle x,e_i\rangle$. 证明:

(1) A 是稠定的正规算子, 称 A 可对角化.

(2) 0 是 A 的正证明点当且仅当 $\inf\limits_{i\in J}|a_i|>0$.

(3) λ 是 A 的特征值当且仅当有 i 使 $\lambda=a_i$.

(4) 当 $a_i:i\in J$ 互异时, a_i 的特征子空间是一维的.

练习 5 设 $A:H\circ\!\!\rightarrow H$ 是稠定闭算子, 证明 λ 是 A 的正则点当且仅当 $\lambda I-A:\operatorname{dom}A\rightarrow H$ 可逆当且仅当 $\overline{\lambda}$ 是 A^* 的正则点.

练习 6 设 $A:H\circ\!\!\rightarrow H$ 是对称算子, a 和 b 是实数而 $c=a+\sqrt{-1}b$. 证明:

(1) $\|cx-Ax\|^2=\|ax-Ax\|^2+b^2\|x\|^2$.

(2) A 是闭算子且 $b\neq 0$ 时, $A-cI$ 有闭值域.

(3) 对称算子 $A:H\circ\!\!\rightarrow H$ 的最小闭扩张是对称算子.

练习 7 设 $A:H\circ\!\!\rightarrow H$ 是单的对称闭算子, 证明 A^{-1} 是有界自伴算子 (从而 A 是自伴算子).

练习 8 设 $A: H \circ\!\!\rightarrow H$ 是复 Hilbert 空间上稠定算子.

(1) A 逆有界时, 证明存在 $r > 0$ 使 $\|B\| < r$ 时, $A + B$ 逆有界且

$$(A+B)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-A^{-1}B)^n)A^{-1}.$$

(2) $\rho(A)$ 是开集, 它非空时证明 A 的豫解式 R 是 $\rho(A)$ 上的全纯函数.

(3) 构造一个稠定闭算子使其谱为空集.

练习 9 设 $A: H \circ\!\!\rightarrow H$ 是对称闭算子, 证明 $\dim\ker(A^* - cI)$ 在 $\mathrm{im}\, c > 0$ 和 $\mathrm{im}\, c < 0$ 时分别是常值的.

练习 10 证明对称闭算子 $A: H \circ\!\!\rightarrow H$ 的谱有且仅有以下 4 种可能:

(1) $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

(2) $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{im}\, \lambda \geqslant 0\}$.

(3) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

(4) $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \mathrm{im}\, \lambda \leqslant 0\}$.

练习 11 设 H 是 Hilbert 空间而 $A: H \circ\!\!\rightarrow H$ 是对称闭算子, 证明 (1)A 是自伴算子当且仅当 (2)$\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ 当且仅当 (3)$A^* \pm \sqrt{-1}I$ 都是单射.

练习 12 设对称闭算子 $A: H \circ\!\!\rightarrow H$ 的谱不包含 $\mathbb{R}$, 证明 A 是自伴算子.

练习 13 对称算子的特征值都是实数且不同特征值对应的特征向量直交.

练习 14 陈述稠定闭算子的极分解.

练习 15 证明正规的对称算子 $A: X \circ\!\!\rightarrow X$ 是自伴的.

练习 16(Lindsay) 找个稠定算子 $A: l^2 \circ\!\!\rightarrow l^2$ 使 $\mathrm{gr}\, A$ 在 $l^2 \times l^2$ 中稠密. 此时, A^* 有什么特征?

练习 17 当 $f \in L^2[0,1]$ 时, 命 $(Af)(t) = tf(t)$. 使导函数平方可积的绝对连续函数 $f: [0,1] \to \mathbb{C}$ 全体记为 L, 对这样的 f 命 $Df = f'$. 试说明 $D: L^2[0,1] \circ\!\!\rightarrow L^2[0,1]$ 是稠定算子且 $DA - AD \subset I$.

练习 18 证明 $L^2(\mathbb{R})$ 有个规范直交基 $\{h_n | n = 0, 1, 2, \cdots\}$, 其中

$$h_n(x) = \frac{\sqrt[4]{2}\exp(\pi x^2)(\exp(-2\pi x^2))^{(n)}}{\sqrt{(4\pi)^n n!}}.$$

练习 19 设 X 和 Y 是内积空间而 $A: X \to Y$ 和 $B: Y \to X$ 是映射使

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle : x \in X, y \in Y.$$

称 A 和 B 互为形式共轭，记 $B = A^{\#}$. 说明 A 和 B 都是闭线性算子.

练习 20 以 $\mathbf{S}$ 表示 Schwartz 空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 它作为 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间而成为内积空间. 设 $F: \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ 是 Fourier 变换:

$$(Ff)(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-2\pi\sqrt{-1}xy)f(y)dy.$$

命 $(Df)(x) = \sqrt{-1}f'(x)$ 及 $(Mf)(x) = xf(x)$. 又命

$$\begin{aligned}(Af)(x) &= -f''(x) + 4\pi^2x^2f(x),\\ (Bf)(x) &= 2\pi xf(x) + f'(x).\end{aligned}$$

这得 $\mathbf{S}$ 上的微分算子 D, M, B, A(将 M 视为零阶微分算子).

(1) 证明 $DM - MD = \sqrt{-1}I$, $DF = 2\pi FM$ 且 $FD = -2\pi MF$.

(2) 求 $D^{\#}, M^{\#}, B^{\#}$ 并证 $A = B^{\#}B + 2\pi I$ 且 $BB^{\#} - B^{\#}B = 4\pi I$.

(3) 练习 18 中的 h_n 满足 $Ah_n = (4n\pi + 2\pi)h_n$.

(4) Fourier 变换 F 与算子 A 可交换:　$FA = AF$.

练习 21 符号同练习 20, 但将 D, M, A, B 视为 $L^2(\mathbb{R})$ 上的稠定算子.

(1) 说明 A 和 B 有闭延拓，将它们的闭延拓记为 A_0 和 B_0.

(2) 说明 $A_0 = B_0^*B_0 + 2\pi I$ 且 $B_0B_0^* = B_0^*B_0 + 4\pi I$.

(3) 证明 A_0 是可对角化的算子 (提示：参考练习 4, 练习 18 和练习 20).

(4) 证明 A_0 是满的正算子且 $A_0^{-1}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 是紧算子并求其谱.

(5) 证明 Fourier 变换 F 与算子 A_0 可交换:　$FA_0 = A_0F$.

(6) 练习 18 中的 h_n 满足 $Fh_n = \sqrt{-1}^n h_n$.

* **练习 22** 设 X 和 $Y_i : i \in J$ 都是拓扑空间. 如果闭算子簇 $A_i : X \circ\!\!\to Y_i$ 的公共定义域非空，证明 $A : X \circ\!\!\to \prod_{i\in J} Y_i$ 是闭算子，其中

$$\forall x \in \bigcap_{i\in J} \operatorname{dom} A_i : Ax = (A_ix)_{i\in J}.$$

§8.5 谱测度与积分

从线性代数知，正规阵可以对角化. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶正规阵 A 的特征值，则有个酉矩阵 U 使 $A = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U$, 其中 diag 表示对角阵. 作投影阵 $P_i = U^* \operatorname{diag}(0, \cdots, 1, \cdots, 0)U$, 这是以 λ_i 的特征子空间为投影子空间的投影算子. 于是 A 有谱分解 $A = \sum \lambda_i P_i$.

正规算子是正规阵的推广，希望它也可谱分解. 考虑到求和相当于积分，而积分需要测度. 对于 σA 的子集 E, 命 $P(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_E(\lambda_i) P_i$. 可将 P 视为 $2^{\sigma A}$ 上投影矩阵值的测度. 这引出以下概念.

谱测度 设集类 $\mathcal{R}$ 是以 M 为基本空间的代数， H 是复 Hilbert 空间. 设算子值集函数 $\mathbf{p} : \mathcal{R} \to B(H)$ 满足以下条件:

(1) 当 $E \in \mathcal{R}$ 时， $\mathbf{p}(E)$ 是投影算子且 $\mathbf{p}(M) = I$,

(2) 当 $\{E_n\}$ 是 E 的可测划分时， $(\mathrm{SOT})\sum\limits_{i\geqslant 1} \mathbf{p}(E_i) = \mathbf{p}(E)$,

称 $\mathbf{p}$ 是一个谱测度，它有以下性质:

(3) 当 $E, F \in \mathcal{R}$ 时， $\mathbf{p}(E)$ 与 $\mathbf{p}(F)$ 交换且 $\mathbf{p}(E)\mathbf{p}(F) = \mathbf{p}(E \cap F)$.

(4) 当 $x, y \in H$ 时， $E \mapsto \langle \mathbf{p}(E)x, y\rangle$ 是 $\mathcal{R}$ 上复值测度.

(5) $\mathbf{p}$ 在 σ- 代数 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 上有唯一谱测度延拓.

如果 $\mathcal{S}$ 是 M 上 σ- 代数而 $\mathbf{p}$ 是其上谱测度，则称 $(M, \mathcal{S}, \mathbf{p})$ 是谱测度空间. 这可简记为 $(M, \mathbf{p})$.

例 1 设 $(M, \mathcal{S}, \mu)$ 是全 σ- 有限测度空间. 对于 $E \in \mathcal{S}$, 记 $\mathbf{p}(E)$ 是以 $L^2(E, \mu)$ 为投影子空间的投影算子，则 $(M, \mathcal{S}, \mathbf{p})$ 是谱测度空间.

对于谱测度空间 $(M, \mathcal{S}, \mathbf{p})$ 和可测函数 $f : M \to \mathbb{C}$, 命

$$\operatorname{essran} f = \{z \in \mathbb{C} | \forall r > 0 : \mathbf{p} f^{-1} O(z, r) \neq 0\},$$

这称为 f(相对于谱测度 $\mathbf{p}$) 的 本性值域. 命

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \operatorname{essran} f} |z| = \min\{c | \mathbf{p}(|f| > c) = 0\},$$

这称为 f(相对于谱测度) 的本性最大模. 使 $\|f\|_\infty$ 有限的函数 f 称为本性有界函数，其全体 $L^\infty(M, \mathbf{p})$ 是按本性最大模范数是 C^*- 代数.

本性值域是复平面上满足条件 $\mathbf{p} f^{-1}(\mathbb{C} \setminus F) = 0$ 的最小闭集 F

例 2 如果 $\{E_i\}$ 是 M 的可测划分且 $f=\sum\limits_i \lambda_i\chi_{E_i}$, 则

$$\operatorname{essran} f=\overline{\{\lambda_i:\mathbf{p}(E_i)\neq 0\}}.$$

为此将上式右端记为 K. 由于 $E_i\subseteq \mathbf{p}f^{-1}O(\lambda_i,r)$, 当 $\mathbf{p}(E_i)\neq 0$ 时, λ_i 在 f 的本性值域中, 因此 $K\subseteq \operatorname{essran} f$. 如果 λ 不在 K 中, 命 $r=d(\lambda,K)$, 则

$$\mathbf{p}f^{-1}O(\lambda,r)\subseteq \bigcup\{E_i|\mathbf{p}(E_i)=0\}.$$

这样 λ 不在 $\operatorname{essran} f$ 中. 于是 $K=\operatorname{essran} f$. 可见,

$$\|f\|_\infty=\sup\{|\lambda_i|:\mathbf{p}(E_i)\neq 0\}.$$

相对于谱测度的本性值域与本性最大模和相对于数值测度的本性值域与本性最大模相类似. 此处不再列举它们的性质. 我们特别强调: 简单函数全体在本性有界函数空间 $L^\infty(M,\mathbf{p})$ 中稠密.

本性有界函数的谱积分 设 f 是谱测度空间 $(M,\mathbf{p})$ 上本性有界函数, 则有唯一有界线性算子 $\int\limits_M f(t)\mathbf{p}(dt):H\to H$(可简记为 $\int\limits_M fd\mathbf{p}$) 使

$$\langle(\int\limits_M f(t)\mathbf{p}(dt))x,y\rangle=\int\limits_M f(t)\langle\mathbf{p}(dt)x,y\rangle:x,y\in H.$$

这相当于对任何 $\varepsilon>0$, M 有个可测划分 $\{D_0,D_1,\cdots,D_m\}$ 使其任何细分 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 及 $t_i\in E_i$ 都满足 $\|\sum\limits_{i=1}^n f(t_i)\mathbf{p}(E_i)-\int\limits_M fd\mathbf{p}\|<\varepsilon$.

将 $\int\limits_M f(t)\mathbf{p}(dt):H\to H$ 称为 f 的 *谱积分*, 它有以下性质:

(1) $\int\limits_M a\overline{f}d\mathbf{p}=a(\int\limits_M fd\mathbf{p})^*$. (2) $\int\limits_M(f+g)d\mathbf{p}=\int\limits_M fd\mathbf{p}+\int\limits_M gd\mathbf{p}$.

(3) $\int\limits_M fgd\mathbf{p}=\int\limits_M fd\mathbf{p}\int\limits_M gd\mathbf{p}$. (4) $\left\|\int\limits_M fd\mathbf{p}\right\|=\|f\|_\infty$.

(5) f 是 E 的特征函数时, f 的谱积分是 $\mathbf{p}(E)$: $\int\limits_M \chi_E d\mathbf{p}=\mathbf{p}(E)$.

从以上性质可见, 简单函数的谱积分能任意逼近本性有界函数的谱积分.

例 3 符号同例 1. 本性有界函数 $f:M\to\mathbb{C}$ 相对于测度 μ 和谱测度 $\mathbf{p}$ 的本性值域一样. 这是因为 $\mathbf{p}(E)=0$ 当且仅当 $\mu(E)=0$. 而谱积分

$$\int\limits_M f(t)\mathbf{p}(dt)=m_f:L^2(M)\to L^2(M).$$

这即以 f 为符号的乘法算子. 事实上, 当 f 是可测集 E 的特征函数时, 两边都是投影算子 m_{χ_E}. 一般情形源自简单函数的一致逼近.

像 Lebesgue-Stieltjes 积分一样, 直线上谱测度也可由单调函数诱导.

定理 1 设投影算子簇 $\mathbf{e}_t : t \in \mathbb{R}$ 是个谱系 — 它满足以下 3 个条件:

(1) 规范性: (SOT) $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathbf{e}_t = 0$ 而 (SOT) $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbf{e}_t = I$;

(2) 强算子右连续性: 当 $t \to t_0+$ 时, $\mathbf{e}_t$ 强算子逼近 $\mathbf{e}_{t_0}$;

(3) 递增性: 当 $s \leqslant t$ 时, $\mathbf{e}_s \leqslant \mathbf{e}_t$,

则它诱导了 Borel 集代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上唯一谱测度 $\mathbf{p}$ 使 $a \leqslant b$ 时,

$$\mathbf{p}(a, b] = \mathbf{e}_b - \mathbf{e}_a.$$

反之, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上任何谱测度 $\mathbf{p}$ 都由唯一谱系诱导. 此时可记为

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\mathbf{p}(dt) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)d\mathbf{e}_t.$$

像数值测度一样, 谱测度也有乘积测度.

定理 2 设作用于同一个 Hilbert 空间的两个谱测度空间 $(M, \mathcal{R}, \mathbf{p})$ 与 $(N, \mathcal{S}, \mathbf{q})$ 使等式 $\mathbf{p}(E)\mathbf{q}(F) = \mathbf{q}(F)\mathbf{p}(E)$ 恒成立, 则 $(M \times N, \mathcal{R} \times \mathcal{S})$ 上有唯一所谓的乘积谱测度 $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ 恒使 $(\mathbf{p} \times \mathbf{q})(E \times F) = \mathbf{p}(E)\mathbf{q}(F)$. 当 $h : M \times M \to \mathbb{C}$ 是本性有界函数时,

$$\int\limits_{M\times M} h(s,t)(\mathbf{p} \times \mathbf{p})(ds, dt) = \int\limits_{M} h(t,t)\mathbf{p}(dt).$$

特请注意, 上面最后一式为一般数值积分不具备. 像数值测度的积分一样, 诱导谱测度有助于简化一些计算过程.

定理 3 设 $(M, \mathcal{R}, \mathbf{p})$ 与 $(N, \mathcal{S}, \mathbf{q})$ 是谱测度空间使 $\mathbf{q}$ 为可测映射 $\phi : M \to N$ 所诱导: 对 N 的可测集 F 恒有 $\mathbf{q}(F) = \mathbf{p}\phi^{-1}(F)$, 则

$$\int\limits_{N} g(t)\mathbf{q}(dt) = \int\limits_{M} g(\phi(s))\mathbf{p}(ds).$$

可测函数谱积分 设 $(M, \mathbf{p})$ 是谱测度空间而 $f : M \to \mathbb{C}$ 是可测函数, 则有唯一正规算子 $\int\limits_M f(t)\mathbf{p}(dt) : H \circ\!\!\to H$(可简记为 $\int\limits_M fd\mathbf{p}$) 使

$$\operatorname{dom}\int\limits_M f(t)\mathbf{p}(dt) = \{x \in H : \int\limits_M |f(t)|^2\langle\mathbf{p}(dt)x, x\rangle < +\infty\}$$

且 $x, y \in \operatorname{dom}\int\limits_M f(t)(dt)$ 时, $\langle\int\limits_M f(t)\mathbf{p}(dt)x, y\rangle = \int\limits_M f(t)\langle\mathbf{p}(dt)x, y\rangle$. 将 $\int\limits_M fd\mathbf{p}$ 称为 f 的谱积分. 它有以下性质 (其中 g 本性有界):

(1) $\int\limits_M (af + bg)d\mathbf{p} = a\int\limits_M fd\mathbf{p} + b\int\limits_M gd\mathbf{p}$, 其中 $a \neq 0$

(2) $\int\limits_M gfd\mathbf{p} \supseteq \int\limits_M gd\mathbf{p}\int\limits_M fd\mathbf{p}$. (3) $(\int\limits_M fd\mathbf{p})^* = \int\limits_M \overline{f}d\mathbf{p}$.

(3) f 是 (非负) 实值函数时, f 的谱积分是 (正) 自伴算子.

例 2 中 f 的谱积分 $\int\limits_M fd\mathbf{p} = \sum\limits_n \lambda_n\mathbf{p}(E_n)$.

例 3(续) 若 $f: M \to \mathbb{C}$ 是可测函数, 则 $\int\limits_M f d\mathbf{p}$ 是以

$$\{g \in L^2(M, d\mu) | \int\limits_M |gf|^2 d\mu < +\infty\}$$

为定义域的乘法算子 $m_f: L^2(M, \mu) \circ\!\!\to L^2(M, \mu)$.

设 M 是闭集, $\mathbf{p}$ 是 $\mathcal{B}(M)$ 上谱测度. 满足 $\mathbf{p}(E) = I$ 的最小闭集 E 称为 $\mathbf{p}$ 的 *支集*. 这记为 $\operatorname{supp} \mathbf{p}$.

定理 4(正规算子谱分解) 正规算子 $A: H \circ\!\!\to H$ 的谱上有唯一谱测度 $\mathbf{p}$ 使 A 有 *谱分解* $A = \int\limits_{\sigma A} \lambda \mathbf{p}(d\lambda)$. 此时, $\mathbf{p}$ 的支集是 σA.

注意到酉算子的谱是复平面单位圆周的紧集, 因此对应于酉算子 U 的谱测度集中在单位圆周 $\mathbb{T}$ 的闭子集 $\sigma(U)$ 上.

例 4 求 Fourier 变换 $F: L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的谱分解. 因为 F 的谱点只有 ± 1 和 $\pm\sqrt{-1}$, 以 P_k 记 $\sqrt{-1}^k$ 的特征子空间对应的投影算子, 所以

$$F = \sum_{k=0}^{3} \sqrt{-1}^k P_k.$$

对于正规算子 $A: H \circ\!\!\to H$ 与可测函数 $f: \sigma(A) \to \mathbb{C}$, 作 *函数演算*

$$f(A) = \int\limits_{\sigma(A)} f(\lambda) \mathbf{p}(d\lambda).$$

定理 5(谱映射定理) 设 $A: H \circ\!\!\to H$ 是正规算子而 $f: \sigma(A) \to \mathbb{C}$ 是可测函数, 则 $f(A)$ 是正规算子, 其谱是 f 的本性值域. 复数 λ 是 $f(A)$ 的特征值当且仅当 $\mathbf{p}f^{-1}(\lambda)$ 是非零投影算子 (此投影算子的投影子空间是 λ 的特征子空间).

例 5 考虑 $L^2(\mathbb{T})$ 上酉算子 $Af(z) = zf(z)$. 每个模 1 复数 λ 是 A 的谱点但非特征值, 它对应的投影算子 $P_\lambda = 0$. 这样 $A \neq \sum(\lambda P_\lambda : \lambda \in \mathbb{T})$.

因为 $A^k f(z) = z^k f(z)$, 当 $\varphi(z) = \sum\limits_k a_k z^k$(其中 k 可取负整数) 时,

$$\varphi(A)f(z) = \sum_k a_k A^k f(z) = \sum_k a_k z^k f(z) = \varphi(z)f(z).$$

当 φ 是 Borel 可测函数时, 仍有 $\varphi(A)f(z) = \varphi(z)f(z)$.

于是当 $\mathbf{p}$ 是 A 的谱测度时, $\mathbf{p}(E)$ 是 χ_E 诱导的的乘法算子.

$$f \in L^2(\mathbb{T}): \mathbf{p}(E)f = \chi_E f.$$

显然 $\mathbf{p}$ 具有 "平移" 不变性: $\mathbf{p}(\lambda E) = \mathbf{p}(E)$.

在已知 A 的谱测度的情形下, 要求出 A^2 等的谱测度可用以下定理.

定理 6 设 $A = \int\limits_M f(\lambda)\mathbf{p}(d\lambda)$, 则 A 的谱测度是 $\mathbf{q}: E \mapsto \mathbf{p}f^{-1}(E)$.

例 5(续) 据以上定理求 A^2 的谱测度 $\mathbf{q}$: 对于 $[0,+\infty)$ 的 Borel 集 E,

$$\mathbf{q}(E) = \mathbf{p}(\sqrt{E} \cup (-\sqrt{E})).$$

例 6 例 1 中 A 的谱测度是 $\mathbf{p}(E) = \chi_E f$. 这是 χ_E 诱导的乘法算子. 于是 $A = \int\limits_{\mathbb{R}} t\mathbf{p}(dt)$. 因为例 2 中 $D = FAF^*$. 其中 F 是 Fourier 变换 (见 §7.2). 于是 D 的谱测度是 $\mathbf{q}(E) = U_+\mathbf{p}(E)U_-$.

例 7 将 $L^2(\mathbb{T})$ 等同于 $L^2[0,2\pi)$, 作稠定的微分算子 $D: L^2(\mathbb{T}) \circ\!\!\to L^2(\mathbb{T})$ 使 $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ 时, $(Df)(\theta) = -\sqrt{-1}f'(\theta)$. 不难说明 D 是本性自伴算子, 其最小闭扩张仍记为 D. 所有整数 n 都是 D 的特征值, 相对应的特征子空间是 $\mathbb{C}e_n$, 其中 $e_n(\theta) = \exp(n\sqrt{-1}\theta)$. 于是 D 有谱分解 $D = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{n|e_n\rangle\langle e_n|}{2\pi}$, 这表明 D 可对角化. 当 $f \in C_0(\mathbb{R})$ 时, $f(D) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{f(n)|e_n\rangle\langle e_n|}{2\pi}$. 这是紧算子.

习 题

练习 1 如果 $A: H \circ\!\!\to H$ 是自伴算子, 证明 $\exp(-\sqrt{-1}A)$ 是酉算子.

练习 2 设 A 是自伴算子, 证明有个谱系 $(\mathbf{e}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 使 $A = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda d\mathbf{e}_\lambda$.

练习 3 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子. 试证明:

(1) 对任何多项式 f 成立 $Af(A^*A) = f(AA^*)A$.

(2) 对任何连续函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 成立 $Af(A^*A) = f(AA^*)A$.

(3) 对任何 Borel 可测函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 成立 $Af(A^*A) = f(AA^*)A$.

练习 4 设 A 是复 Hilbert 空间 H 上自伴算子. 如果 B 是 H 上与 A 交换的有界线性算子, 证明 B 与 A 的谱系 $\mathbf{e}_t: t \in \mathbb{R}$ 可交换.

练习 5 在 $A: H \circ\!\!\to H$ 是自伴算子时, 利用酉算子的谱分解与 Cayley 谱换求 A 的谱分解.

练习 6 在定理 4 下, 设 A 有界. 证明 A 是紧算子当且仅当任何 $\varepsilon > 0$ 使 $\mathbf{p}\{\lambda \in \sigma A: |\lambda| \geqslant \varepsilon\}$ 是有限秩算子.

练习 7 当 $t \in \mathbb{R}^n$ 时, $D : L^2(\mathbb{R}^n) \circ\!\!\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ 是稠定算子 $\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} t_i\partial_i$ 的自伴延拓. 说明 $\exp(\sqrt{-1}D)f = \lambda_t f$, 其中 $(\lambda_t f)(x) = f(x-t)$.

练习 8 正规算子 $A : H \to H$ 有闭值域当且仅当 0 非 $\sigma(A)$ 的聚点.

练习 9 无限维 Hilbert 空间 H 可分当且仅当 H 上任意一簇相互直交的投影算子 $P_i : i \in J$ 中非零项有可数个.

练习 10 作凸集 $E = \{A \in \mathbf{B}(H) | 0 \leqslant A \leqslant I\}$, 证明其端点都是投影算子.

练习 11 设 $A : X \to Y$ 是 Hilbert 空间之间的算子. 证明 (1)A 是 Fredholm 算子当且仅当 (2)A^* 是 Fredholm 算子当且仅当 (3) 存在算子 $B : Y \to X$ 使 $I - BA$ 与 $I - AB$ 是有限秩投影算子.

练习 12 设 $A_0, A_1 : X \to Y$ 都是 Fredholm 算子, 证明 $\operatorname{ind} A_0 = \operatorname{ind} A_1$ 当且仅当有可逆算子 B 与 T 使 A_1, A_0B, TA_0 互为紧摄动. 此时若 X 与 Y 都是复 Hilbert 空间, 证明有 Fredholm 算子道路连接 A_0 与 A_1.

练习 13(Douglas) 设 $A : X \to Y$ 是 Banach 空间之间有界线性算子. 如果 A 是紧算子, 证明 $\operatorname{ran} A$ 中的闭线性子空间 L 都是有限维的. 反命题在 X 和 Y 是 Hilbert 空间时成立.

练习 14 设 X_0 和 Y_0 分别是赋范空间 X 和 Y 的闭线性子空间, 有界线性算子 $A : X \to Y$ 是 $A_0 : X_0 \to Y_0$ 的延拓. 如果 A_0 是紧算子, 则 A 也是紧算子.

习题解答与提示

§1.1 集合及其运算

练习 1 四个条件依次记为 (1) 至 (4). (1)⇒(2): 源自 A 中元素都在 B 中. (2)⇒(3): 任取 $x \in A$, 由条件知 $x \in B$. 这样 $x \in A \cap B$. 因此 $A \subseteq A \cap B$. 总有 $A \cap B \subseteq A$. (3)⇒(4): 任取 $x \in A \cup B$. 当 $x \in A$ 时, 则 $x \in A \cap B$. 这样 $x \in B$, 从而 $A \cup B \subseteq B$. 总有 $A \cup B \supseteq A$. (4)⇒(1): 任取 $x \in A$, 则 $x \in A \cup B = B$. 这样 $A \subseteq B$.

练习 2 以 $F_n = \{1, \cdots, n\}$ 为例. $F_0 = \varnothing$, 它有一个子集: 空集. 这符合 $2^0 = 1$. 又 F_1 有两个子集: $\varnothing, \{1\}$. 这符合 $2^1 = 2$. 设 F_n 有 2^n 个子集, 则 F_{n+1} 的子集形如 A 和 $A \cup \{n+1\}$, 其中 A 是 F_n 的子集. 因此 A 有 2^n 种取法, 所以 F_{n+1} 有 $2^n + 2^n$(即 2^{n+1} 个子集). 由数学归纳法, 命题成立.

练习 3 $A \subset B$ 即 $\forall x \in A : x \in B$ 但 $\exists y \in B : y \notin A$, 而 $C \not\subseteq D$ 即 $\exists x \in C : x \notin D$.

练习 4 $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. 为此将等式右边的集合记为 C. 任取 $x \in A \cap B$, 则 x 在 A 中但不在 $A \setminus B$ 中. 这即 $x \in C$. 反之, 任取 $x \in C$, 则 x 在 A 中且不在 $A \setminus B$ 中. 这样 x 必在 B 中. 因此 x 在 $A \cap B$ 中. 这样 $A \cap B = C$.

练习 5 (1) 等式两边记为 C 与 D. 任取 $x \in C$. 如果 $x \notin A \cap B$, 无妨设 $x \in A$ 但 $x \notin B$. 于是 $x \in A \setminus B \subseteq A\Delta B$. 这样 $x \in D$. 因此 $C \subseteq D$. 注意到 $A \cap B$, $A\Delta B$ 都是 $A \cup B$ 的子集, 所以 $D \subseteq C$. 这样 $C = D$. 由此得 (2).

练习 6 (1) 将等式两边集合依次记为 D 与 E, 则

$$\begin{aligned} x \in D &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \text{且} x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{且} x \notin B \text{且} x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{且} x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in E. \end{aligned}$$

(2) 将 3 个集合依次记为 C, D, E, 则

$$\begin{aligned} x \in C &\Leftrightarrow x \in A \text{且} x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{且} x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in D \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{且} x \in X \setminus B \Leftrightarrow x \in E. \end{aligned}$$

练习 7 (1) 欲证不等式两端记为 A 和 B, 则

$$x \in A \Rightarrow (x \in \bigcup_{i\in I} E_i \setminus \bigcup_{i\in I} F_i)\text{或}(x \in \bigcup_{i\in I} F_i \setminus \bigcup_{i\in I} E_i)$$
$$\Rightarrow (\exists i : x \in E_i, x \notin F_i)\text{或}(\exists i : x \in F_i, x \notin E_i)$$
$$\Rightarrow (\exists i : x \in E_i \setminus F_i)\text{或}(\exists i : x \in F_i \setminus E_i)$$
$$\Rightarrow \exists i : x \in E_i \Delta F_i \Rightarrow x \in B.$$

(2) 欲证不等式两端记为 A 和 B, 则

$$x \in A \Rightarrow (x \in \bigcap_{i\in I} E_i \setminus \bigcap_{i\in I} F_i)\text{或}(x \in \bigcap_{i\in I} F_i \setminus \bigcap_{i\in I} E_i)$$
$$\Rightarrow (\forall i : x \in E_i \exists j : x \notin F_j)\text{或}(\forall i : x \in F_i \exists j : x \notin E_j)$$
$$\Rightarrow (\exists j : x \in E_j \setminus F_j)\text{或}(\exists j : x \in F_j \setminus E_j)$$
$$\Rightarrow \exists j : x \in E_j \Delta F_j \Rightarrow x \in B.$$

(3) 注意到 $E^c \setminus F^c = E^c \cap (F^c)^c = F \setminus E$ 且 $F^c \setminus E^c = E \setminus F$ 即可. (4) 注意到 $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c$ 和 $F_1 \setminus F_2 = F_1 \cap F_2^c$, 用 (2) 和 (3) 即可.

练习 8 以第一个对偶律为例. 元素 x 在左边集合当且仅当 $x \in B$ 且 x 不在每个 A_i 中当且仅当 x 在每个 $B \setminus A_i$ 中当且仅当 x 在右边集合.

练习 9 上限集是 $(0, +\infty)$: 当 $x > 0$ 时, 存在正整数 k 使 $x < k$. 当偶数 $n > k$ 时, $0 < x < n^{(-1)^n}$. 这样 x 在无限项 A_n 中. 从而 x 在上限集中. 反之上限集中的元素显然在 $(0, +\infty)$ 中.

下限集是 $\varnothing$: x 在下限集中当且仅当存在 k 使 $n \geqslant k$ 时, $0 < x < n^{(-1)^n}$. 命 n 从奇数中趋向无穷大得 $0 < x \leqslant 0$. 这样的 x 不存在.

练习 10 上限集为 $[0, 1]$: 元素 x 在上限集时, 有严格递增的正整数列 (k_n) 使 $0 \leqslant x \leqslant 1 + (-1)^{k_n}/k_n$. 命 $n \to \infty$ 得 $0 \leqslant x \leqslant 1$. 反之, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, x 在每个偶数项 A_n 中, 因此 x 在上限集中.

下限集是 $[0, 1)$: 元素在 x 下极限时, 有奇数 k 使 $0 \leqslant x \leqslant 1 - 1/k$. 因此 $0 \leqslant x < 1$. 反之, 当 $0 \leqslant x < 1$ 时, 必有 k 使 $0 \leqslant x \leqslant 1 - 1/k$. 当 $n \geqslant k$ 时, 总有 $0 \leqslant x \leqslant 1 + (-1)^n/n$. 这样 x 在下限集中.

练习 11 集列 $(E_n \cap F_n)$ 是递增的, 其极限记为 G. 因为

$$E_n \cap F_n \subseteq E_n, E_n \cap F_n \subseteq F_n,$$

上式取极限得 $G \subseteq E$ 且 $G \subseteq F$. 因此 $G \subseteq E \cap F$. 反之, 任取 $x \in E \cap F$, 则有 k 与 l 使 $x \in E_k$ 且 $y \in F_l$. 命 $n = \max\{k, l\}$, 则 $x \in E_n \cap F_n$. 因此 $x \in G$. 这表明 $E \cap F \subseteq G$. 总之, $G = E \cap F$.

练习 12 两个欲求之集记为 C 与 D. 注意到定义 C 的各项都是 A 的子集, 所以 $C \subseteq A$. 反之当 $x \in A$ 时, 有 k 使 $x \in A_k$. 此种 k 之最小者记为 n, 则 $x \in A_n \setminus A_{n-1}$. 于是 $x \in C$. 这样 $C = A$.

注意到定义 D 的各项都是 B_1 的子集, 所以 $D \subseteq B_1$. 反之, 任取 $x \in B_1$. 如果 x 在所有 B_n 中, 则 $x \in B$. 否则, 有个 k 使 $x \notin B_k$, 此种 k 的最小者记为 $n+1$, 则 $x \in B_n \setminus B_{n+1}$. 总之, $x \in D$. 这样 $B_1 \subseteq D$, 从而 $D = B_1$.

练习 13 提示: (1) 是容易的. (2) 必要性: 注意到下式即可

$$(A \cup C) \setminus C = (A \setminus C) \cup (C \setminus C) = A \setminus C.$$

充分性: 注意到 $A \cup C = (A \setminus C) \cup C$ 即可.

(3) 必要性: 注意到 $C \setminus (A \cap C) = C \setminus A$ 即可.

充分性: 注意到 $A \cap C = C \setminus (C \setminus A)$ 即可.

(4) 只证明必要性: 注意到 $C \setminus A = (A \Delta C) \cap C$, 得 $C \setminus A = C \setminus B$. 注意到 $A \setminus C = (A \Delta C) \setminus (A \setminus C)$, 得 $A \setminus C = B \setminus C$. 由 (3) 和 (1) 得 $A = B$.

(5) 只证明充分性: 注意到 $A \setminus C = (A \cup C) \setminus C$, 由 (1) 得 $A \setminus C = B \setminus C$. 由此结合 (3) 与 (1) 得 $A = B$.

练习 14 欲证等式两端记为 C 与 D, 则 $(x, y) \in C \Leftrightarrow (x, y)$ 在每个 $A_i \times B_i$ 中 $\Leftrightarrow x$ 在每个 A_i 中且 y 在每个 B_i 中 $\Leftrightarrow x$ 在 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 且 y 在 $\bigcap_{i \in I} B_i$ 中 $\Leftrightarrow (x, y) \in D$ 中. 这表明 $C = D$.

练习 15 提示: Descartes 积的分配律及 $A = \bigsqcup_{a \in A} \{a\}$ 和 $B = \bigsqcup_{b \in B} \{b\}$.

练习 16 {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z}.

练习 17 对于元素 x, 至多有个 n 使 $f(n) = x$. 因此 x 不在集列 $(\{f(n)\})_{n=1}^{\infty}$ 的无限多项中, 从而 $\overline{\lim_{n \to \infty}} \{f(n)\} = \varnothing$. 据对偶律, $\underline{\lim_{n \to \infty}} (\mathbb{R} \setminus \{f(n)\}) = \mathbb{R}$.

练习 18 每个有理数 x 在 $(\{f(n)\})_{n=1}^{\infty}$ 的无限多项中, 从而 $\overline{\lim_{n \to \infty}} \{f(n)\} \supseteq \mathbb{Q}$. 显然 $\overline{\lim_{n \to \infty}} \{f(n)\} \subseteq \mathbb{Q}$. 于是 $\underline{\lim_{n \to \infty}} (\mathbb{R} \setminus \{f(n)\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

练习 19 (1) 数列 $(f_n(x))$ 收敛当且仅当它是基本数列:

$$\forall k \geqslant 1, \exists m \geqslant 1, \forall i, j \geqslant m : |f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k}.$$

注意到 $\forall$ 与 $\cap$ 的对应而 $\exists$ 与 $\cup$ 的对应即可.

(2) 数列 $(f_n(x))$ 收敛于 $f(x)$ 当且仅当

$$\forall k \geqslant 1, \exists m \geqslant 1, \forall n \geqslant m : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

注意到 $\forall$ 与 $\cap$ 的对应而 $\exists$ 与 $\cup$ 的对应即可.

(3) 提示: 请注意条件中的等式等价于: 对任何 k, 任何 $i, j \geqslant m_k$, $Y \subseteq (|f_i - f_j| < 1/k)$. 这后一个不等式即: 任何 $x \in Y$ 满足 $|f_i(x) - f_j(x)| < 1/k$.

必要性: 函数列 (f_n) 一致收敛当且仅当

$$\forall k \geqslant 1, \exists m \geqslant 1, \forall i, j \geqslant m, \forall x \in Y : |f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k}.$$

上面的 m 与 k 有关, 可记为 m_k. 以 $m_1 + \cdots + m_k$ 代替 m_k 后可设 (m_k) 是严格递增的.

(4) 提示: 请注意条件中的等式等价于: 对任何 k, 任何 $n \geqslant m_k$, $Y \subseteq (|f_n - f| < 1/k)$. 这后一个不等式即: 任何 $x \in Y$ 满足 $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$.

必要性: 函数列 (f_n) 一致收敛于 f 当且仅当

$$\forall k \geqslant 1, \exists m \geqslant 1, \forall n \geqslant m, \forall x \in Y : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}.$$

上面的 m 与 k 有关, 可记为 m_k. 以 $m_1 + \cdots + m_k$ 代替 m_k 后可设 (m_k) 是严格递增的.

§1.2 三类常用关系

练习 1 提示: 注意到 $X \times X$ 是 X 上包含 S 的等价关系, 可命

$$E_0 = \bigcap\{E | \text{等价关系} E \supseteq S\}.$$

练习 2 前一个结论是显然的. 为证第二个结论任取 $(x, y) \in R$(这即 xRy), 由对称性得 yRx, 由反称性得 $x = y$. 因此 $R \subseteq X^{(2)}$. 由自反性得 $X^{(2)} \subseteq R$.

练习 3 (1) $(x,z)\in(AB)C$ 当且仅当存在 y 使 $(x,y)\in AB$ 且 $(y,z)\in C$ 当且仅当存在 y 和 u 使 $(x,u)\in A$ 且 $(u,y)\in B$ 且 $(y,z)\in C$ 当且仅当存在 u 使 $(x,u)\in A$ 且 $(u,z)\in BC$ 当且仅当 $(x,z)\in A(BC)$.

$(z,x)\in(AB)^{-1}$ 当且仅当 $(x,z)\in AB$ 当且仅当存在 y 使 $(x,y)\in A$ 且 $(y,z)\in B$ 当且仅当存在 y 使 $(z,y)\in B^{-1}$ 且 $(y,x)\in A^{-1}$ 当且仅当 $(z,x)\in B^{-1}A^{-1}$.

(2) 任取 $(x,y)\in A$, 则 $(x,x)\in X^{(2)}$ 且 $(x,y)\in A$. 反之, 任取 $(x,y)\in X^{(2)}A$, 则有 z 使 $(x,z)\in X^{(2)}$ 且 $(z,y)\in A$. 因此 $z=x$. 这得 $(x,y)=(z,y)\in A$. 总之, $X^{(2)}A=A$. 同样可证 $AY^{(2)}=A$.

(3) 是显然的. (4) 命 $A=\{(1,2)\}$ 且 $B=\{(2,1)\}$, 则 $AB=\{(1,1)\}$ 而 $BA=\{(2,2)\}$.

练习 4 (1) 是显然的. (2) 是因为 $E\subseteq X$ 且 $F\subseteq Z$ 时

$$(gf)(E)=\{gf(x)|x\in E\}=g(f(E)),$$
$$(gf)^{-1}(F)=\{x\in X|gf(x)\in F\}$$
$$=\{x\in X|f(x)\in g^{-1}(F)\}=f^{-1}g^{-1}(F).$$

练习 5 (1) 是显然的. (2) 源自 §1.1 有关像集的性质. 注意到

$$f(\bigcup_{n\geqslant 0}f^n(S))=\bigcup_{n\geqslant 1}f^{n+1}(S),$$

知 (3) 成立. 现在由 $S\subseteq B$ 得 $f^n(S)\subseteq f^n(B)\subseteq B$, 因此

$$A=\bigcup_{n\geqslant 0}f^n(S)\subseteq\bigcup_{n\geqslant 0}B=B.$$

因此 (4) 成立. 由 (3) 和 (4) 知 (5) 成立.

练习 5 记 $A=\bigcup\mathcal{E}$, 则 A 比 $\mathcal{E}$ 的每个成员 E 大; 如果 B 也比每个 $\mathcal{E}$ 中每个成员 E 大, 则 $A\subseteq B$. 可见 A 是 $\mathcal{E}$ 的上确界. 类似得 $\bigcap\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{E}$ 的下确界.

练习 6 命 $f(z)=1/(1-z)$ 即可.

练习 7 (1) $gf(x)=f(x)^5=(x^4)^5=x^{20}$. 同样 $fg(x)=x^{20}$.

(2) $gf(x)=\cos f(x)=\cos(\sin x)$, 而 $fg(x)=\sin(\cos x)$.

(3) $gf(x)=\ln f(x)=\ln\exp x=x$, 而 $fg(y)=y$.

练习 8 因为 f_1 与 f_2 的公共定义域是 $\{0\}$ 且 $f_1(0)=f_2(0)=0$. 因此 f_1 与 f_2 能黏成一个函数 f. 注意到 $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x)=0$, 因此 f 在零点连续. 又 f 在其它点连续, 因此 f 是连续函数.

练习 9 偏序集 $(2^{\{1,2\}},\subseteq)$ 的子集 $\mathcal{S}=\{\{1\},\{2\}\}$ 中每个成员都是 $\mathcal{S}$ 的极大元, 但它们都不是 $\mathcal{S}$ 的上界. 显然 $\{1,2\}$ 是 $\mathcal{S}$ 的唯一上界.

练习 10 必要性: 当 $y\in\mathcal{S}_x$ 时, $y\preceq x\preceq z$. 于是 $y\preceq z$. 这样 $y\in\mathcal{S}_z$. 因此 $\mathcal{S}_x\subseteq\mathcal{S}_z$. 充分性: 因为 $x\in\mathcal{S}_x\subseteq\mathcal{S}_z$, 所以 $x\preceq z$.

练习 11 显然 (2) 和 (3) 都源自 (1). (1) 将 A 中元素不重复地写成 $\{a_n|n\in\mathbb{Z}_+\}$ 使 a_1 和 a_2 分别是 A 的最小元和最大元, 将 B 中元素不重复地写成 $\{r_n|n\in\mathbb{Z}_+\}$ 使 r_1 和 r_2 分别是 B 的最小数和最大数.

命 $f(a_1)=r_1$ 且 $f(a_2)=r_2$. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 对应的值 $f(a_1),\cdots,f(a_n)$ 已定义好. 这两组值按 A 中顺序和 B 中顺序分别由小至大排列成 $s_1,\cdots,s_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$, 取 i 值 $s_i<a_{n+1}<s_{i+1}$. 因为 B 中两元之间有第三元, 可取 j 使 $b_i<r_j<b_{i+1}$. 此种 j 的最小者记为 k, 命 $f(a_{n+1})=r_k$. 如此下去, 得严格递增映射 $f:A\to B$. 下面说明 f 是满射即可.

按定义 r_1 和 r_2 都是 f 的值. 设 $r_1,\cdots,r_l$ 都是 f 的值, 命

$$n=\max\{i|\exists j\leqslant l: f(a_i)=r_j\}.$$

若 r_{l+1} 不在 $b_1,\cdots,b_n$ 中 (见上), 则有 i 使 $b_i<r_{l+1}<b_{i+1}$. 因 A 中两元之间有第三元, 可取 p 使 $s_i<r_p<s_{i+1}$. 此种 p 的最小者记为 q, 则 $r_1,\cdots,r_l$ 在 $b_1,\cdots,b_n$ 中且 $r_{l+1},\cdots,r_{q-1}$ 不介于 b_i 和 b_{i+1} 之间, 从而 $q=n+1$ 且 $f(a_q)=r_{l+1}$. 这样 $f(A)=B$.

命 $g(r)=r/(1+|r|)$, 则 $g:\mathbb{Q}\to B$ 是相似. 这得 (4).

练习 12 自反性: $x\preceq' x$ 即 $x\succeq x$. 反称性: $x\preceq' y$ 且 $y\preceq' x$ 即 $x\succeq y$ 且 $y\succeq x$, 据 $\succeq$ 的反称性得 $x=y$. 传递性: $x\preceq' y$ 且 $y\preceq z$ 即 $x\succeq y$ 且 $y\succeq z$, 据 $\succeq$ 的传递性得 $x\succeq z$. 此即 $x\preceq' z$.

练习 13 (1)⇒(2): $f(x_1)\in f(A)\subseteq B$, 从而 $x_1\in f^{-1}(B)=A$.

(2)⇒(1): 命 $B=f(A)$, 则 $A\subseteq f^{-1}(B)$. 反之当 $x\in f^{-1}(B)$ 即 $f(x)\in B$ 时, 存在 $x_0\in A$ 使 $f(x)=f(x_0)$. 于是 $x\in A$. 这样 $f^{-1}(B)\subseteq A$.

练习 14 (1) 设 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $\chi_{A_1\setminus A_2}(x_1)=\chi_{A_1\setminus A_2}(x_2)$ 源自下式:

$$\chi_{A_1\setminus A_2}(x)=\chi_{A_1}(x)(1-\chi_{A_2}(x)).$$

从而 $A_1\setminus A_2$ 是浸润集. 任取 $y\in f(A_1\setminus A_2)$, 则有 $x\in A_1\setminus A_2$ 使 $y=f(x)$. 任取 $z\in f(A_2)$, 则有 $x_0\in A_2$ 使 $z=f(x_0)$. 因为 x 不在 A_2 中, 所以 $y\neq z$. 于是 y 在 $f(A_1)\setminus f(A_2)$ 中. 这得到 $f(A_1\setminus A_2)\subseteq f(A_1)\setminus f(A_2)$.

反之, 任取 $y\in f(A_1)\setminus f(A_2)$, 则有 $x\in A_1$ 使 $y=f(x)$. 明显地, x 不在 A_2 中. 这样 $f(A_1\setminus A_2)\supseteq f(A_1)\setminus f(A_2)$.

(2) 设 $f(x_1)=f(x_2)$, 则 $\chi_{\cup_i A_i}(x_1)=\chi_{\cup A_i}(x_2)$ 源自等式 $\chi_{\cup A_i}(x)=\max\limits_i \chi_{A_i}(x)$, 而 $\chi_{\cap A_i}(x_1)=\chi_{\cap A_i}(x_2)$ 源自等式 $\chi_{\cap A_i}(x)=\min\limits_i \chi_{A_i}(x)$.

最后说明 $\bigcap\limits_{i\in J} f(A_i)\subseteq f(\bigcap\limits_{i\in J} A_i)$ 即可. 任取 $y\in\bigcap\limits_{i\in J} f(A_i)$, 则有 $x_i\in A_i$ 使 $y=f(x_i)$. 固定个 j, 则 $f(x_j)=f(x_i)$ 表明 x_j 在 A_i 中. 于是 x_j 在 $\bigcap\limits_{i\in J} A_i$ 中使 $f(x_j)=y$. 这样 y 在 $\bigcap\limits_{i\in J} f(A_i)$ 中.

练习 15 提示：命 $\pi: X\to\tilde{X}$ 是自然投影, 在练习 13 中将 f 换成 π 来考察.

练习 16 只证明定向性: 任取两个分点组 P 与 Q, 它们的所有分量从小到大排列后所得的分点组 R 是 P 与 Q 的细分. .

练习 17 自反性: 由 $x\preceq x$ 且 $y\preceq y$ 知 $(x,y)\preceq(x,y)$.

反称性: $(x_1,y_1)\preceq(x_2,y_2)$ 并且 $(x_2,y_2)\preceq(x_1,y_1)$ 时, $x_1\preceq x_2$ 且 $x_2\preceq x_1$. 因此 $x_1=x_2$. 同样 $y_1=y_2$. 于是 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

传递性: $(x_1,y_1)\preceq(x_2,y_2)$ 并且 $(x_2,y_2)\preceq(x_3,y_3)$ 时, $x_1\preceq x_2$ 且 $x_2\preceq x_3$. 因此 $x_1\preceq x_3$. 同样 $y_1\preceq y_3$. 因此 $(x_1,y_1)\preceq(x_3,y_3)$.

(1) 任取 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$, 则有 $x\in X$ 及 $y\in Y$ 使 $x_i\preceq x$ 且 $y_i\preceq y$. 这样 $(x_i,y_i)\preceq(x,y)$. 因此 $X\times Y$ 是定向集.

(2) 命 $X=Y=\{0,1\}$, 它们按实数的大小关系为全序集. 现在 $X\times Y$ 中两个元素 $(0,1)$ 与 $(1,0)$ 没有三岐性. 故 $X\times Y$ 不是全序集.

练习 18 用 $z=(x,y)$ 代表 $X\times Y$ 中元素, 带下标的情形也一样.

自反性: 因为 $x=x$ 且 $y\preceq y$, 所以 $(x,y)\preceq(x,y)$. 反称性: $z_1\preceq z_2$ 且 $z_2\preceq z_1$ 时, 有以下 4 种逻辑可能:

1) $x_1\prec x_2$ 且 $x_2\prec x_1$.

2) $x_1\prec x_2$ 且 $x_2=x_1, y_2\preceq y_1$.

3) $x_1=x_2, y_1\preceq y_2$ 且 $x_2\prec x_1$

4) $x_1 = x_2, y_1 \preceq y_2$ 且 $x_2 = x_1, y_2 \preceq y_1$.

前 3 种可能性不存在，而第四种蕴含 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$. 因此 $z_1 = z_2$.

传递性： $z_1 \preceq z_2$ 并且 $z_2 \preceq z_3$ 时，有以下 4 种逻辑可能，

1) $x_1 \prec x_2$ 且 $x_2 \prec x_3$. 此时， $x_1 \prec x_3$.

2) $x_1 \prec x_2$ 且 $x_2 = x_3, y_2 \preceq y_3$. 此时 $x_1 \prec x_3$.

3) $x_1 = x_2, y_1 \preceq y_2$ 且 $x_2 \prec x_3$. 此时 $x_1 \prec x_3$.

4) $x_1 = x_2, y_1 \preceq y_2$ 且 $x_2 = x_3, y_2 \preceq y_3$. 此时， $x_1 = x_3$ 且 $y_1 \preceq y_3$.

以上四种情形都蕴含 $z_1 \preceq z_3$. 这表明 $X \times Y$ 是偏序集.

(1) 任取 $X \times Y$ 中元素 z_1 与 z_2, 则有 $x_3 \in X$ 使 $x_3 \succeq x_1, x_2$; 又有 $y_3 \in Y$ 使 $y_3 \succeq y_1, y_2$. 于是 $z_3 \succeq z_1, z_2$.

(2) 任取 $X \times Y$ 中互异元素 z_1 与 z_2. 当 $x_1 = x_2$ 时，可设 $y_1 \prec y_2$, 于是 $z_1 \prec z_2$. 当 $x_1 \neq x_2$ 时，可设 $x_1 \prec x_2$, 于是 $z_1 \prec z_2$.

§1.3 对等集合与势

练习 1 整系数多项式 f 的实根集 $R(f)$ 是有限的, 从而代数数全体 $\bigcup\{R(f)|f \in \mathbb{Z}[x]\}$ 是可数集. 又有理数都是代数数. 结论得证.

练习 2 将代数数全体和超越数全体分别记为 A 和 B. 由 $A \sqcup B = \mathbb{R}$ 和 A 是可列集知， B 是无限集. 于是 $B \sim A \sqcup B$. 这样 $|B| = \aleph$.

练习 3 将 $\mathbb{Z}_+$ 的有限子集 E 全体记为 $\mathcal{F}$. 命 $f(E) = p_1^{\chi_E(1)} p_2^{\chi_E(2)} \cdots$, 其中 $p_1, p_2, \cdots$ 是由小到大排列的素数全体. 存在 n 使 $i > n$ 时， $\chi_E(i) = 0$, 因此无穷乘积 $f(E)$ 是一个确定的正整数. 这得单射 $f : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}_+$. 于是 $\mathcal{F}$ 至多可列. 又 $\{\{n\}|n \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个可列子集. 因此 $\mathcal{F}$ 是可列集.

练习 4 (方法一) 命 $\mathcal{F}$ 同练习 3 的解法. 将 $\mathbb{Z}_+$ 的可列子集全体记为 $\mathcal{C}$, 它有个可列子集 $\{\{2^p(2q-1)|q \in \mathbb{Z}_+\}|p \in \mathbb{Z}_+\}$. 因此 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{F} \cup \mathcal{C} = 2^{\mathbb{Z}_+}$ 对等.

(方法二)$A \subseteq \mathbb{Z}_+$ 时， $(A \sqcup \{0\}) \times \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的可列子集. 这种可列子集有 $\aleph$ 个. 因此 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 至少有 $\aleph$ 个可列子集，显然它至多有那么多个.

练习 5 因为 C 与 B 的子集 A 对等. 而 B 与 C 的子集 B 对等对等. 因此 B 与 C 对等. 这样 A, B, C 是相互对等.

练习 6 可设 $A \cup B = \mathbb{R}^2$, 则要么任何 $x \in \mathbb{R}$ 使截口 A_x 至少含一点 $f(x)$, 要么有 $x \in \mathbb{R}$ 使截口 A_x 为空集即 $B_x = \mathbb{R}$.

在前一情形， A 包含连续统 $\{(x, f(x))|x \in \mathbb{R}\}$, 故 $|A| = \aleph$. 在后一情形， B 包含连续统 $\{x\} \times \mathbb{R}$, 故 $|B| = \aleph$.

练习 7 可设 f 递增. 将 f 的不连续点 x 全体记为 D. 对此 x 有

$$f(x-)=\sup\{f(z)|z<x\},$$
$$f(x+)=\inf\{f(z)|x<z\}.$$

作开区间 $I_x=(f(x-),f(x+))$. 当 $x_1<x_2$ 时, $f(x_1+)\leqslant f(x_2-)$. 这样 I_{x_1} 与 I_{x_2} 无交. 据例 1 得 $I_x:x\in D$ 有可数个. 因此 D 可数.

练习 8 M 有个势为 $\aleph$ 的子集 $\{a+f_0|a\in\mathbb{R}\}$, 其中 $f_0(x)\equiv x$. 以 $\mathcal{C}$ 记 $\mathbb{R}^2$ 的可数子集全体 (据例 4, $|\mathcal{C}|=\aleph$). 作个单射 $\phi:M\to\mathcal{C}$ 即可.

以 D_f 记 f 的不连续点全体, 它可数 (见练习 7). 作 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 的可列子集

$$\phi(f)=\{(x,f(x))|x\in\mathbb{Q}\cup D_f\}.$$

命 $\pi(x,y)=x$, 得投影 $\pi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使 $\pi(\phi(f))=\mathbb{Q}\cup D_f$.

设 $\phi(f)=\phi(g)$. 任取 $x\in\mathbb{R}$, 如果 x 是 f 或 g 的不连续点, 则

$$x\in\mathbb{Q}\cup D_f=\mathbb{Q}\cup D_g,$$

由 $(x,f(x))=(x,g(x))$ 得 $f(x)=g(x)$; 如果 x 是 f 和 g 的公共连续点, 则 $\mathbb{Q}$ 中有序列 (x_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 对 $f(x_n)=g(x_n)$ 取极限得 $f(x)=g(x)$. 这样 $f=g$.

练习 9 命 M 同练习 8, 则 $S\subset M$. 又 $S\supseteq\{a+\exp|a\in\mathbb{R}\}$, 所以 $|S|=\aleph$.

练习 10 提示: (1) 平面上有理点 z 全体 P 是可列集, 正有理数 r 全体 $\mathbb{Q}_+$ 也是可列集. 命 $O(z,r)$ 是以 z 为中心、以 r 为半径的开圆盘, 得双射 $O:P\times\mathbb{Q}_+\to\mathcal{D}$. 因此 $|\mathcal{D}|=\aleph_0^2=\aleph_0$.

(2) 作 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 的子集 $X=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{Q},a\leqslant b\}$, 因为 $\{(r,r+1)|r\in\mathbb{Q}\}$ 是 X 的可列子集, 所以 X 是可列集. 作映射 $f:X\to\mathcal{J}$ 使 $f(a,b)=[a,b]$, 则 f 是双射. 因此 $\mathcal{J}$ 是可列集.

(4) 对于十进位有限小数 $x=0.a_1\cdots a_n\cdots$, 其中每个 a_n 是 $0,\cdots,9$ 中的整数且只有有限个不为零. 命 $f(x)=p_1^{a_1}\cdots p_n^{a_n}\cdots$, 其中 $p_1,p_2,\cdots$ 是由小到大排列的素数全体, 因此 $f:X\to\mathbb{Z}_+$ 是单射. 这样 X 是至多可列集. 又 $\{\frac{1}{10^n}|n\in\mathbb{Z}_+\}$ 是 X 的可列子集, 因此 X 是可列集.

(5) 将平面上有理点全体记为 P. 作 $P\times P\times P$ 的可列子集

$$X=\{(a,b,c)|a,b,c\in P,a\neq b,b\neq c,c\neq a\}.$$

命 $f(a,b,c)$ 为以 a,b,c 为顶点的三角形, 得双射 $f:X\to\mathcal{T}$, 因此 $\mathcal{T}$ 可列.

(6) 对于有理函数 $f(x) = g(x)/h(x)$, 其中 $g(x)$ 与 $h(x)$ 都是有理系数多项式. 将分子分母适当乘上一个整数, 可设 g 与 h 都是整系数多项式. 于是 $(g,h) \to g/h$ 是 $\mathbb{Z}[x] \times (\mathbb{Z}[x])^{\times}$ 到 $\mathbb{Q}\langle x\rangle$ 的满射, 其中 $(\mathbb{Z}[x])^{\times}$ 是不含零的整系数多项式全体. 这样 $\mathbb{Q}\langle x\rangle$ 是一个可列集的像集, 它是至多可列集. 显然 $\mathbb{Z}[x]$ 是 $\mathbb{Q}\langle x\rangle$ 的可列子集, 因此 $\mathbb{Q}\langle x\rangle$ 是可列集.

(7) 代数数全体 A 是可列集. 取双射 $f: A \to \mathbb{Z}$, 它诱导了一个双射 $A[x] \to \mathbb{Z}[x]$ 使 $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \to \sum\limits_{i=0}^{n} f(a_i)x^i$. 因为 $\mathbb{Z}[x]$ 可列, 所以 $A[x]$ 可列.

练习 11 提示: (1) $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

(2) 命 $f(t) = \exp(\mathrm{i}\,t)$, 得双射 $f: [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$.

(3) 命 $\phi(f) = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{Q}\}$. 这得映射 $\phi: U \to \mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ 的可数子集全体. 如果 $\phi(f) = \phi(g)$, 则当 x 是有理数时 $(x, f(x)) = (x, g(x))$, 从而 $f(x) = g(x)$. 当 x 是无理数时, 取列有理数 (x_n) 逼近 x, 由等式 $f(x_n) = g(x_n)$ 取极限得 $f(x) = g(x)$. 于是 $f = g$. 可见 ϕ 是单射, 于是 $|U| \leqslant \aleph$. 注意到 $\{c + R | c \in \mathbb{R}\}$ 为 U 的势为 $\aleph$ 的子集 (其中 R 是 Riemann 函数), 从而 $|U| = \aleph$.

(4) 对于严格递增的正整数列 $(k_n)_{n=1}^{\infty}$, 命

$$f(k_n)_{n=1}^{\infty} = (k_1, k_2 - k_1, \cdots, k_n - k_{n-1}, \cdots).$$

这得双射 $f: S \to \mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}$, 从而 $|S| = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$.

(5) $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$. (6) 作 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的子集

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \leqslant y\}.$$

注意到 A 含个连续统 $\{(x, x+1) | x \in \mathbb{R}\}$, 所以 $|A| = \aleph$. 命 $f(x, y) = [x, y]$, 这得双射 $f: A \to \mathcal{J}$. 于是 $|\mathcal{J}| = \aleph$.

(7) 仿本节例 3 的方法可知 $C[0,1]$ 的势为 $\aleph$.

(8) 在 [0,1] 上连续函数列全体为 $C[0,1]^{\mathbb{Z}_+}$, 它的势为 $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

(9) 因为 $\mathcal{S} \subset C[0,1]^{\mathbb{Z}_+}$ 且 $\mathcal{S}$ 包含一个连续统 $\{(f_n) | \forall f_n = f \in C[0,1]\}$, 所以 $\mathcal{S}$ 的势为 $\aleph$.

(10) 命 X 同练习 10(4), 则 $X \sqcup Y = [0, 1)$. 于是 Y 的势为 $\aleph$.

(11) 命 $F_n = \{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i | a_i \in \mathbb{R}\}$ 及 $g(a_0, \cdots, a_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 得双射 $g: \mathbb{R}^{n+1} \to F_n$. 于是 $|F_n| = \aleph$. 等式 $\mathbb{R}[x] = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} F_n$ 表明

$$\aleph \leqslant |\mathbb{R}[x]| \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \aleph = \aleph.$$

(12) 设 $0 \leqslant x < 1$, 其十进制小数展开记为 $0.a_1a_2\cdots$, 这其中有数字 7 当且仅当有个 n 使 $a_n = 7$ 且 $i < n$ 时 $a_i \neq 7$. 这种 x 的全体 E_0 是

$$\bigsqcup\{[0.a_1\cdots a_{n-1}7, 0.a_1\cdots a_{n-1}8)|a_i \neq 7; n = 1, 2, \cdots\}.$$

命 X 同练习 10(4), 则 $E_0 = E \sqcup (E \cap X)$. 因为 $E \cap X$ 可列且 E 是无了限集, 所以 $E \sim E_0$. 这样 $|E| = \aleph$.

(13) 命 $Y = \{1, 2\}$ 及 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0.a_1a_2\cdots$, 这得单射 $f: Y^{\mathbb{Z}_+} \to F$. 可见 $\aleph \leqslant |F| \leqslant \aleph$, 从而 $|F| = \aleph$.

(14) 将 f 的不连续点全体记为 D_f, 命 $\phi(f) = \{(x, f(x))|x \in \mathbb{Q} \sqcup D_f\}$. 仿例 5 知 $\phi: A \to C$ 为单射, 其中 C 为 $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ 的可列子集全体. 因此 $|A| \leqslant |C| = \aleph$. 不难说明 $|A| \geqslant \aleph$.

练习 12 因为 $A = \mathbb{R}^{[0,1]}$, 所以 $|A| = \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$.

练习 13 以 (1) 为例. $O(z, r)$ 是 $B(z, r)$ 的子集且 $B(z, r)$ 与 $O(z, r)$ 的子集 $B(z, r/2)$ 通过双射 $w \mapsto z + (w - z)/2$ 对等, 所以 $O(z, r)$ 与 $B(z, r)$ 对等.

练习 14 否则据 König 不等式知, $|\bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n| < \aleph^{\aleph_0} = \aleph$, 矛盾. 这蕴含练习 6(当 $n > 2$ 时, 命 $A_n = \varnothing$ 即可).

练习 15 (1) 正确. (2) 错误, 理由见定理 3.

(3) 正确. 为此取可列集 A 与双射 $f: A \to \mathbb{Z}_+$. 以 $a \leqslant b$ 表示 $f(a) \leqslant f(b)$, 则 $\leqslant$ 是 A 上的偏序. 任取 A 的非空子集 B, 则 $f(B)$ 有个最小数 k, 于是 $f^{-1}(k)$ 是 B 的最小元.

练习 16 提示: (1) 当 a 和 b 有限时, $f(t) = a + (b - a)t$; 当 a 有限而 b 无限时, $f(t) = 1/(1 - t) + a - 1$; 当 a 无限而 b 有限时, $f(t) = -1/t + b - 1$; 当 a 和 b 都无限时, $f(t) = \tan(\pi t - \pi/2)$, 其中 $\tan(\pm\pi/2) = \pm\infty$.

(2) $f(t) = 0.5 + t/(2 + 2|t|)$.

(3) $f(t) = t/(1 + |t|)$, 其中约定 $f(\pm\infty) = \pm 1$.

(4) 当非整数 $t > 0$ 时, $f(t) = \ln t$; 当 t 是非负整数时, $f(t) = \ln(1 + t)$.

(5) n 为正整数或 $+\infty$ 时, $f(n^{-1}) = \exp(2\pi\mathbf{i}(n + 1)^{-1})$ (其中约定 $(+\infty)^{-1} = 0$). 对其他的 t, $f(t) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$.

(6) n 为正整数时, $f((n + 1)^{-1}\exp(\sqrt{-1}t)) = n^{-1}\exp(\sqrt{-1}t)$. 对其他的 z, $f(z) = z$.

练习 17 提示: 将全体有理数写成各项互异的数列 $(r_n)_{n=1}^{\infty}$. 对于 $x \in \mathbb{R}$, 命 $A_x = \{n | r_n < x\}$. 当 $x < y$ 时, $A_x \subset A_y$. 这样 $A_x, x \in \mathbb{R}$ 满足要求.

练习 18 (1) 注意到有列有理数 (r_n) 逼近 $x - \sqrt{2}$ 即可.

(2) 命 $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 且 $\phi(f) = \{(r, f(r+\sqrt{2})) | r \in \mathbb{Q}\}$, 这得映射 $\phi: C(X) \to \mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{Q} \times \mathbb{C}$ 中可列子集全体. 现说明 ϕ 是单射. 设 $\phi(f) = \phi(g)$, 则 r 是有理数时 $f(r+\sqrt{2}) = g(r+\sqrt{2})$. 任取 $x \in X$, 命 (r_n) 同 (1). 据 f 与 g 的连续性, 对等式 $f(r_n+\sqrt{2}) = g(r_n+\sqrt{2})$ 取极限得 $f(x) = g(x)$. 因此 $f = g$, 从而 $|C(X)| \leqslant |\mathcal{C}| \leqslant \aleph$. 又常数函数全体是 $C(X)$ 的势为 $\aleph$ 的子集. 因此 $C(X)$ 的势为 $\aleph$.

练习 19 (1) 错. 如命 $A = C = \mathbb{Z}_+$ 而 $B = 2\mathbb{Z}_+$ 且 $D = \mathbb{Z}_+$, 则 $C \setminus A = \varnothing$ 而 $D \setminus B$ 不空. 这说明差运算不保持对等, 从而势不能作减法运算.

(2) 和 (3) 也错. 这也说明势不能作减法运算.

(4) 错. 如 $\varnothing \times B = \varnothing \times C$, 而 B 和 C 可以是任意集合. 又如 $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_+$ 与 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 对等, 但 $\mathbb{Z}_+$ 与 $\mathbb{R}$ 不对等. 这说明势不能作除法运算.

(5) 错. 如 $2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0}$ 但 $2 \neq 3$. 这说明势不能作对数和除法运算.

(6) 错. 如 $\aleph^2 = \aleph^3$, 但 $2 \neq 3$. 这说明势不能作对数和除法运算.

练习 20 据中值定理, 在 x 和 p/q 之间有个点 z 使

$$f(p/q) - f(x) = f'(z)(p/q - x).$$

要找的 r 可限制在开区间 $(0,1)$ 中, 从而 $r/q^n < 1$, 这样当 $|p/q - x| \geqslant 1$ 时, 要证的不等式成立. 下面可设 $|p/q - x| < 1$, 则 $|z| < |x| + 1$. 这样

$$|f'(z)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} i|a_i||z|^{i-1} < \sum_{i=1}^{n} i|a_i|(|x|+1)^{i-1}.$$

上式右端记为 $1/r$, 则常数 r 只与 f 与其选定的零点 x 有关. 因为 f 没有有理根, 所以 $q^n f(p/q)$ 是非零整数. 这样

$$1 \leqslant |q^n f(p/q)| = |q^n f'(z)(p/q - x)|.$$

结合前面有关 $|f'(z)|$ 的不等式得

$$\left|\frac{p}{q} - x\right| \geqslant \frac{1}{q^n |f'(z)|} > \frac{r}{q^n}.$$

练习 21 题中 x 全体记为 X, 则 $|X| = 10^{\aleph_0} = \aleph$. 若 x 既不是有理数也不是超越数, 则有整数 $n \geqslant 2$ 使 x 是一个 n 次代数数. 命 r 同练习 20 及 $q = 10^{k!}$ 而 $p = \sum_{i=1}^{k} a_i 10^{k!-i!}$, 则

$$\frac{r}{q^n} < \left|\frac{p}{q} - x\right| = \sum_{i>k} \frac{a_i}{10^{i!}} \leqslant \sum_{i>k} \frac{9}{q^k 10^{i-1}} = \frac{1}{q^k}.$$

当 k 足够大时, $r/q^n > 1/q^k$, 矛盾. 从而这样的超越数 x 有 $\aleph$ 个.

练习 22 任取整数组 $c_0, \cdots, c_n$ 使 $c_0 \neq 0$, 命 $s = \sum_{i=0}^{n} c_i \mathrm{e}^i$. 要说明 $s \neq 0$. 对于素数 p, 作两个 $np + p - 1$ 次多项式

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p}{(p-1)!},$$

$$g(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(np+p-1)}(x),$$

其中 $f^{(k)}$ 代表 f 的 k 阶导数. 由 $f^{(np+p)} = 0$ 知 $(\mathrm{e}^{-x} g(x))' = -\mathrm{e}^{-x} f(x)$.

当整数 i 满足 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时, 据中值定理知在 0 和 i 之间有个 ξ_i 使

$$\mathrm{e}^{-i} g(i) - \mathrm{e}^{-0} g(0) = -i\, \mathrm{e}^{-\xi_i} f(\xi_i).$$

命 $r = \sum_{i=1}^{n} i\, \mathrm{e}^{i-\xi_i} c_i f(\xi_i)$, 据上式得 $g(0)s = \sum_{i=0}^{n} c_i g(i) + r$.

命 $b = \max_{0 \leqslant x \leqslant n} \prod_{i=1}^{n} (x - i)$, 则 $|r| < \dfrac{(nb)^p}{(p-1)!} \sum_{i=0}^{n} |c_i| \mathrm{e}^i$. 设 p 足够大使 $|r| < 1$. 当整数 $j_1 \neq p$ 时, 1 是 $((x-1)^p)^{(j_1)}$ 的根. 因此 $f^{(k)}(x)|_{x=1}$ 是

$$\sum_{j_0+j_1+\cdots+j_n=k} \left.\frac{k!(x^{p-1})^{(j_0)}((x-1)^p)^{(j_1)} \cdots ((x-n)^p)^{(j_n)}}{j_0! \cdots j_n!(p-1)!}\right|_{x=1}$$

$$= \sum_{j_0+j_2+\cdots+j_n=k-p} \left.\frac{pk!(x^{p-1})^{(j_0)}((x-2)^p)^{(j_2)} \cdots ((x-n)^p)^{(j_n)}}{j_0! \cdots j_n!}\right|_{x=1},$$

这是整数且能被 p 整除. 因此 $g(1)$ 能被 p 整除. 同样整数 $g(i) : 1 \leqslant i \leqslant n$ 可被 p 整除, 所以整数 $\sum_{i=1}^{n} c_i g(i)$ 可被 p 整除. 又 $g(0) - f^{(p-1)}(0)$ 也可被 p 整除. 因为 $f^{(p-1)}(0) = (-1)^p(n!)^p$, 它不可被 p 整除, 所以

$$c_0 g(0) + \cdots + c_n g(n) \equiv c_0(-1)^p(n!)^p \mod p.$$

因为 $|r| < 1$, 所以 $g(0)s \neq 0$. 这样 $s \neq 0$, 从而 e 是超越数.

§1.4 实数与无穷大

练习 1 记 $e = \max\{a, c\}$ 而 $f = \min\{b, d\}$.

(1) 如果 (a, b) 与 (c, d) 有公共交点, 则 $(a, b) \cap (c, d) = (e, f)$.

(2) 如果 $(a, b]$ 与 $(c, d]$ 有公共交点, 则 $(a, b] \cap (c, d] = (e, f]$.

(2) 如果 $[a, b]$ 与 $[c, d]$ 有公共交点, 则 $[a, b] \cap [c, d] = [e, f]$.

(2) 如果 $[a, b)$ 与 $[c, d)$ 有公共交点, 则 $[a, b) \cap [c, d) = [e, f)$.

练习 2 设 x_0 是 $(a_i, b_i) : i \in J$ 的一个公共交点, 命 $a = \inf\limits_{i \in J} a_i$ 且 $b = \sup\limits_{i \in J} b_i$. 要证 $E = (a, b)$. 当 $x \in E$ 时, 有个 i 使 $a_i < x < b_i$, 因此 $a < x < b$. 反之, 设 $a < x < b$. 若 $x \geqslant x_0$, 则有 i 使 $x < b_i$. 这样 $a_i < x < b_i$, 从而 $x \in E$. 若 $x < x_0$, 则有 i 使 $x > a_i$. 这样 $a_i < x < b_i$, 从而 $x \in E$.

练习 3 任取 $\operatorname{ran} f'$ 中互异两点 y_1 和 y_2, 当 $y_1 < y_0 < y_2$ 时, 说明 y_0 也在 $\operatorname{ran} f'$ 中即可. 取 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 使 $f'(x_i) = y_i$. 命 $g(x) = f(x) - y_0 x$. 这得可微函数 g 使 $g'(x_1) < 0$ 且 $g'(x_2) > 0$.

当 $x_1 < x_2$ 时, g 在 (x_1, x_2) 内有个极小值点 x_0, 从而 $g'(x_0) = 0$. 这即 $f'(x_0) = y_0$. 当 $x_2 < x_1$ 时, g 在 (x_2, x_1) 内有个极大值点 x_0, 从而 $g'(x_0) = 0$. 这即 $f'(x_0) = y_0$.

练习 4 命每个 $a_n = 1/2^n$. 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, x 可表示成二进位小数 $0.b_1 b_2 \cdots$. 命 $J = \{n | b_n = 1\}$, 则 $\sum\limits_{n \in J} a_n = x$.

练习 5 提示: $\mathcal{B} = \{[n, n+1) | n \in \mathbb{Z}\}$.

练习 6 注意到 x 的标准十进位小数 $0.p_1 p_2 \cdots$ 中有数字 1 当且仅当存在 n 使 $p_n = 1$ 且 $i < n$ 时 $p_i \neq 1$, 这得

$$E = \bigsqcup [0.p_1 \cdots p_{n-1} 1, 0.p_1 \cdots p_{n-1} 2),$$

其中 $n \in \mathbb{Z}_+$ 而 $p_1, \cdots, p_{n-1}$ 为 $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

练习 7 据练习 6, 当 n 取遍正整数且 $p_1, \cdots, p_{n-1}$ 取遍 $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 时,

$$E = \bigsqcup (0.p_1 \cdots p_{n-1} 1, 0.p_1 \cdots p_{n-1} 2).$$

练习 8 x 满足条件当且仅当存在有限个非 0 即 2 的整数 $p_1, \cdots, p_{n-1}$ 使

$$0.p_1 \cdots p_{n-1}1 \leqslant x < p_1 \cdots p_{n-1}2.$$

因此此种 x 全体是可列个左开右闭区间的无交并:

$$\bigsqcup\{[0.p_1 \cdots p_{n-1}1, 0.p_1 \cdots p_{n-1}2) | n \geqslant 1 : p_1, \cdots, p_{n-1} = 0, 2\}.$$

练习 9 必要性: 若有 n 使 $a_n > \sum\limits_{i>n} a_i$, 取这两数的中间数 x 及 $\mathbb{Z}_+$ 的子集 J 使 $x = \sum\limits_{i \in J} a_i$, 则 J 与 $\{1, \cdots, n\}$ 无交 (否则, 它们有个交点 i, 则 $x \geqslant a_i \geqslant a_n$, 矛盾). 于是 $J \subseteq \{i | i > n\}$, 这得 $x \leqslant \sum\limits_{i>n} a_i$, 矛盾.

充分性: 设 $0 < x < s$. 若 x 非有限项 a_n 之和, 则有 k 使 $\sum\limits_{i \leqslant k} a_i > x$. 此种 k 的最小者记为 k_1. 于是 $\sum\limits_{i<k_1} a_i < x < \sum\limits_{i \leqslant k_1} a_i$. 因为 $a_{k_1} \leqslant \sum\limits_{i>k_1} a_i$, 有个正整数 $k_2 > k_1$ 使

$$\sum_{i<k_1} a_i + \sum_{k_1<i<k_2} a_i < x < \sum_{i<k_1} a_i + \sum_{k_1<i \leqslant k_2} a_i.$$

如此下去得严格递增的正整数列 (k_n) 恒满足下式:

$$\sum(a_i : i \in J_n) < x < \sum(a_i : i \in J_n \cup \{k_n\}),$$

其中 $J_n = \{i | i < k_n, i \neq k_1, \cdots, k_{n-1}\}$. 注意到 $\lim\limits_{n \to \infty} a_{k_n} = 0$, 这得

$$x = \sum(a_i : i \neq k_1, \cdots, k_n, \cdots).$$

练习 10 说明使 $0 < x < +\infty$ 的数 x 是一个缺项级数之和即可. 若 x 非有限项 a_n 之和, 则有 k 使 $\sum\limits_{i \leqslant k} a_i > x$. 此种 k 的最小者记为 k_1, 则

$$\sum_{i<k_1} a_i < x < \sum_{i \leqslant k_1} a_i.$$

因为 $\sum\limits_{i>k_1} a_i = +\infty$, 有个正整数 $k_2 > k_1$ 使

$$\sum_{i<k_1} a_i + \sum_{k_1<i<k_2} a_i < x < \sum_{i<k_1} a_i + \sum_{k_1<i \leqslant k_2} a_i.$$

如此下去得严格递增的正整数列 (k_n) 恒满足下式:

$$\sum(a_i : i \in J_n) < x < \sum(a_i : i \in J_n \cup \{k_n\}),$$

其中 $J_n = \{i | i < k_n, i \neq k_1, \cdots, k_{n-1}\}$. 注意到 $\lim\limits_{n \to \infty} a_{k_n} = 0$, 这得

$$x = \sum(a_i : i \neq k_1, \cdots, k_n, \cdots).$$

练习 11 只证充分性：命 $I_x = \bigcup\{\text{区间}I|x \in I \subseteq E\}$. (将练习 2 的证明稍微修改可知)$I_x$ 是 E 中包含 x 的最大区间，其长度非零. 当 I_x 与 I_y 有交点时，命 $I = I_x \cup I_y$, 这是 E 中包含 x 和 y 的区间，于是 $I \subseteq I_x$ 且 $I \subseteq I_y$. 可见 $I_x = I_y$. 这样 $I_x : x \in E$ 是一些长度非零的区间，其中任何两个不等时不相交. 因此它们互异的个数有可数个. 自然 $E = \bigcup\{I_x|x \in E\}$.

练习 12 作 $\mathcal{S}$ 的一个上界 $V = \bigcup\mathcal{S}$. 当 W 也是 $\mathcal{S}$ 的一个上界时，每个 $U \in \mathcal{S}$ 满足 $U \subseteq W$. 于是 $V \subseteq W$.

作 $\mathcal{S}$ 的一个下界 $V_0 = \bigcap\mathcal{S}$. 当 W_0 也是 $\mathcal{S}$ 的一个下界时，每个 $U \in \mathcal{S}$ 满足 $U \supseteq W$. 于是 $\bigcap\mathcal{S} \supseteq W$, 因此 $V_0 \supseteq W_0$.

因此 V 是 $\mathcal{S}$ 的最小上界而 V_0 是 $\mathcal{S}$ 的最大下界.

§1.5 Euclid 空 间

练习 1 当 $a < b$ 时，取严格递减至 a 的数列 (a_n) 和严格递增至 b 的数列 (b_n) 使 $a_1 < b_1$, 则紧集列 $[a_n, b_n] : n \geqslant 1$ 之并为 (a,b), 紧集列 $[a_n, b]$ 之并为 $(a,b]$(此时 b 有限), 紧集列 $[a, b_n]$ 之并为 $[a,b)$(此时 a 有限).

练习 2 只需要证明 (1). 设 $E = (\bigcap\limits_{i\geqslant 1} U_i) \cup (\bigcap\limits_{i\geqslant 1} V_i)$, 其中 U_i 与 V_i 都是开集. 以 $U_1 \cap \cdots \cap U_k$ 代替 U_k 后可设 (U_k) 是递减的，同样可设 (V_k) 是递减的. 命 $W_k = U_k \cup V_k$, 则 $E \subseteq W_k$. 设 x 在所有 W_k 中，如果 $\{k|x \in U_k\}$ 是无限集，则 x 在每个 U_k 中；如果 $\{k|x \in U_k\}$ 是有限集，则 $\{k|x \in V_k\}$ 是无限集. 这样 x 在总在 E 中. 因此 $E = \bigcap\{W_k|k \geqslant 1\}$.

练习 3 $(a,b]$(其中 $-\infty \leqslant a < b < +\infty$) 是可列个开集 $\{(a, b+1/k)|k \geqslant 1\}$ 之交. 也是可列个闭集 $\{[a_k, b]|k \geqslant 1\}$ 之并, 其中 (a_k) 是严格递减至 a 的数列. $[a,b]$(其中 $-\infty < a \leqslant b < +\infty$) 是可列个开集 $\{(a-1/k, b+1/k)|k \geqslant 1\}$ 之交. (a,b)(其中 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$) 是可列个闭集 $\{[a_k, b_k]| \geqslant 1\}$ 之并，其中 (a_k) 严格递减至 a 而 (b_k) 严格递增至 b.

练习 4 X 中满足 $X_1 \cap L = \{0\}$ 的线性子空间 L 的全体 $\mathcal{L}$ 非空，因为 $\{0\}$ 在 $\mathcal{L}$ 中. $\mathcal{L}$ 按集合的包含关系 $\subseteq$ 成为偏序集. 任取它的一个全序子集 $\mathcal{F}$, 将 $\mathcal{F}$ 中成员并成一个子集 L_0. 于是

$$X_1 \cap L_0 = \bigcup\{X_1 \cap L|L \in \mathcal{F}\} = \{0\}.$$

现说明 L_0 是线性子空间. 任取其中两个向量 x_1 与 x_2, 则有 $L_i \in \mathcal{F}$ 使 $x_i \in L_i$. 因为 $\mathcal{F}$ 是全序的，无妨设 $L_1 \subseteq L_2$. 对任何数 a_i,

$$a_1x_1 + a_2x_2 \in L_2 \subseteq L.$$

于是 L_0 在 $\mathcal{L}$ 中且是 $\mathcal{F}$ 的一个上界.

据 Zorn 引理, $\mathcal{L}$ 有一个极大元 X_2, 则 X_2 满足要求. 否则, 有非零向量 $u \in X \setminus (X_1 + X_2)$. 作线性子空间 $L = \mathrm{span}(X_2 \cup \{u\})$. 任取 $x \in X_1 \cap L$. 写 $x = x_2 + tu$, 其中 $x_2 \in X_2$ 而 t 是数. 于是 $tu = x - x_2 \in X_1 + X_2$. 这样 $t = 0$. 因此 $x = x_2 = 0$. 这样 $X_1 \cap L = \{0\}$. 于是 L 在 $\mathcal{L}$ 中且它真包含 X_2. 这与 X_2 的极大性矛盾.

练习 5 使 $A \subseteq E$ 且 $B \subseteq F$ 的不交的凸集对 (E, F) 全体 $\mathcal{F}$ 按 $\leqslant$ 成为一个偏序集, 其中 $(E, F) \leqslant (E_1, F_1)$ 表示 $E \subseteq E_1$ 且 $F \subseteq F_1$.

任取 $\mathcal{F}$ 的全序子集 $\mathcal{G} = \{(E_i, F_i) | i \in J\}$, 命 $E = \bigcup\limits_{i \in J} E_i$ 及 $F = \bigcup\limits_{i \in J} F_i$. 这得不交的凸集 E 和 F 使 $A \subseteq E$ 且 $B \subseteq F$. 于是 (E, F) 是 $\mathcal{G}$ 的一个上界.

据 Zorn 引理知 $\mathcal{F}$ 有个极大元 (C, D). 说明 C 和 D 互补即可. 否则, 取 $z_0 \in X \setminus (C \cup D)$. 作包含 A 的凸集 $C_1 = \mathrm{cov}(\{z_0\} \cup C)$ 和包含 B 的凸集 $D_1 = \mathrm{cov}(\{z_0\} \cup D)$. 据 (C, D) 的极大性, C 与 D_1 有个交点 x_1, 而 C_1 与 D 有个交点 y_1. 取 $y_0 \in D$ 使 x_1 为凸组合 $ay_0 + (1-a)z_0$. 取 $x_0 \in C$ 使 y_1 为凸组合 $bx_0 + (1-b)z_0$. 算得

$$\frac{b - ab}{1 - ab}x_0 + \frac{1 - b}{1 - ab}x_1 = \frac{a - ab}{1 - ab}y_0 + \frac{1 - a}{1 - ab}y_1.$$

这是 C 和 D 的公共交点. 矛盾.

练习 6 以有理点为中心、以正有理数为半径的开球排成一列 $B_1, B_2, \cdots$. 任取 $y \in U$, 则有 $r > 0$ 使 $O(y, 2r) \subseteq U$. 缩小 r 后可设 r 是有理数. 取有理点 x 使 $|x - y| < r$. 因为 $|z - x| < r$ 蕴含 $|z - y| < 2r$, 所以

$$y \in O(x, r) \subseteq O(y, 2r) \subseteq U.$$

因 $O(x, r)$ 是某个 B_k, 这得 $U \subseteq \bigcup\{B_k | B_k \subseteq U\}$. 反向包含是显然的.

练习 7 命 $\{B_k\}$ 同练习 6. 作可数集 $J = \{j | \exists i \in I : B_j \subseteq U_i\}$. 据练习 6 知, $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcup\limits_{j \in J} B_j$. 每个 $j \in J$ 对应至少一个 i_j 使 $B_j \subseteq U_{i_j}$. 于是 $\{U_{i_j} | j \in J\}$ 是 A 的至多可列子开覆盖.

练习 8 命 $\{B_k\}$ 同练习 6. 命 $f(U) = \{k | B_k \subseteq U\}$. 这得单射 $f : \mathcal{O} \to 2^{\mathbb{Z}_+}$. 于是 $|\mathcal{O}| \leqslant 2^{\aleph_0} = \aleph$. 又 $O(x, 1) : x \in \mathbb{R}^n$ 都是开集, 所以 $|\mathcal{O}| \geqslant \aleph$. 总之, $|\mathcal{O}| = \aleph$. 这样 $|\mathcal{F}| = \aleph$.

练习 9 由 $\mathcal{F}(X) \supseteq \{\{x\}|x \in X\}$ 知 $|\mathcal{F}(X)| \geqslant |X|$.

命 $f(x_1,\cdots,x_n)=\{x_1,\cdots,x_n\}$, 得满射 $f:\bigcup\limits_{n\geqslant 1} X^n \to \mathcal{F}\setminus\{\varnothing\}$. 于是

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{F}(X)| &\leqslant \sum_{n\geqslant 1} |X|^n + 1 \\
&= \sum_{n\geqslant 1} |X| = \aleph_0 |X| = |X|.
\end{aligned}
$$

练习 10 在 E 是有限集时, 每个 $e \in E$ 可被 F 的某个有限子集 B_e 线性组合. 命 $B=\bigcup\limits_{e\in E} B_e$, 这也是 F 的有限子集使每个 $e \in E$ 可被 B 线性组合. 于是 X 中向量都可被 B 线性组合. 因为线性基是极大线性无关组, 所以 $F=B$. 这样 F 也是有限集. 现将 E 和 F 中互异向量分别记为 $e_1,\cdots,e_n$ 和 $f_1,\cdots,f_m$. 于是有矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 和 $C=[c_{ij}]_{n\times m}$ 使

$$
\begin{aligned}
e_i &= \sum_{j=1}^{m} f_j c_{ji} : i = 1,\cdots,n; \\
f_j &= \sum_{i=1}^{n} e_i a_{ij} : j = 1,\cdots,m.
\end{aligned}
$$

算得 $AC=I_m$ 且 $CA=I_n$. 取迹得 $\mathrm{tr}(AC)=\mathrm{tr}(CA)$, 这即 $m=n$.

在 F 有限时, 同上知 E 也有限且 E 和 F 等势.

在 E 无限时, 由上面结论知 F 无限. 说明 $|E| \leqslant |F|$ 即可. 任取 F 的有限子集 S, 则 $E_S = E\cap \operatorname{span} S$ 是 E 的有限子集使 $E=\bigcup\{E_S|S\in\mathcal{F}\}$, 其中 $\mathcal{F}$ 是 F 的有限子集全体. 据势的运算律和练习 9 得

$$
|E| \leqslant \sum_{S\in\mathcal{F}} |E_S| \leqslant \aleph_0|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}| = |F|.
$$

练习 11 取 X 相对于 $\mathbb{K}$ 的 Hamel 基 E, 取 $\mathbb{K}$ 相对于 $\mathbb{F}$ 的 Hamel 基 B. 命 $G=\{be|b\in B, e\in E\}$. 任取 $x \in X$, 则 $\mathbb{K}$ 中存在只有有限项非零的数 $a_e : e\in E$ 使 $x=\sum\limits_{e\in E} a_e e$. 设 $c_{be}: b\in B$ 是 $\mathbb{F}$ 中只有有限项非零的数使 $a_e = \sum\limits_{b\in B} c_{be} b$. 于是 $x=\sum(c_{be}be : (b,e)\in B\times E)$. 如果 $x=0$, 则 $\sum\limits_{e\in E}(\sum\limits_{b\in B} c_{be}b)e=0$. 因为 E 是 $\mathbb{K}$- 线性无关的, 所以 $\sum\limits_{b\in B} c_{be}b = 0 : e \in E$. 因为 B 是 $\mathbb{F}$- 线性无关的, 所以 $c_{be}=0: b\in B, e\in E$. 因此 G 是 $\mathbb{F}$- 线性无关的, 可见 G 是 X 相对于 $\mathbb{F}$ 的 Hamel 基.

命 $f(b,e)=be$, 这得满射 $f: B\times E\to G$. 说明它是单射即可. 为此设 $b_1e_1=b_2e_2$. 这样 e_1 和 e_2 线性相关, 从而 $e_1=e_2$. 这又得 $b_1=b_2$.

练习 12 只需证明 (1). 取常数 $c < g(y)$ 和 $r > 0$ 使 $|z-x| < r$ 时, $g(z) \leqslant c$. 这导致 $\hat{g}(z) \leqslant c$. 从而 $(x-r, x+r) \subseteq U$. 于是 U 为开集.

当 $u < x < v$ 时, 说明 $g(x) \leqslant \hat{g}(v)$ 即可. 否则, $\hat{g}(v) < g(x)$ 且 v 非右控点表明 $y < v$. 这些 y 的上确界记为 z, 则 $z \leqslant v$ 且 $\hat{g}(x) \leqslant \hat{g}(z-)$. 因此 $u < z < v$. 于是有 $w > z$ 使 $\hat{g}(z) < g(w)$, 从而 $\hat{g}(x) < g(w)$. 这与 z 的定义矛盾.

练习 13 可设 $\hat{g}(x) < +\infty$. 任取数 c 使 $\hat{g}(x) < c$, 则有 $r > 0$ 使 $|z-x| < r$ 时 $g(z) < c$. 于是 $\hat{g}(z) \leqslant c$. 这样 $\overline{\lim\limits_{z \to x}} \hat{g}(z) \leqslant c$. 命 $c \to \hat{g}(x)$ 即可.

练习 14 注意到 Cantor 集 K 中的点 x 可表示成 $(0.b_1b_2\cdots)_3$, 其中 b_i 非零即 2. 命 $x_n = 2/3^n$ 即可.

练习 15 设 $0 \leqslant x \leqslant 2$, 取 $x/2$ 的 3 进位小数表示 $(0.a_1a_2\cdots)_3$. 当 $a_n = 0$ 时, 命 $b_n = c_n = 0$. 当 $a_n = 1$ 时, 命 $b_n = 2$ 而 $c_n = 0$. 当 $a_n = 2$ 时, 命 $b_n = c_n = 2$. 于是 $0.b_1b_2\cdots$ 与 $0.c_1c_2\cdots$ 都是 K 中数使

$$(0.b_1b_2\cdots)_3 + (0.c_1c_2\cdots)_3 = 2(0.a_1a_2\cdots)_3.$$

这表明 $[0,2] \subseteq K+K$. 反之, 任取 $x, y \in K$. 由 $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ 得 $0 \leqslant x+y \leqslant 2$. 从而 $K+K \subseteq [0,2]$. 总之, $K+K = [0,2]$.

(另证) 命 $a_{2n-1} = a_{2n} = 2/3^n$, 这得递减数列 (a_n) 使 $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n = 2$ 且 $a_n \leqslant \sum\limits_{i>n} a_i$. 注意到 $K+K = \{\sum\limits_{n\in J} a_n | J \subseteq \mathbb{Z}_+\}$. 据 §1.4 练习 9, $K+K = [0,2]$.

据上面结论知 $K-(1-K) = [0,2]-1 = [-1,1]$, 说明 $1-K = K$ 即可. 任取 $x \in K$, 将 x 写成三进位小数 $0.a_1a_2\cdots$ 使每个 a_n 非 0 即 2. 命 $b_n = 2-a_n$, 则 b_n 非 2 即 0. 作 K 中数 $y = 0.b_1b_2\cdots$. 于是 $1-x = y$ 和 $1-y = x$ 分别表明 $1-K \subseteq K$ 和 $K \subseteq 1-K$.

练习 16 (1) 据对称性, 说明 $y-x \leqslant 3^{1-n}$ 即可:

$$y-x = \sum_{i\geqslant n} \frac{b_i-a_i}{3^i} \leqslant \sum_{i\geqslant n} \frac{2}{3^i}.$$

(2) 因为 $a_n < b_n$, 所以 $a_n = 0$ 且 $b_n = 2$. 于是

$$y-x \geqslant \frac{2}{3^n} - \sum_{i>n} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^n}.$$

(3) 否则, 有 $i \leqslant n$ 使 $b_i \neq a_i$, 无妨设 $j < i$ 时, $b_j = a_j$. 如果 $b_i > a_i$, 据 (2) 得 $y-x \geqslant \dfrac{1}{3^i}$, 矛盾. 如果 $b_i < a_i$, 同样据 (2) 得 $x-y \geqslant \dfrac{1}{3^i}$. 矛盾.

(4) 据 (3) 知当 $|y-x| < 3^{-n}$ 时, $f(y) = f(x)$. 因此 f 连续.

练习 17 对于 Cantor 集 K 中每一点 $x=(0.a_1a_2\cdots)_3$, 其中 a_n 非 0 即 2. 命 $f(x)=\sum(u_n:a_n=2)$. 这得满射 $f:K\to E$. 因为 K 是紧集, 说明 f 连续即可. 对于 $\varepsilon>0$, 取 n 使 $\sum\limits_{i>n}|u_i|<\varepsilon$. 任取 K 中满足 $|y-x|<\sum\limits_{i>n}\dfrac{2}{3^i}$ 的点 $y=(0.b_1b_2\cdots)_3$, 则 $i\leqslant n$ 时, $b_i=a_i$. 这样

$$f(x)-f(y)=\sum(u_i:i>n,a_i=2)\\ -\sum(u_i:i>n,b_i=2).$$

可见 $|f(x)-f(y)|\leqslant\sum\limits_{i>n}|u_i|<\varepsilon$.

练习 18 提示. 任取 X 中点 $x_1<x_2<x_3$, 则有以下 4 种逻辑可能:

(1) $f(x_1)<f(x_2)$ 且 $f(x_2)<f(x_3)$.

(2) $f(x_1)<f(x_2)$ 但 $f(x_2)>f(x_3)$.

(3) $f(x_1)>f(x_2)$ 且 $f(x_2)>f(x_3)$.

(4) $f(x_1)>f(x_2)$ 且 $f(x_2)<f(x_3)$.

现说明 (2) 不可能. 否则, $f(x_1)<f(x_3)$ 或 $f(x_1)>f(x_3)$. 于是由介值定理 (即中间值定理) 知, 有个 $x\in(x_1,x_2)$ 使 $f(x)=f(x_3)$ 或有个 $x\in(x_2,x_3)$ 使 $f(x)=f(x)$. 这与 f 是单射矛盾. 同样 (4) 不可能.

请读者说明 (1) 恒出现或 (3) 恒出现, 这样 f 严格递增或严格递减.

练习 19 提示: 记 $a=\inf f(X)$ 且 $b=\sup f(X)$, 任取 $x_0\in X$.

(1) 当 $a\leqslant x_0<b$ 时, $f(x_0+)=\inf\{f(x)|x_0<x\}$. 如果 $f(x_0)<f(x_0+)$, 取 $x_1>x_0$, 则 $f(x_0+)\leqslant f(x_1)$. 由 $f(X)$ 是区间知 $f(x_0+)$ 在 $f(X)$ 中. 由 f 的单调性知 f 不能取到 $f(x_0)$ 与 $f(x_0+)$ 之间的值, 与 $f(X)$ 是区间矛盾. 于是 $f(x_0)=f(x_0+)$.

(2) 当 $a<x_0\leqslant b$ 时, 同上可知, $f(x_0-)=\sup\{f(x)|x<x_0\}$ 且 $f(x_0-)=f(x_0)$.

练习 20 不能. 否则, 据练习 18 知 f 是严格单调函数. 无妨设 f 严格递增且 $f(t)=0$, 则 $0<s<t$ 时, $f(s)<0$. 这与 $\operatorname{ran}f=[0,1]$ 矛盾.

练习 21 只证明必要性: 取 Au 的唯一线性组合 $\sum\limits_{v\in F}va_{vu}$, 其中值系数 a_{vu} 不为零的 v 只有有限个. 命 $E_0=\{u|b_u\neq0\}$, 这是有限集. 注意到

$$\{(v,u)|a_{vu}b_u\neq0\}=\bigcup_{u\in E_0}(\{v|a_{vu}\neq0\}\times\{u\}),$$

从而使 $a_{vu}b_u\neq0$ 的 (v,u) 只有限对. 现在

$$Ax=\sum_{u\in E}(Au)b_u=\sum_{u\in E}\sum_{v\in F}va_{vu}b_u=\sum_{v\in F}v\sum_{u\in E}a_{vu}b_u.$$

练习 22 明显 BA 是线性的，命 $c_{wu}=\sum\limits_{v\in F}b_{wv}a_{vu}$(其中非零项数是有限的). 作有限集 $F_0=\{v|a_{vu}\neq 0\}$, 则

$$\{w|c_{wu}\neq 0\}\subseteq \bigcup_{v\in F_0}\{w|b_{wv}\neq 0\}.$$

上式右端是有限个有限集的并，从而 $\{w|c_{wu}\neq 0\}$ 是有限集. 现在

$$\begin{aligned}BAu&=B\sum_{v\in F}va_{vu}=\sum_{v\in F}Bva_{vu}\\&=\sum_{v\in F}\sum_{w\in G}wb_{wv}a_{vu}=\sum_{w\in G}w\sum_{v\in F}b_{wv}a_{vu}=\sum_{w\in G}wc_{wu}.\end{aligned}$$

因此 BA 的表示矩阵是 $[c_{wu}]_{G\times E}$.

§2.1 环与测度

练习 1 作环 $\mathcal{R}$ 中成员 $E=E_1\cup\cdots\cup E_n$ 及 $G_i=E\setminus E_i$. 作 $\mathcal{R}$ 的子类

$$\mathcal{F}=\{H_1\cap\cdots\cap H_n|H_1=E_1\text{或}G_1,\cdots,H_n=E_n\text{或}G_n\}\setminus\{\varnothing\}.$$

每个 $H_i=G_i$ 时，$H_1\cap\cdots\cap H_n=\varnothing$ 且每个 H_i 至多有两种取法，因此 $\mathcal{F}$ 至多有 2^n-1 个成员. 任取 $\mathcal{F}$ 中成员 $F=H_1\cap\cdots H_n$ 与 $F'=H_1'\cap\cdots H_n'$，它们不等时可设 $H_1=E_1$ 而 $H_1'=G_1$，于是

$$F\cap F'\subseteq H_1\cap H_1'=\varnothing.$$

任意固定 $i\leqslant n$. 对于 $x\in E_i$，当 $x\in E_j$ 时，命 $H_j=E_j$；当 $x\notin E_j$ 时，命 $H_j=G_j$. 于是 x 在每个 H_j 中，也在这些 H_j 之交集 F 中. 因而

$$E_i\subseteq\bigcup\{F\in\mathcal{F}|F\subseteq E_i\}.$$

上式中的反向包含是显然的.

练习 2 这些都是开闭集，理由如下:

(1) $(-\infty,0)=(-\infty,0)\cap(-\infty,0]$, $(0,1)=(0,1)\cap[0,1]$.

(2) $(-\infty,0]=(-\infty,0]\cap(-\infty,1)$, $(0,1]=(0,2)\cap[0,1]$.

(3) $(1,+\infty)=(1,+\infty)\cap[1,+\infty)$, $[0,1]=[0,1]\cap(-1,2)$.

(4) $[1,+\infty)=(0,+\infty)\cap(1,+\infty)$, $[0,1)=[0,1]\cap(-1,1)$.

练习 3 当 A 是开闭集时，取开集 U 与闭集 F 使 $A=U\cap F$，则

$$A=U\setminus(\mathbb{R}^n\setminus F)=F\setminus(\mathbb{R}^n\setminus U).$$

因此 $\mathcal{A}=\{U\setminus V|U,V\in\mathcal{O}_n\}=\{E\setminus F|E,F\in\mathcal{F}_n\}$. 现在

$$(E_1\setminus F_1)\cap(E_2\setminus F_2)=(E_1\cap E_2)\setminus(F_1\cup F_2),$$
$$(E_1\setminus F_1)\setminus(E_2\setminus F_2)=[(E_1\cap E_2\cap F_2)\setminus F_1]\sqcup[E_1\setminus(F_1\cup E_2)],$$

这表明 $\mathcal{A}$ 是半环，它与 $\mathcal{O}_n$ 及 $\mathcal{F}_n$ 生成的环都一样. 这个环是

$$\mathcal{R}=\{\bigsqcup_{i\leqslant m}E_i|E_i\in\mathcal{A},m\geqslant 1\}.$$

练习 4 (1) 是显然的. (2) 命 $\mathcal{T}=\{F\in\mathbf{R}(\mathcal{E})|F\cap A\in\mathbf{R}(\mathcal{E}\cap A)\}$. 据集合运算的分配律，$\mathcal{T}$ 是包含 $\mathcal{E}$ 的一个环. 因此 $\mathcal{T}=\mathbf{R}(\mathcal{E})$，这表示 $\mathbf{R}(\mathcal{E})\cap A\subseteq\mathbf{R}(\mathcal{E}\cap A)$. 反向包含源自 $\mathbf{R}(\mathcal{E})\cap A$ 是包含 $\mathcal{E}\cap A$ 的一个环.

(3) 记 $\mathcal{S}=\{F\in\mathbf{S}(\mathcal{E})|F\cap A\in\mathbf{S}(\mathcal{E}\cap A)\}$，它包含 $\mathcal{E}$. 据集合运算的分配律，它是 σ- 环：当 $F_n\in\mathbf{S}(\mathcal{E})$ 时，

$$(F_1\setminus F_2)\cap A=F_1\cap A\setminus F_2\cap A\in\mathbf{S}(\mathcal{E}),$$
$$(\bigcup_{n\geqslant 1}F_n)\cap A=\bigcup_{n\geqslant 1}(F_n\cap A)\in\mathbf{S}(\mathcal{E}).$$

因此 $\mathcal{S}=\mathbf{S}(\mathcal{E})$. 这表示 $\mathbf{S}(\mathcal{E})\cap A\subseteq\mathbf{S}(\mathcal{E}\cap A)$. 反向包含源自 $\mathbf{S}(\mathcal{E})\cap A$ 是包含 $\mathcal{E}\cap A$ 的 σ- 环.

练习 5 (1) 设 E 和 F 在 $\mathcal{A}$ 中. 要说明 $E\sqcup F$ 在 $\mathcal{A}$ 中，可设 $E\cup F$ 无限. 于是 E 或 F 无限，从而 E^c 或 F^c 有限. 故 $(E\cup F)^c=E^c\cap F^c$ 有限.

要说明 $E\setminus F$ 在 $\mathcal{A}$ 中，可设 $E\setminus F$ 无限. 于是 E 和 F^c 都无限，从而 $(E\setminus F)^c=E^c\cup F$ 有限. 因为 $X\setminus X$ 有限，所以 X 在 $\mathcal{A}$ 中.

要说明 $\mathcal{A}$ 非 σ- 环，取 X 的一个可列子集 $\{x_n|n\geqslant 1\}$. 命 $E_n=\{x_{2n}\}$，这得 $\mathcal{A}$ 中序列 (E_n) 使 $\bigcup E_n$ 是可列集且 $(\bigcup E_n)^c$ 包含可列集 $\{x_{2n-1}|n\geqslant 1\}$. 从而 $\mathcal{A}$ 不对集列的并运算封闭.

(2) 同 (1) 知 X 在 $\mathcal{B}$ 中. 任取 $\mathcal{B}$ 中序列 (E_n). 要说明 $E_1\setminus E_2$ 在 $\mathcal{B}$ 中，可设 $E_1\setminus E_2$ 不可数. 于是 E_1 和 E_2^c 都不可数，这样 E_1^c 和 E_2 都可数. 因此 $(E_1\setminus E_2)^c=E_1^c\cup E_2$ 可数.

要说明 $\bigcup_{n\geqslant 1}E_n$ 在 $\mathcal{B}$ 中，可设它不可数. 于是有个 E_n 不可数，这样 E_n^c 可数，从而 $\bigcup\{E_n|n\geqslant 1\}=\bigcap\{E_n^c|n\geqslant 1\}$ 可数.

练习 6 按条件得 $\mathcal{A}=\{E\subseteq X|\chi_E(a)=\chi_E(b)\}$. 因为 $\chi_X(a)$ 和 $\chi_X(b)$ 都是 1, 所以 X 在 $\mathcal{A}$ 中. 设 E 和 F 在 $\mathcal{A}$ 中, 则

$$\chi_{E\setminus F}(a)=\chi_E(a)(1-\chi_F(a))$$
$$=\chi_E(b)(1-\chi_F(b))=\chi_{E\setminus F}(b).$$

于是 $E\setminus F$ 也在 $\mathcal{A}$ 中. 设 (E_n) 是 $\mathcal{A}$ 中序列, 其并记为 E, 则

$$\chi_E(a)=\sup_{n\geqslant 1}\chi_{E_n}(a)=\sup_{n\geqslant 1}\chi_{E_n}(b)=\chi_E(b).$$

于是 E 在 $\mathcal{A}$ 中. 可见 $\mathcal{A}$ 是含基本空间的 σ- 环.

练习 7 对任何正整数 n, 命 $E_n=\{x\in F|\mu\{x\}\geqslant 1/n\}$. 任取 E_n 的有限子集 G(其计数记为 k), 则 G 在 $\mathcal{R}$ 中且 $k/n\leqslant\mu(F)\leqslant\mu(E)$. 这样 $k\leqslant n\mu(E)$. 从而 $E_n: n\geqslant 1$ 都是有限集, 它们的并为 F. 于是 F 可数.

练习 8 $a_n=a_{n+1}+\sum\limits_{i>n+1}a_i=2a_{n+1}$. 因此 $a_{n+1}=a_n/2$. 这样

$$\sum_{i\in E}a_i=\sum_{i\in E}2^{-i+1}a_1=2a_1\sum_{i\in E}1/2^i.$$

后面的级数表达的是一个二进位小数. 因此 $\{\mu(E)|E\subseteq\mathbb{N}\}=[0,2a_1]$.

练习 9 取 $\mathcal{R}$ 中相互不交序列 (E_n) 使其并 E 也在 $\mathcal{R}$ 中, 则

$$\sum_{i\in J}\sum_{n\geqslant 1}\mu_i(E_n)=\sum_{n\geqslant 1}\sum_{i\in J}\mu_i(E_n).$$

因此 $\sigma(E)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\sigma(E_n)$. 显然 $\sigma\geqslant 0$ 且 $\sigma(\varnothing)=0$. 因此 σ 是测度.

在后面的条件下, $i\mapsto\mu_i(E_n)$ 是 J 上的非负递增函数. 据 §1.4 定理 6 得

$$\sup_{i\in J}\sum_{n\geqslant 1}\mu_i(E_n)=\sum_{n\geqslant 1}\sup_{i\in J}\mu_i(E_n).$$

因此 $\mu(E)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\mu(E_n)$. 显然 $\mu\geqslant 0$ 且 $\mu(\varnothing)=0$. 因此 μ 是测度.

练习 10 集函数 μ 不是测度, 因为它在空集上不取零值.

练习 11 任取 $E,F\in\mathcal{A}$, 有

$$\mu(E\setminus F)\leqslant\mu(E)=0,$$
$$\mu(E\cup F)\leqslant\mu(E)+\mu(F)=0.$$

因此 $E\setminus F, E\cup F\in\mathcal{A}$. 这样 $\mathcal{A}$ 是环. 任取 $E,F\in\mathcal{B}$, 有

$$\mu(E\setminus F)\leqslant\mu(E)<+\infty,$$
$$\mu(E\cup F)\leqslant\mu(E)+\mu(F)<+\infty.$$

因此 $E\setminus F, E\cup F\in\mathcal{B}$. 这样 $\mathcal{B}$ 是环.

练习 12 取 $\mathcal{R}$ 中相互不交序列 $\{E_k\}$ 使其并 E 也在 $\mathcal{R}$ 中，则

$$\delta_A(E)=\sum_{x\in A}\chi_E(x)=\sum_{x\in A}\sum_{k\geqslant 1}\chi_{E_k}(x)$$
$$=\sum_{k\geqslant 1}\sum_{x\in A}\chi_{E_k}(x)=\sum_{k\geqslant 1}\delta_A(E_k).$$

这表明 δ_A 具有可列可加性. 它显然非负且在空集上取零值. 因此 δ_A 是测度.

练习 13 任取 $\mathbb{N}$ 的有限个子集 $E_1,\cdots,E_n$, 其并记为 E. 如果 E_i 都有限，则 E 也有限，从而 $\mu(E)$ 与 $\sum\mu(E_i)$ 都是 0. 如果有个 E_i 无限，则 E 也无限，从而 $\mu(E)$ 与 $\sum\mu(E_i)$ 都是 $+\infty$. 这表明 μ 具有有限可加性.

现在，$\sum\limits_{n\geqslant 0}\mu\{n\}=0$ 而 $\mu(\mathbb{N})=+\infty$. 故 μ 无可列可加性.

练习 14 据归纳法可设 $k=2$. 任取 $E\in\mathcal{R}$, 对每个 i, 取递增至 E 的 μ_i- 有限集列 $(E_{in})_{n=1}^{\infty}$. 命 $E_n=E_{1n}\cap E_{2n}$, 则

$$\mu(E_n)=\mu_1(E_n)+\mu_2(E_n)<+\infty.$$

据 §1.1 练习 11, $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ 递增至 E. 因此 μ 是 σ- 有限的.

练习 15 (1) 任取 $\mathcal{S}_0$ 中序列 (E_n), 则

$$\mu(E_1\setminus E_2)\leqslant\mu(E_1)=0,$$
$$\mu(\bigcup_{n\geqslant 1}E_n)\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\mu(E_n)=0.$$

所以 $\mathcal{S}_0$ 对差运算和可列并运算封闭. 因而它是 σ 环.

(2) 任取 $\mathcal{S}_\sigma$ 中序列 (E_n), 取覆盖 E_n 的测度有限集列 $(G_{kn})_{k\geqslant 1}$. 于是

$$E_1\setminus E_2\subseteq\bigcup_{n\geqslant 1}E_n\subseteq\bigcup_{n,k\geqslant 1}G_{kn}.$$

所以 $\mathcal{S}_\sigma$ 对差运算和可列并运算封闭. 因而它是 σ 环.

练习 16 (1) 据练习 14, $\mu+\nu$ 是 σ- 有限测度. 当 $E\in\mathcal{R}$ 时，

$$(\tilde{\mu}+\tilde{\nu})(E)=\tilde{\mu}(E)+\tilde{\nu}(E)=\mu(E)+\nu(E).$$

据测度延拓的唯一性， $\mu+\nu$ 在 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 上的唯一测度延拓是 $\tilde{\mu}+\tilde{\nu}$.

(2) 任取 $F\in\mathcal{R}$ 使 $\nu(F)<+\infty$, 则 $\mathcal{R}\subseteq[F]$, 其中

$$[F]=\{E\in\mathbf{S}(\mathcal{R}):\mu(E\cap F)\leqslant\nu(E\cap F)\}.$$

任取 $[F]$ 中单调序列 (E_n), 其极限 E 在 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 中. 因为

$$\mu(E_n\cap F)\leqslant\nu(E_n\cap F)\leqslant\nu(F),$$

据测度的上、下连续性取极限得 $\mu(E\cap F)\leqslant\nu(E\cap F)$. 因此 $[F]$ 是单调类. 据单调类定理知 $[F]=\mathbf{S}(\mathcal{R})$. 因此任何 $E\in\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 使 $\mu(E\cap F)\leqslant\nu(E\cap F)$.

任取 $E\in\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 及 $\mathcal{R}$ 中覆盖 E 的 ν- 有限递增序列 (F_n), 则 $(E\cap F_n)$ 递增至 E. 对不等式 $\mu(E\cap F_n)\leqslant\nu(E\cap F_n)$ 取极限得 $\mu(E)\leqslant\nu(E)$.

练习 17 (1) 提示: 参考 §1.2 例 3, 验证 $E\Delta E=\varnothing$ 和 $E\Delta F=F\Delta E$ 及

$$E\Delta G\subseteq (E\Delta F)\cup(F\Delta G).$$

(2) 用 E 的分割测量性知两边都是 $\mu^*(E)+\mu^*(F\setminus E)+\mu^*(F\cap E)$.

(3) 将 (E_n) 前 n 项之并记为 S_n. 用 $E_1,E_2\cdots,E_n$ 依次分割测量 $F\cap E,(F\cap E)\setminus S_1,\cdots,(F\cap E)\setminus S_{n-1}$ 得

$$\mu^*(F\cap E)=\mu^*(F\cap E_1)+\cdots+\mu^*(F\cap E_n)+\mu^*((F\cap E)\setminus S_n).$$

在上式右边中命 $n\to\infty$ 并注意到单调性与可列次可加性,

$$\mu^*(F\cap E)\geqslant \sum_n \mu^*(F\cap E_n)\geqslant \mu^*(F\cap E).$$

(4) 因为 $\mu^*(F)=\mu^*(E)+\mu^*(F\setminus E)$, 所以 $\mu^*(F\setminus E)=0$. 这样 F 是两个 μ^*- 可测集 E 与 $F\setminus E$ 之并. 于是 F 也是 μ^* 可测集.

(5) 任取 $A\in\mathcal{R}$, 则 $F\cap A$ 是 F 的 μ^*- 可测子集. 于是

$$\begin{aligned}\mu^*(A)=&\mu^*(A\cap F)+\mu^*(A\cap F^{\mathrm{c}})\\ =&\mu^*(A\cap F\cap E)+\mu^*(A\cap F\cap E^{\mathrm{c}})\\ &+\mu^*(A\cap F^{\mathrm{c}}\cap E^{\mathrm{c}})\\ =&\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^{\mathrm{c}}).\end{aligned}$$

据定理 4 知 E 是 μ^*- 可测集.

(6) 任取 $A\in\mathcal{R}$, 由外测度的有限次可加性得

$$\begin{aligned}\mu^*(F\cap A)\leqslant \mu^*(F\cap A\cap E)+\mu^*(F\cap A\cap E^{\mathrm{c}}),\\ \mu^*(F\cap A^{\mathrm{c}})\leqslant \mu^*(F\cap A^{\mathrm{c}}\cap E)+\mu^*(F\cap A^{\mathrm{c}}\cap E^{\mathrm{c}}).\end{aligned}\tag{14}$$

上两式相加并用 A 分割测量 F 、 $F\cap E$ 和 $F\cap E^{\mathrm{c}}$ 得

$$\mu^*(F)\leqslant \mu^*(E)+\mu^*(F\setminus E)=\mu^*(F)<+\infty.$$

这表明 (14) 式中不等式都是等式. 因为 $E\subseteq F$, 由 (14) 中第一个等式得

$$\mu^*(F\cap A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(F\cap A\cap E^{\mathrm{c}}).$$

利用 F 的分割测量性并注意到 $F^{\mathrm{c}}\subseteq E^{\mathrm{c}}$ 得

$$\begin{aligned}\mu^*(A)&=\mu^*(A\cap F)+\mu^*(A\cap F^{\mathrm{c}})\\ &=\mu^*(A\cap E)+\mu(A\cap E^{\mathrm{c}}\cap F)+\mu^*(A\cap E^{\mathrm{c}}\cap F^{\mathrm{c}}).\\ &=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E).\end{aligned}$$

从而 E 能分割测量 $\mathcal{R}$ 中成员，它是 μ^*- 可测集.

(7) 方法一：命 $G=E\cup F$, 则 $G\setminus E\subsetneq F$. 于是

$$\mu^*(E)+\mu^*(G\setminus E)\leqslant\mu^*(E)+\mu^*(F)\leqslant\mu^*(G).$$

据 (6) 知 E 是 μ^*- 可测集，同样 F 也是 μ^*- 可测集.

方法二：取 $E_1\in\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 使 $E\subseteq E_1$ 且 $\mu^*(E)=\mu^*(E_1)$. 取 $F_1\in\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 使 $F\subseteq F_1$ 且 $\mu^*(F)=\mu^*(F_1)$. 以 $G\cap(E_1\cup F_1)$ 和 $G\cap(E_1\cup F_1)$ 分别代替 E_1 和 F_1 后可设 E_1 与 F_1 分别是包含 E 和 F 的 μ^*- 可测集使 $\mu^*(E)=\mu^*(E_1)$ 和 $\mu^*(F)=\mu^*(F_1)$ 且 $E_1\cup F_1=G$. 现在

$$\begin{aligned}\mu(G)&\leqslant\mu^*(E_1)+\mu^*(F_1)\\&=\mu^*(E)+\mu^*(F)=\mu^*(G).\end{aligned}$$

由此可知 $\mu^*(E_1\cap F_1)=0$. 式子 $E_1\setminus E\subsetneq E_1\cap F_1$ 表明 $E_1\setminus E$ 是 μ^*- 可测集. 由 $E=E_1\setminus(E_1\setminus E)$ 知 E 为 μ^*- 可测集. 同样知 F 为 μ^*- 可测集.

(8) 作两个 μ^*- 可测集 $A=\bigcup\limits_{n\geqslant1}A_n$ 及 $B=\bigcap\limits_{n\geqslant1}B_n$, 则 $A\subseteq E\subsetneq B$. 因为 $E\setminus A\subseteq B_n\setminus A_n$, 所以 $\mu^*(E\setminus A)\leqslant\mu^*(B_n\setminus A_n)$. 取极限得 $\mu^*(E\setminus A)=0$. 于是 E 是 μ^*- 可测集 A 与 μ^*- 零集 $E\setminus A$ 之并，从而 E 是 μ^*- 可测集.

(9)提示: 用 E_1 分割测量 $A_1\cup A_2$.

(10) 取 $G\in\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 使 $E\cap F\subsetneq G$ 且 $\mu^*(E\cap F)=\mu(G)$. 这样

$$\begin{aligned}&\mu^*((E\cup F)\cap G)\leqslant\mu^*(G)\\&=\mu^*(E\cap F\cap G)\leqslant\mu^*(E\cap G).\end{aligned}$$

利用 G 的分割测量性得

$$\begin{aligned}&\mu^*(E\cup F)+\mu^*(E\cap F)\\&=\mu^*((E\cup F)\cap G)+\mu^*((E\cup F)\setminus G)\\&+\mu^*(E\cap F\cap G)\\&\leqslant\mu^*(E\cap G)+\mu^*(E\setminus G)+\mu^*(F\setminus G)\\&+\mu^*(F\cap G)\\&=\mu^*(E)+\mu^*(F).\end{aligned}$$

(11) 取 $F_n\in\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 使 $E_n\subsetneq F_n$ 且 $\mu^*(E_n)=\mu(F_n)$. 集列 (F_n) 的下限集记为 F, 则 $E\subseteq F$ 且 $\mu(F)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\mu(F_n)$. 由此得 $\mu^*(E)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(E_n)$. 由外测度的单调性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(E_n)\leqslant\mu^*(E)$.

(12) 任取 $F \in \mathbf{H}(\mathcal{R})$, 则有 $G \in \mathbf{H}(\mathcal{R})$ 使 $T(G) = F$. 于是

$$\begin{aligned} \mu^*(F) = \mu^*(G) &= \mu^*(G \cap E) + \mu^*(G \setminus E) \\ =&\mu^*T(G \cap E) + \mu^*T(G \setminus E) \\ =&\mu^*(F \cap T(E)) + \mu^*(F \setminus T(E)). \end{aligned}$$

这样 $T(E)$ 满足分割测量性, 它是 μ^*- 可测集.

(13) 任取 $F \in \mathbf{H}(\mathcal{R})$, 则

$$F \cap E \subseteq (F \cap G) \cup (E \setminus G),$$
$$F \setminus E \subseteq (F \setminus G) \cup (G \setminus E).$$

由此两式和 G 对 F 的分割测量性得

$$\mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus E) \leqslant \mu^*(F) + 2\delta.$$

上式中命 $\delta \to 0$ 知 E 是 μ^*- 可测集.

练习 18 (1) 递增性源自每个 n 级集是 $1 + (n+1)^2$ 个 $n+1$ 级集之并:

$$[x]_n = \bigsqcup_{j=0}^{(n+1)^2} [(x_1, \cdots, x_n, j, 0, 0, \cdots)]_{n+1} \in \mathcal{R}_n.$$

任取 $E, F \in \mathcal{R}$, 设 $E \in \mathcal{R}_k$ 而 $F \in \mathcal{R}_l$. 记 $n = \max\{k, l\}$, 则

$$E \cup F, E \setminus F \in \mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{R}.$$

因此 $\mathcal{R}$ 是环. (2) 测度 μ_{n+1} 在 $\mathcal{R}_n$ 上的限制是 μ_n: 这源自下式

$$\begin{aligned} \mu_{n+1}[x]_n &= \sum_{j=0}^{(n+1)^2} \mu_{n+1}[(x_1, \cdots, x_n, j, 0, 0, \cdots)]_{n+1} \\ &= (1 + (n+1)^2) \prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+i^2} = \mu_n[x]_n. \end{aligned}$$

因此 (μ_n) 可黏成 $\mathcal{R}$ 上一个集函数 μ. 上面的 E 与 F 无交时,

$$\mu_n(E \cup F) = \mu_n(E) + \mu_n(F).$$

这即 $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$. 因此 μ 具有有限可加性.

(3) 构造 $\mathcal{R}$ 中递减至空集的序列 (E_n) 使 $\lim \mu(E_n) > 0$ 即可. 命

$$E_n = \bigsqcup \{[(x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)]_n | x_i > 0 : i = 1, \cdots, n\}.$$

显然 (E_n) 递减. 若它们有个公共交点 $x=(x_1,x_2,\cdots)$, 则恒有 $x_n\geqslant 1/n^2$. 从而 $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sqrt{x_n}=+\infty$, 矛盾. 因为 E_n 是 $(n!)^2$ 个 n 级集之无交并, 所以

$$\mu(E_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{i^2}{1+i^2}=\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{1+i^2}).$$

当 $n\to\infty$ 时, 上式右端对应的无穷乘积不为零.

练习 19 注意到 $F\cap X=F$ 且 $F\cap X^{c}=\varnothing$, 基本空间 X 在 $\mathcal{S}^{\#}$ 中. 任取 $\mathcal{S}^{\#}$ 中序列 (E_n). 因为

$$F\cap(E_1\cap E_2^{c})^{c}\cap E_2=F\cap E_2,$$
$$F\cap(E_1\cap E_2^{c})^{c}\cap E_2^{c}=F\cap E_1^{c}\cap E_2^{c},$$

先用 E_2 分割测量 $F\cap(E_1\cap E_2^{c})^{c}$, 再用 E_1 分割测量 $F\cap E_2^{c}$, 得

$$\begin{aligned}&\lambda(F\cap E_1\cap E_2^{c})+\lambda(F\cap(E_1\cap E_2^{c})^{c})\\=&\lambda(F\cap E_2^{c}\cap E_1)+\lambda(F\cap E_2)+\lambda(F\cap E_2^{c}\cap E_1^{c})\\=&\lambda(F\cap E_2)+\lambda(F\cap E_2^{c})=\lambda(F).\end{aligned}$$

当 (E_n) 相互不交时, 其并记为 E 而前 n 项之并记为 S_n. 用 $E_1,E_2\cdots,E_n$ 依次分割测量 $F,F\setminus S_1,\cdots,F\setminus S_{n-1}$ 得

$$\lambda(F)=\lambda(F\cap E_1)+\cdots+\lambda(F\cap E_n)+\lambda(F\setminus S_n).$$

在上式右边中命 $n\to\infty$ 并注意到单调性与可列次可加性,

$$\begin{aligned}\lambda(F)&\geqslant(\lambda(F\cap E_1)+\lambda(F\cap E_2)+\cdots)+\lambda(F\setminus E))\\&\geqslant\lambda(F\cap E)+\lambda(F\setminus E)\geqslant\lambda(F).\end{aligned}$$

于是上式恒取等号. 总之, $\mathcal{S}^{\#}$ 对差运算和对可列无交并运算封闭, 它是包含基本空间的 σ- 环.

练习 20 对于 $\tilde{\mathcal{R}}$ 中成员 E_1 与 E_2 及任何 $F\in\mathcal{R}$,

$$(E_1\cup E_2)\cap F=(E_1\cap F)\cup(E_2\cap F)\in\mathcal{R},$$
$$(E_1\setminus E_2)\cap F=(E_1\cap F)\setminus(E_2\cap F)\in\mathcal{R}.$$

这表明 $\tilde{\mathcal{R}}$ 是环. 等式 $X\cap F=F$ 表明 X 是 $\tilde{\mathcal{R}}$ 中成员. 显然 $\mathcal{R}\subseteq\tilde{\mathcal{R}}$.

(1) 任取 $\tilde{\mathcal{R}}$ 中相互无交序列 $\{E_n\}$ 使其并 E 也在 $\tilde{\mathcal{R}}$ 中. 因为 $(\mathcal{R},\subseteq)$ 是定向集, 而 $F\mapsto\mu(E_n\cap F)$ 是 $\mathcal{R}$ 上递增函数, 据 §1.4 定理 6 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{F\in\mathcal{R}}\mu(E_n\cap F)=\sup_{F\in\mathcal{R}}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n\cap F)=\sup_{F\in\mathcal{R}}\mu(E\cap F).$$

这表明 $\tilde{\mu}$ 具有可列加性且它限制在 $\mathcal{R}$ 上以后就是 μ.

(2) 因为 $\mathcal{R}$ 中覆盖 F 的序列也是 $\tilde{\mathcal{R}}$ 中覆盖 F 的序列, 因此 $\tilde{\mu}^*(F) \leqslant \mu^*(F)$. 为说明反向不等式, 固定 $\mathcal{R}$ 中一个覆盖 F 的序列 (A_n), 压缩后可设它们相互不交. 任取 $\tilde{\mathcal{R}}$ 中覆盖 F 的相互不交的序列 (E_n), 则

$$\sum_i \sum_j \mu(E_i \cap A_j) = \sum_j \mu(\bigsqcup_j E_i \cap A_j) \leqslant \sum_i \tilde{\mu}(E_i).$$

因为 $\{E_i \cap A_j\}$ 是 $\mathcal{R}$ 中覆盖 F 的可列个成员. 这样 $\mu^*(F) \leqslant \tilde{\mu}^*(F)$.

(3) 必要性: 当 $F \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^*$ 时, $F \cap E$ 在 $\mathcal{R}^*$ 中, 所以

$$\begin{aligned}\mu^*(F) &= \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus (F \cap E)) \\ &= \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus E).\end{aligned}$$

充分性: 任取 $F \in \mathbf{H}(\mathcal{R})$ 和 $\mathcal{R}$ 中覆盖 F 的序列 (F_n), 则 $(F_n \cap E)$ 及 $(F_n \setminus E)$ 分别覆盖 $F \cap E$ 和 $F \setminus E$. 据可列次可加性得

$$\mu^*(F \cap E) \leqslant \mu^*(F_1 \cap E) + \mu^*(F_2 \cap E) + \cdots,$$

$$\mu^*(F \setminus E) \leqslant \mu^*(F_1 \setminus E) + \mu^*(F_2 \setminus E) + \cdots.$$

注意到 $\mu(F_n) = \mu^*(F_n \cap E) + \mu^*(F \setminus E_n)$, 将上两式相加得

$$\mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus E) \leqslant \mu(F_1) + \mu(F_2) + \cdots.$$

上式右端关于 F 的所有这种覆盖 (F_n) 取下确界得

$$\mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus E) \leqslant \mu^*(F).$$

上式的反向不等式源自次可加性. 此种 E 的全体 $\mathcal{R}^\#$ 按练习 19 知是个包含 $\mathcal{R}^*$ 的 σ- 代数. 从而当 $E_1 \in \mathcal{R}^*$ 时, $E_1 \cap E$ 在 $\mathcal{R}^\# \cap \mathbf{H}(\mathcal{R})$ 中, 这样 $E \cap E_1$ 在 $\mathcal{R}^*$ 中. 这即 E 在 $\tilde{\mathcal{R}}^*$ 中.

练习 21 设 ν 也是 μ 在 $\mathbf{S}(\mathcal{R})$ 上的测度延拓. 对于 $E \in \mathbf{S}(\mathcal{R})$, 任取 $\mathcal{R}$ 中覆盖 E 的序列 (E_n), 有

$$\nu(E) \leqslant \sum_n \mu(E_n) = \sum_n \mu(E_n).$$

上式右端关于所有这样的覆盖取下确界得 $\nu(E) \leqslant \mu^*(E)$.

如果 $\mu^*(E)$ 有限, 则对于 $\varepsilon > 0$ 有 $F \in \mathcal{R}$ 使 $\mu^*(G) < \varepsilon$, 其中 $G = E \Delta F$. 这样 $\nu(G) < \varepsilon$. 因为 $E \subseteq F \cup G$ 且 $F \subseteq E \cup G$, 所以

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\leqslant \mu^*(F) + \mu^*(G) \\ &\leqslant \nu(E) + \nu(G) + \mu^*(G).\end{aligned}$$

这得 $\mu^*(E) \leqslant \nu(E) + 2\varepsilon$. 从而 $\mu^*(E) \leqslant \nu(E)$.

如果 $\mu^*(E)$ 无限, 则 E 有划分 (E_n) 使每个 $\mu^*(E_n)$ 有限. 于是

$$\mu^*(E) = \sum_n \mu^*(E_n) = \sum_n \nu(E_n) = \nu(E).$$

练习 22 任取 $\mathcal{S}$ 中序列 (E_n), 则 $E_1 \setminus E_2$ 在 $\mathcal{S}$ 中, 也在 $\mathcal{A}$ 中. 进而,

$$E_1 \setminus E_2^{\mathrm{c}} = E_1 \cap E_2 \in \mathcal{A},$$

$$E_1^{\mathrm{c}} \setminus E_2 = (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A},$$

$$E_1^{\mathrm{c}} \setminus E_2^{\mathrm{c}} = E_2 \setminus E_1 \in \mathcal{A}.$$

可见 $\mathcal{A}$ 对差运算封闭. 设 I 和 J 是 $\mathbb{N}$ 的有限集, 记 $E = \bigcup\limits_{i\in I} E_i$ 且 $F = \bigcap\limits_{j\in J} E_j$, 则 E 和 F 都在 $\mathcal{S}$ 中. 于是 $\bigcup\limits_{j\in J} E_j^{\mathrm{c}} = F^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$ 且

$$\bigcup_{i\in I} E_i \cup \bigcup_{j\in J} E_j^{\mathrm{c}} = E \cup F^{\mathrm{c}} = (F \setminus E)^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}.$$

这样 $\mathcal{A}$ 对有限并运算封闭, 它是代数. 当 $\mathcal{S}$ 是 σ- 环时, 上面的 I 和 J 可以是可数集. 因此 $\mathcal{A}$ 对可数并运算封闭, 它是 σ- 代数.

练习 23 将 (E_n) 的上极限集记为 E, 则对任何自然 l 成立

$$E \subseteq \bigcup\{E_n | n \geqslant l\}.$$

于是 $\mu^*(E) \leqslant \sum\limits_{n\geqslant l} \mu^*(E_n)$. 命 $l \to \infty$ 即可.

练习 24 任取 $\mathcal{P}$ 中互异成员 $E = \bigcap\limits_{i\in J} E_i$ 和 $F = \bigcap\limits_{i\in J} F_i$. 至少有个 j 使 $E_j \neq F_j$, 可设 $E_j = A_j$ 而 $F_j = A \setminus A_j$. 这样

$$E \cap F \subseteq A_j \cap (A \setminus A_j) = \varnothing.$$

任取 $x \in A_i$, 命 $I = \{j \in J | x \in A_j\}$. 当 $j \notin I$ 时, $x \in A \setminus A_j$. 于是

$$x \in \bigcap_{j\in I} A_j \cap \bigcap_{j\in J\setminus I} (X \setminus A_j) \in \mathcal{P}.$$

这得 $A_i \subseteq \bigsqcup\{H \in \mathcal{P} | H \subseteq A_i\}$. 反向包含是显然的.

练习 25 对于 $x \in E = \bigcup\{E_i | i \leqslant n\}$, 命 $[x] = \{i | x \in E_i\}$ 及

$$H[x] = \bigcap_{i\in[x]} E_i \cap \bigcap_{i\in I\setminus[x]} (E \setminus E_i).$$

这样的 $H[x]$ 只多有 2^n 个. 当 J 为空集时, 约定 $\bigcap\limits_{i\in J} A_i = E$.

当 $H[x]$ 和 $H[y]$ 不相等时, 总有个 j 使 x 和 y 不同时在 E_j 中且不同时在 E_j^{c} 中. 无妨设 $x \in E_j$ 且 $y \in E_j^{\mathrm{c}}$, 则

$$H[x] \cap H[y] \subseteq E_j \cap E_j^{\mathrm{c}} = \varnothing.$$

因为 $H[x]$ 在环 $\mathbf{R}(\mathcal{P})$ 中, 它有相对于 $\mathcal{P}$ 的初等分解 $\{\bigcap\{G_i[x] | i \leqslant l[x]\}$. 因为诸 $H[x]$ 相互不交, 于是 $\{\bigcap\{G_{ij_i}^{[x]} | i \in I \setminus [x]\} | l_1, \cdots, l_n \leqslant l[x], x \in E\}$ 是 $\mathcal{P}$ 中有限个相互不交的成员. 据练习 24 知它能初等分解每个 E_i.

练习 26 设 G_i 和 H_j 是 $\mathcal{P}$ 中有限个成员使 $\bigsqcup\limits_{i\in I} G_i = \bigsqcup\limits_{j\in J} H_j$, 则

$$G_i = \bigsqcup_{j\in J}(G_i \cap H_j) \Rightarrow \mu(G_i) = \sum_{j\in J}\mu(G_i \cap H_j);$$
$$H_j = \bigsqcup_{i\in I}(G_i \cap H_j) \Rightarrow \mu(H_j) = \sum_{i\in I}\mu(G_i \cap H_j).$$

将 $\mu(G_i)$ 关于 $i \in I$ 求和而 $\mu(H_j)$ 关于 $j \in J$ 求和得

$$\sum_{i\in I}\mu(G_i) = \sum_{i,j}\mu(G_i \cap H_j) = \sum_{j\in J}\mu(H_j).$$

任取 $E \in \mathbf{R}(\mathcal{P})$ 及其初等分解 $\{G_i\}$, 据容度的有限可加性的要求，只能唯一地命 $\mu(E) = \sum\limits_i \nu(G_i)$. 据上面等式知 $\mu(E)$ 与 E 的初等分解的取法无关且 μ 具有有限可加性.

练习 27 设 G_i 和 H_j 是 $\mathcal{P}$ 中可数个成员使 $\bigsqcup\limits_{i\in I} G_i = \bigsqcup\limits_{j\in J} H_j$, 则

$$G_i = \bigsqcup_{j\in J}(G_i \cap H_j) \Rightarrow \mu(G_i) = \sum_{j\in J}\mu(G_i \cap H_j);$$
$$H_j = \bigsqcup_{i\in I}(G_i \cap H_j) \Rightarrow \mu(H_j) = \sum_{i\in I}\mu(G_i \cap H_j).$$

将 $\mu(G_i)$ 关于 $i \in I$ 而 $\mu(H_j)$ 关于 $j \in J$ 求和，据非负项级数的性质得

$$\sum_{i\in I}\mu(G_i) = \sum_{i,j}\mu(G_i \cap H_j) = \sum_{j\in J}\mu(H_j).$$

任取 $E \in \mathbf{R}(\mathcal{P})$ 及其初等分解 $\{G_i\}$, 据测度的有限可加性的要求，只能唯一地命 $\mu(E) = \sum\limits_i \nu(G_i)$. 据上面等式知 $\mu(E)$ 与 E 的初等分解的取法无关且 μ 具有可列可加性.

练习 28 (1) 当 (H_n) 是 $\mathcal{A}$ 中序列时，取 $F_{ni} \in \mathcal{R}$ 使 $H_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_{ni}$. 于是

$$H_1 \cap H_2 = \bigcup_{i,j\geqslant 1}(F_{1i} \cap F_{2j}) \in \mathcal{A}.$$

将 $\{F_{ni} | n, i \geqslant 1\}$ 重排后记为 $\{F_k | k \geqslant 1\}$. 于是 $\bigcup H_n = \bigcup F_n \in \mathcal{A}$.

(2) 首先 F 是 $\mathcal{R}$ 中某个序列 (F_n) 之并，将 (F_n) 压缩后可设 (F_n) 相互不交. 而 $\mu(F)$ 的合理性参见练习 27 的证明.

(3) 必要性：取 E 的测度有限划分 $\{E_n\}$. 据定理 6(2) 得个 $F_n \in \mathcal{R}$ 使 $\mu^*(E_n \Delta F_n) < 2^{-n}\delta$. 命 $F = \bigcup\limits_n F_n$, 则 F 在 $\mathcal{A}$ 中且据 §1.1 练习 7 知 $E\Delta F \subseteq \bigcup\limits_n (E_n \Delta F_n)$. 因此 $\mu^*(E\Delta F) < \delta$. 充分性见练习 17(13).

练习 29 参见练习 22.

练习 30 提示：任取 $\mathcal{R}$ 中测度有限集 H, 记

$$\mathcal{N} = \{E \in \mathbf{S}(\mathcal{R}) | E \cap H \in \mathcal{M}\}.$$

这是含 $\mathcal{R}$ 的单调类. 据单调类定理知 $\mathcal{N} = \mathbf{S}(\mathcal{R})$. 对于 $E \in \mathbf{S}(\mathcal{R})$, 取 $\mathcal{R}$ 中覆盖 E 的递增序列 (H_n), 则 $(E \cap H_n)$ 递增至 E. 于是 E 在 $\mathcal{M}$ 中.

练习 31 在练习 30 中命 μ 为平凡测度得单调类定理.

§2.2 Lebesgue 测度

练习 1 第 n 次移去 2^{n-1} 个长度为 s^n 的开区间. 因为

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^{n-1} s^n = s/(1-2s) = r,$$

所以 E_r 的 Lebesgue 测度是 $1-r$. 如果 E_r 包含区间 $[x, y]$, 则第 n 次剩下的 2^n 个等长的闭区间中必有一个包含 $[x, y]$. 这样 $0 \leqslant y - x \leqslant 1/2^n$. 命 $n \to \infty$ 得 $x = y$.

练习 2 x 在 S 中当且仅当 x 的十进位小数表示有且只有以下两种情形:

(1) 所有 p_n 非 2 也非 3. 此种 x 全体记为 A, 则

$$[0,1) \setminus A = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \bigsqcup_{b_i \neq 2,3} [0.b_1 \cdots b_{n-1}2, 0.b_1 \cdots b_{n-1}4).$$

这是 Borel 集. 于是 A 是 Borel 集且 $\mathbf{m}(A) = 0$ 源自下式

$$\mathbf{m}([0,1) \setminus A) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{8^{n-1} \times 2}{10^n} = 1.$$

(2) 有个 $p_n = 2$ 且 $i < n$ 时, p_i 非 2 也非 3. 此种 x 全体记为 B, 则

$$B = \bigsqcup_{n \geqslant 1} \bigsqcup_{b_i \neq 2,3} [0.b_1 \cdots b_{n-1}2, 0.b_1 \cdots b_{n-1}3).$$

故 B 是 Borel 集且 $\mathbf{m}(B) = \sum_{n \geqslant 1} 8^{n-1}/10^n = 1/2$.

现在 $S = A \sqcup B$, 所以 S 是 Borel 集且 $\mathbf{m}(S) = 1/2$.

练习 3 第二次移去的两个区间的长度和是 $c(1-c)$. 设第 n 次移去的所有区间的长度和是 $c(1-c)^{n-1}$, 则第 $n+1$ 次移去的所有区间长度和是

$$c(1 - c - c(1-c) - \cdots - c(1-c)^{n-1}) = c(1-c)^n.$$

因此所有被移去的区间的长度和是 $\sum_{n \geqslant 1} c(1-c)^{n-1} = 1$, 从而 $\mathbf{m}(K_c) = 0$.

练习 4 E 的面积为 $1^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{n-1}}{9^n} = 0$. 下面为区别平面中的点与直线上的开区间, 以 x 和 y 为坐标分量的点仍记为 (x, y), 以 x 和 y 为端点的开区间则记为 $(x < y)$. 下面的小数都使用三进位的.

移去的 1 个第 1 级开正方形是 $(0.1 < 0.2) \times (0.1 < 0.2)$. 移去的 8 个第 2 级开正方形是 $(0.a_1 1 < 0.a_1 2) \times (0.b_1 1 < 0.b_1 2) : a_1, b_1 = 0, 1, 2$ 且 a_1 和 b_1 不同时为 1. 一般地, 移去的 8^{n-1} 个第 n 级开正方形是以下 9^{n-1} 个正方形

$$
\begin{aligned}
&(0.a_1 \cdots a_{n-1} 1 < 0.a_1 \cdots a_{n-1} 2) \\
&\times (0.b_1 \cdots b_{n-1} 1 < 0.b_1 \cdots b_{n-1} 2) : \{a_i, b_i\} \subseteq \{0, 1, 2\}
\end{aligned}
$$

中不落于第 $n-1$ 级开正方形的那些. 命 O 表示所有移去的开正方形之并.

上面所列的 9^{n-1} 个开正方形中有一些是第 n 级的, 另外一些则落于第 $n-1$ 级开正方形中. 因此平面上的点 (x, y) 在 O 中当且仅当有个 n 和取值于 $0, 1, 2$ 的整数 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 和 $b_1, \cdots, b_{n-1}$ 使

$$
\begin{aligned}
0.a_1 \cdots a_{n-1} 1 < &x < 0.a_1 \cdots a_{n-1} 2, \\
0.b_1 \cdots b_{n-1} 1 < &y < 0.b_1 \cdots b_{n-1} 2.
\end{aligned}
$$

当且仅当有个 n 使 x 和 y 的三进位小数表示中第 n 位同时为 1.

可见, E 由这样的点 (x, y) 构成: x 和 y 表示成三进位小数

$$
x = 0.p_1 \cdots p_n \cdots ; y = 0.q_1 \cdots q_n \cdots
$$

时, p_n 和 q_n 中至少有一个不为 1.

练习 5 现说明 f 一致连续. 首先, 它是递增函数. 其次, 当 $x_1 < x_2$ 时,

$$
E \cap (-\infty, x_2) \subseteq (E \cap (-\infty, x_1]) \cup (E \cap (x_1, x_2]).
$$

据外测度的有限次可加性得 $f(x_2) \leqslant f(x_1) + x_2 - x_1$. 这即

$$
f(x_2) - f(x_1) \leqslant x_2 - x_1.
$$

练习 6 命 $f(x) = \mathbf{m}(E \cap [-x, x])$. 用类似练习 5 的方法可知 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 于是 $f(\mathbb{R})$ 是一个区间. 因为

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{m}(E) = \lim_{n \to \infty} f(n) = \sup f(\mathbb{R}) \\
\Rightarrow &[0, \mathbf{m}(E)) \subseteq f(\mathbb{R}) = [0, \mathbf{m}(E)],
\end{aligned}
$$

从而 $\{\mathbf{m}(F) | F\} = [0, \mathbf{m}(E)]$, 其中 F 取遍 E 的 Lebesgue 可测子集.

练习 7 不存在. 为此设 F 是 $[-1,1]$ 中测度为 2 的闭集. 命

$$U=[-1,1]\setminus(F\cup\{\pm1\})=(-1,1)\setminus F,$$

这是 Lebesgue 测度为 0 的开集. 这样 $U=\varnothing$, 从而 $F\cup\{\pm1\}=[-1,1]$. 这表明 $(-1,1)\subseteq F$. 又 F 是闭集表明 $[-1,1]\subseteq F$. 这样 $F=[-1,1]$.

练习 8 命 $E=\bigcap E_n$, 则 $[0,1]\setminus E$ 是可列个 Lebesgue 零集 $[0,1]\setminus E_n : n\geqslant 1$ 之并. 因此 $\mathbf{m}(E)=1$.

练习 9 设 $0<c\leqslant 1$, 命 $s=c/(1+c)$. 设非空开集 V 的每个构成区间 I 的长度都有限. 移去位于 I 中间位置且长度是 $s\mathbf{m}(I)$ 的开区间, 剩下两个等长区间; 再移去这两个区间中间位置且长度是 $s^2\mathbf{m}(I)$ 的开区间, 剩下四个等长区间. 这个过程进行下去, 将移去的开区间合并为一个开集 $I(c_1)$, 而 I 中剩下的集记为 $I[c_1]$. 因为

$$s+2s^2+\cdots+2^{n-1}s^n+\cdots=c,$$

所以 $\mathbf{m}(I(c))=c\mathbf{m}(I)$ 而 $\mathbf{m}(I[c_1])=(1-c)\mathbf{m}(I)$. 明显地, $I(c)$ 中最大构成区间的长度是 $s\mathbf{m}(I)$. 当 I 取遍 V 的构成区间时, 作开集 $V(c)=\bigcup\limits_I I(c)$.

命 $c_n=1-1/2^n$ 并作开集 $V=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(k-1,k)$, 显然 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}c_{n+k}\neq 0$. 同上作开集 $V(c_1)$. 归纳地作开集 $V(c_1)\cdots(c_n):n=1,2,\cdots$, 这记为 V_n.

作 G_δ- 型集 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}V_n$. 又 V_1 的构成区间的最大长度是 $c_1/(1+c_1)$ 且 $\mathbb{R}\setminus V_1$ 不含长度非零的区间, 归纳地知 V_n 的构成区间的最大长度是 $\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{c_i}{1+c_i}$ 且 $\mathbb{R}\setminus V_n$ 不含长度非零的区间. 这表明总有 $(a,b)\cap V_n\neq\varnothing$, 于有个 n 使 V_n 的某个构成区间 I 落于 (a,b) 中. 归纳地可知,

$$(a,b)\cap V_{n+k}\supseteq I(c_{n+1})\cdots(c_{n+k}).$$

于是

$$\begin{aligned}\mathbf{m}((a,b)\cap E)&=\lim_{k\to\infty}\mathbf{m}((a,b)\cap V_{n+k})\\&\geqslant\lim_{k\to\infty}\mathbf{m}(I(c_{n+1})\cdots(c_{n+k}))=\mathbf{m}(I)\prod_{k=1}^{\infty}c_{n+k}>0.\end{aligned}$$

因为 $I[c_{n+1}]\subseteq(a,b)\setminus V_{n+1}\subseteq(a,b)\setminus E$, 所以 $\mathbf{m}((a,b)\setminus E)>0$.

练习 10 无妨设 $\mathbf{m}(U\setminus F)=0$, 则 $U\setminus F=\varnothing$, 从而 $U\subseteq F$. 于是闭集 F 包含所有的有理数, 这样 $F=\mathbb{R}$. 因为 U 的 Lebesgue 测度有限, 从而 $\mathbf{m}(F\setminus U)=+\infty$. 这样 $\mathbf{m}(U\Delta F)>0$.

练习 11 总有 $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\,\mathbf{m}(E\cap(x+E))\leqslant\mathbf{m}(E)$, 说明 $\mathbf{m}(E)\leqslant\lambda(E)$ 即可, 其中 $\lambda(E)=\underline{\lim\limits_{x\to 0}}\,\mathbf{m}(E\cap(x+E))$. 要说明的不等式成立时称 E 具有性质 (K).

(1) 当 E 是 n 维区间 $(a,b]$ 时, E 具有性质 (K). 为此约定

$$a\vee c=(a_1\vee c_1,\cdots,a_n\vee c_n),$$
$$b\wedge d=(b_1\wedge d_1,\cdots,b_n\wedge d_n).$$

于是当 $x\to 0$ 时, $E\cap(x+E)=(a\vee(x+a),b\wedge(b+x)]$, 从而

$$\mathbf{m}(E\cap(x+E))=\prod_{i\leqslant n}(b_i\wedge(x_i+b_i)-a_i\vee(a_i+x_i))$$

上式右端极限自然是 $\mathbf{m}(E)$.

(2) 当 E_i 都是 n 维左开右闭区间使 $E=\bigsqcup\limits_{1\leqslant i\leqslant k}E_i$ 时, E 具有性质 (K):

$$\begin{aligned}&E\cap(x+E)\supseteq\bigsqcup_{i\leqslant k}(E_i\cap(x+E_i))\\ \Rightarrow&\mathbf{m}(E\cap(x+E))\geqslant\sum_{i\leqslant k}\mathbf{m}(E_i\cap(x+E_i))\\ \Rightarrow&\lambda(E)\geqslant\sum_{i\leqslant k}\mathbf{m}(E_i)=\mathbf{m}(E).\end{aligned}$$

(3) 具有性质 (K) 的递增集列 (E_j) 的极限 E 具有性质 (K). 为此注意到

$$E_j\cap(x+E_j)\leqslant E\cap(x+E),$$

所以 $\mathbf{m}(E_j)\leqslant\lambda(E)$. 命 $j\to\infty$ 并用测度的下连续性即可.

(4) 具有性质 (K) 的测度有限递减集列 (E_j) 的极限 E 也具有性质 (K). 为此记 $F_j=E_j\setminus E$, 则 $E_j=E\cup F_j$. 由 $x+E_j=(x+E)\cup(x+F_j)$ 得

$$E_j\cap(x+E_j)\subseteq(E\cap(x+E))\cup(x+F_j)\cup F_j.$$

这得 $\mathbf{m}(E_j)\leqslant\lambda(E)+2\mathbf{m}(F_j)$. 命 $j\to\infty$ 并用测度的上连续性即可.

(5) 任取 $(a,b]$, 使 $E\cap(a,b]$ 具有性质 (K) 的 Borel 集 E 全体记为 $\mathcal{M}$. 当 $E\in\mathcal{R}_n$ 时, $E\cap(a,b]$ 还在 $\mathcal{R}_n$ 中. 据 (2) 知 $\mathcal{R}_n\subseteq\mathcal{M}$. 任取 $\mathcal{M}$ 的一个单调序列 (E_j), 其极限记为 E. 因为 $(E_j\cap(a,b])$ 是具有性质 (K) 的测度有限单调序列, 由 (3)-(4) 知极限 $E\cap(a,b]$ 也具有性质 (K).

据单调类定理知 $\mathcal{M}=\mathcal{B}_n$. 这表明 E 是 Borel 集时, $E\cap(a,b]$ 具有性质 (K). 以 e 代表分量都为 1 的 n 维向量, 则 $(E\cap(-je,je])_{j=1}^{\infty}$ 递增至 E. 据 (3) 知 E 具有性质 (K).

(6) 一般 Lebesgue 可测集 E 包含一个 Borel 集 E_1 使 $\mathbf{m}(E_1)=\mathbf{m}(E)$, 于是从不等式 $E_1\cap(x+E_1)\subseteq E\cap(x+E)$ 得 $\mathbf{m}(E)\leqslant\lambda(E)$.

(4)-(6) 可换为 (7): 先设 $\mathbf{m}(E)$ 有限. 任取 $F\in\mathcal{R}_n$, 命 $G=E\Delta F$. 于是 $E\subseteq F\cup G$(这得 $\mathbf{m}(E)\leqslant\mathbf{m}(F)+\mathbf{m}(G)$) 且 $F\subseteq E\cup G$. 这得

$$(x+F)\cap F\subseteq((x+E)\cap E)\cup(x+G)\cup G.$$

据 (2) 得 $\mathbf{m}(F)\leqslant\lambda(E)+2\mathbf{m}(G)$. 于是 $\mathbf{m}(E)\leqslant\lambda(E)+3\mathbf{m}(G)$. 据 §2.2 定理 2 知 $\mathbf{m}(G)$ 可任意地小, 所以 $\mathbf{m}(E)\leqslant\lambda(E)$. 当 $\mathbf{m}(E)$ 无限时, Lebesgue 测度有限集列 $(E\cap\{x:|x|\leqslant j\})_{j=1}^{\infty}$ 递增至 E. 据 (3) 知 E 满足 (K).

练习 12 注意到练习 11 的结论与下式即可

$$\begin{aligned}\mathbf{m}(E\Delta(x+E))=\mathbf{m}(E)+\mathbf{m}(x+E)\\ -2\mathbf{m}(E\cap(x+E)).\end{aligned}$$

练习 13 (1) 开集族 $O(x,r):x\in E,r>0$ 覆盖 E, 取其一个可数子覆盖 $O(x_j,r_j):j\geqslant1$. 于是 $E\cap O(x_j,r_j):j\geqslant1$ 并为 E. 由可列次可加性得

$$0<\mathbf{m}(E)\leqslant\sum_j\mathbf{m}(E\cap O(x_j,r_j)),$$

从而有个 j 使 $\mathbf{m}(E\cap O(x_j,r_j))>0$.

(2) 据练习 11 得 $r>0$ 使 $|x|<r$ 时, $\mathbf{m}(E\cap(x+E))>0$. 于是 E 与 $x+E$ 有交点: 存在 $y,z\in E$ 使 $y=x+z$, 即 $x=y-z$. 这表明 $O(x,r)\subseteq E-E$. (3) 和 (4) 源自 (2).

练习 14 否则, 存在 $x\in\mathbb{R}^n$ 及 $r>0$ 使任何 $z\in\mathbb{R}^n\setminus E$ 满足 $|z-x|\geqslant r$. 于是 $O(x,r)\subseteq E$, 这得 $\mathbf{m}(E)>0$. 矛盾.

练习 15 要说明 $\mathbf{m}^*(E)=0$. 命 $E_k=E\cap(-ke,ke]$, 则集列 $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ 并为 E. 说明 E_k 都是零集即可. 当 $\varepsilon>0$ 时, $(-ke,ke]$ 中有左开右闭的区间列 (I_j) 使 $E_k\subseteq\bigcup\limits_j I_j$ 且 $\sum\limits_j\mathbf{m}(I_j)<\mathbf{m}^*(E_k)+\varepsilon$. 等式 $E_k=\bigcup\limits_j(I_j\cap E_k)$ 表明

$$\begin{aligned}\mathbf{m}^*(E_k)&\leqslant\sum_j\mathbf{m}^*(E_k\cap I_j)\\&\leqslant\sum_j\mathbf{m}(I_j)/2<(\mathbf{m}^*(E_k)+\varepsilon)/2.\end{aligned}$$

因此 $\mathbf{m}^*(E_k)<\varepsilon$. 命 $\varepsilon\to0$ 得 $\mathbf{m}^*(E_k)=0$.

练习 16 当开集 W 包含 $E\cup F$ 时, 不相交的开集 $W\cap U$ 与 $W\cap V$ 分别包含 E 与 F. 于是 $\mathbf{m}^*(E)\leqslant \mathbf{m}(U\cap W)$ 且 $\mathbf{m}^*(F)\leqslant \mathbf{m}(V\cap W)$. 这两式相加得 $\mathbf{m}^*(E)+\mathbf{m}^*(F)\leqslant \mathbf{m}(W)$. 关于所有这种 W 取下确界得

$$\mathbf{m}^*(E)+\mathbf{m}^*(F)\leqslant \mathbf{m}^*(E\cup F).$$

反向不等式源自外测度的次可加性.

练习 17 结论源自 $[0,1]\setminus E=\bigcup_{i=1}^{n}([0,1]\setminus E_i)$ 及下式

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{m}([0,1]\setminus E_i)\leqslant \sum_{i=1}^{n}(1-\mathbf{m}(E_i))=1.$$

练习 18 注意到 $X\subseteq(\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{R})$, 有

$$\mathbf{m}^*(X)\leqslant(+\infty)\times 0+0\times(+\infty)=0.$$

练习 19 按约定, 当 $b_i\neq 7$ 时, $0.b_1\cdots b_{n-1}7$ 可写成 $0.b_1\cdots b_{n-1}699\cdots$, 它不含 7. 于是十进位小数含数字 7 的集合是

$$\bigcup\{(0.b_1\cdots b_{n-1}7,0.b_1\cdots b_{n-1}8)|n\geqslant 1;b_1,\cdots,b_{n-1}\neq 7\},$$

它是开集并且其 Lebesgue 测度是 $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{9^{n-1}}{10^n}=1$. 这样 E 是紧集且 $\mathbf{m}(E)=0$.

练习 20 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{S}^e$ 当且仅当存在 $r>0$ 使 $\mathbf{m}^*(O(x,r)\cap S)=0$. 此时若 $d(x,y)<r$, 命 $s=r-d(x,y)$, 则 $O(y,s)\subseteq O(x,r)$. 于是

$$\mathbf{m}^*(O(y,s)\cap S)=0.$$

这样 $O(x,r)\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\overline{S}^e$. 因此 $\mathbb{R}^n\setminus\overline{S}^e$ 是开集且据 §1.5 练习 7, 有可数个开球 $O(x_j,r_j):j\geqslant 1$ 使 $\mathbf{m}^*(O(x_j,r_j)\cap S)=0$ 且 $\mathbb{R}^n\setminus\overline{S}^e=\bigcup\limits_j O(x_j,r_j)$. 从而 $\mathbf{m}^*(S\setminus\overline{S}^e)=0$.

练习 21 因为 $\mathbb{R}^n$ 中有理点全体 $\mathbb{Q}^n$ 是可列集, 每个有理点 $z\in\mathbb{Q}^n$ 对应一个 $r_z>0$ 使 $\sum\limits_{z\in\mathbb{Q}^n}r_z^n<+\infty$. 命 $U=\bigcup\limits_{z\in\mathbb{Q}^n}(z-r_ze,z+r_ze)$, 这是 $\mathbb{R}^n$ 中包含所有有理点的开集且 $\mathbf{m}(U)<+\infty$, 命 $E=\mathbb{R}^n\setminus U$ 即可.

练习 22 当 $a \in F$ 时, $E+a$ 是 $[0,2]^n$ 中的子集且

$$\sum_{a\in F}\mathbf{m}(E+a)=k\mathbf{m}(E)>2^n,$$

从而 F 中至少有两个互异点 a 和 b 使 $E+a$ 和 $E+b$ 相交非空. 取它们的一个交点 z, 则 E 中有两点 y 和 x 使 $z=y+a=x+b$.

练习 23 由条件得 $(-c,c)\subseteq(E-a)\cup(a-E)$. 于是 $\mathbf{m}(E-a)\geqslant c$ 或 $\mathbf{m}(a-E)\geqslant c$. 据 Lebesgue 测度的平移不变性和反射不变性得 $\mathbf{m}(E)\geqslant c$.

练习 24 可设 $\mathcal{J}$ 中任何有限个相互不交成员不覆盖 E. 取测度有限开集 U 包含 E, 以 $\{I\in\mathcal{J}|I\subseteq U\}$ 代替 $\mathcal{J}$ 后可设 $\mathcal{J}\subseteq 2^U$. 取 $I_1\in\mathcal{J}$, 命

$$c_1=\sup\{|I|_1: I\in\mathcal{J}, I\cap I_1=\varnothing\}(\leqslant|U|_1<+\infty).$$

取 $I_2\in\mathcal{J}$ 使 $I_2\cap I_1=\varnothing$ 且 $|I_2|_1>c_1/2$. 归纳地命

$$c_k=\sup\{|I|_1: I\in\mathcal{J}, I\cap(I_1\sqcup\cdots\sqcup I_k)=\varnothing\}.$$

取 $I_{k+1}\in\mathcal{J}$ 使 $I_{k+1}\cap(I_1\sqcup\cdots\sqcup I_k)=\varnothing$ 且 $|I_{k+1}|_1>c_k/2$. 如此这样得到的相互不交的区间序列 (I_k) 适合 $\sum\limits_k|I_k|_1\leqslant|U|_1$. 与 I_k 有相同中点且为 I_k 的 5 倍长的区间记为 I_k^*. 取 n 使 $\sum\limits_{k>n}|I_k|_1<\delta/5$.

命 $F=E\setminus\bigsqcup\limits_{k\leqslant n}I_k$. 任取 $x\in F$, 则有长度足够小的 $I\in\mathcal{J}$ 使 $x\in I$ 且 I 与 $\bigsqcup\limits_{k\leqslant n}I_k$ 无交. 因为 $c_q<2|I_{q+1}|_1$ 且 $\lim\limits_{q\to\infty}|I_{q+1}|_1=0$, 所以有个 q 使 $|I|_1>c_q$. 这样可得个最小正整数 k 使 I 与 I_k 相交. 因为 x 与 I_k 的中点至多相距

$$|I|_1+|I_k|_1/2\leqslant c_{k-1}+|I_k|_1/2<5|I_k|_1/2,$$

所以 I_k^* 包含 x 且 $k>n$. 因此 $I_k^*: k>n$ 覆盖 F 而 $|F|^*\leqslant\sum\limits_{k>n}|I_k^*|_1<\delta$.

练习 25 以 $L(\mathcal{J})$ 记 $\mathcal{J}$ 中成员的左端点集. 命

$$\mathcal{J}_k=\{E\in\mathcal{J}:|E|_1>1/k\},$$

这得递增至 $\mathcal{J}$ 的序列 $(\mathcal{J}_k)_{k=1}^{\infty}$. 命 $S_k=L(\mathcal{J}_k)\cap S$, 这得递增至 S 的集列 (S_k). 据 §2.1 练习 17(11) 得 $\lim\limits_{n\to\infty}|S_k|_1^*=|S|_1^*$.

可设 $\delta\leqslant|S|_1^*$, 取 k 使 $|S|_1^*<|S_k|_1^*+\delta/2$. 命 $b_1=\sup S_k$ 和 $a_1=\inf S_k$, 则 $a_1<b_1$. 命 $l=b_1-a_1$ 且 $\eta=\delta/(2kl+2)$, 则 S_k 与 $[a_1,a_1+\eta)$ 有个交点 x_1, 这是 $\mathcal{J}_k$ 中某成员 E_1 的左端点. 若 $x_1+|E_1|_1\geqslant b_1$, 则 $n=1$; 否

则, $S_k \cap [x_1 + |E_1|_1, b_1]$ 不空, 其下确界记为 a_2, 则 S_k 与 $[a_2, a_2+\eta)$ 有个交点 x_2, 这是 $\mathcal{J}_k$ 中某成员 E_2 的左端点. 显然 E_1 与 E_2 不交. 如此过程只能进行有限次得 $x_1, \cdots, x_n$ 与 $\mathcal{J}_k$ 中有限个相互不交的成员 $E_1, \cdots, E_n$ 使 x_i 为 E_i 的左端点且 $S_k \subseteq E \cup F$, 其中 E 为诸 E_i 之并而 F 为诸 $[a_i, x_i]$ 之并. 命 $G = E \cup F$. 注意到

$$\frac{n-1}{k} < |E_1|_1 + \cdots + |E_{n-1}|_1 < l,$$

这得 $n < kl + 1$. 从而 $2n\eta < \delta$. 于是 $|F|_1 < \delta/2$. 因为

$$|S|_1^* = |S \cap G|_1^* + |S \setminus G|_1^*$$

及 $S_k \subseteq S \cap G$, 所以

$$|S_k|_1^* + \delta/2 > |S_k|_1^* + |S \setminus G|_1^*.$$

这得 $|S \setminus G|_1^* < \delta/2$. 最后注意到 $S \setminus E \subseteq (S \setminus G) \cup F$ 即可.

练习 26 (1) 明显 $0 \leqslant \mu(E) \leqslant +\infty$ 且 $\mu(\varnothing) = 0$. 设可列个 Borel 集 (E_n) 的无交并为 E, 则 $(E_n \cap \mathbb{Q})$ 的无交并为 $E \cap \mathbb{Q}$. 这得

$$|E \cap \mathbb{Q}|_0 = \sum_n |E_n \cap \mathbb{Q}|_0.$$

此即 $\mu(E) = \sum\limits_n \mu(E_n)$, 从而 μ 是测度, 其 σ- 有限性源自 $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$ 及 $r \in \mathbb{Q}$ 时, $\mu(\{r\}) = 1$.

(2) 命 $E = \{0\}$, 则 $\mu(E) = 1$. 当 V 是含 E 的开集时, 有个 $r > 0$ 使 V 包含开区间 $(-r, r)$. 因此 V 中有可列个有理数, 这样 $\mu(V) = +\infty$.

练习 27 可设 $i < j$ 时, $a_i \leqslant a_j$. 因为 $[a_i, b_i]$ 和 $[a_j, b_j]$ 至多交于端点,

$$\bigcup\{[a_i, b_i] | i \leqslant n\} = \bigsqcup\{(a_i, b_i) | i \leqslant n\} \cup \{a_i, b_i | i \leqslant n\}.$$

上式左端记为 E, 则 $|E|_1 = b - a$ 且 $[a, a_1) \cup E \subseteq [a, b]$. 这得

$$a_1 - a + (b - a) = b - a.$$

因此 $a = a_1$ 且 $[a, a_2) \cup \bigcup\limits_{i>1} [a_i, b_i] \subseteq [a, b]$. 这得

$$a_2 - a + \sum_{i>1} (b_i - a_i) = b - a.$$

这得 $b_1 = a_2$. 归纳可得 $b_{i-1} = a_i$ 且 $b_n = b$. 从而 $[a, b] = \bigcup\{[a_i, b_i] | i \leqslant n\}$.

练习 28 命 $f(x,y)=x-y$. 这得连续函数 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$. 它的最小值和最大值分别是 $a-d$ 和 $b-c$. 因为 $[a,b]\times[c,d]$ 连通，所以 f 能取到最小值与最大值之间的一切值. 因此 $[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]$.

练习 29 在构造 K 时，前 n 次移去的开区间组成一个开集 O_n，则

$$O_n=\bigsqcup(0.a_1\cdots a_{i-1}1,0.a_1\cdots a_{i-1}2),$$

其中 $i=1,\cdots,n$ 而诸 a_j 非 0 即 2. 作紧集 $K_n=[0,1]\setminus O_n$，则 (K_n) 递减至 K. 若三进位小数 $0.p_1p_2\cdots$ 中允许 $-3\leqslant p_i\leqslant 3$，则

$$K_n=\bigsqcup[0.a_1\cdots a_{n-1}0,0.a_1\cdots a_{n-1}1]$$
$$\sqcup\bigsqcup[0.a_1\cdots a_{n-1}2,0.a_1\cdots a_{n-1}3],$$

其中 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 非 0 即 2. 可见 K_n 是 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间无交并. 在计算 K_n-K_n 之前，先将 K_n 写成以下形式

$$K_n=\bigsqcup[0.b_1\cdots b_{n-1}0,0.b_1\cdots b_{n-1}1]$$
$$\sqcup\bigsqcup[0.b_1\cdots b_{n-1}2,0.b_1\cdots b_{n-1}3],$$

其中 $b_1,\cdots,b_{n-1}$ 非 0 即 2. 据练习 28 知

$$K_n-K_n=\bigcup[0.c_1\cdots c_{n-1}(-3),c_1\cdots c_{n-1}3],$$

其中 $c_i=a_i-b_i$，它的取值可为 0 或 ±2. 上面 $\cup$ 之后的闭区间有 3^{n-1} 个，记为 $E_k:k=1,\cdots,3^{n-1}$. 它们都是 $[-1,1]$ 的闭子区间，每个长 $6/3^n$ 即 $2\cdot3^{1-n}$，它们总长为 2. 当 d_i 为 0 或 ±2 且有个 $d_i\neq c_i$ 时，无妨设 $d_i-c_i\geqslant 2$ 且 $j<i$ 时，$d_j=c_j$. 于是

$$0.d_1\cdots d_{n-1}(-3)-0.c_1\cdots c_{n-1}3$$
$$\geqslant\frac{2}{3^i}-\sum_{i<j<n}\frac{4}{3^j}-\frac{6}{3^n}=0.$$

可见 E_k 和 E_l 不相等时至多相交个端点. 据练习 27 知 $\bigcup E_k=[-1,1]$. 这即 $K_n-K_n=[-1,1]$. 当 $-1\leqslant z\leqslant 1$ 时，可作非空紧集.

$$E_n=\{(x,y)\in K_n\times K_n|x-y=z\},$$

这得递减紧集列 (E_n)，它们有个公共交点 (x_0,y_0). 于是

$$(x_0,y_0)\in\bigcap_n(K_n\times K_n)=K\times K.$$

这样 $z=x_0-y_0$ 在 $K-K$ 中. 从而 $[-1,1]\subseteq K-K$. 明显 $K-K\subseteq[-1,1]$.

§2.3 可测映射

练习 1 非零实数全体 $\mathbb{R}^{\times}$ 是 Borel 集，f 限制在 $\mathbb{R}^{\times}$ 上连续因而这限制是 Borel 函数；又 f 限制在 Borel 集 $\{0\}$ 上自然是 Borel 函数. 因为黏接保持可测性，所以 f 是 Borel 函数.

练习 2 对于 X 的可测集，$\pi^{-1}(E)=E\times Y$ 是可测矩形，因此 π 是可测映射. 同样 τ 也是可测映射. 如果 $\mathcal{T}$ 是 $X\times Y$ 上 σ- 代数使 $\pi:(X\times Y,\mathcal{T})\to(X,\mathcal{R})$ 且 $\tau:(X\times Y,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{S})$，则当 E 是 X 的可测集且 F 是 Y 的可测集时，

$$E\times F=\pi^{-1}(E)\cap\tau^{-1}(F)\in\mathcal{T}.$$

因此 $\mathcal{R}*\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}$. 这样 $\mathcal{R}\times\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}$.

练习 3 提示：命 $\mathcal{S}=\{F\subseteq Y|\forall i\in I:f_i^{-1}(F)\in\mathcal{R}_i\}$. 因为 $f_i^{-1}(Y)=X_i$，所以 Y 是 $\mathcal{S}$ 中成员. 又原像保持并与差运算，从而 $\mathcal{S}$ 是 σ- 环.

当 $\mathcal{A}$ 也是 Y 上 σ- 代数恒使 $f_i:(X,\mathcal{R}_i)\to(Y,\mathcal{A})$ 时，明显有 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{S}$.

练习 4 当 F_i 取遍 Y_i 的可测集时，$f_i^{-1}(F_i)$ 在 $\sigma(f_i:i\in I)$ 中. 这样 f_i 是可测映射. 如果 X 上另有 σ- 代数 $\mathcal{A}$ 恒使 $f_i:(X,\mathcal{A})\to(Y_i,\mathcal{S}_i)$，则 $f_i^{-1}(F_i)$ 应在 $\mathcal{A}$ 中. 这样 $\mathbf{S}\{f_i^{-1}(F_i)|i\in I,F_i\in\mathcal{S}_i\}\subseteq\mathcal{A}$.

练习 5 (1) $\operatorname{sgn}E$ 只能是有限集 $\{-1,0,1\}$ 的子集，这些子集都是 Borel 集. 命 $E_{\pm}=\{x\in\mathbb{R}|\pm x>0\}$ 和 $E_{\pm}^0=E_{\pm}\sqcup\{0\}$ 及 $E^{\times}=E_+\cup E_-$. 因此，

$$\operatorname{sgn}^{-1}(F)=\begin{cases}\varnothing:-1\notin F,0\notin F,1\notin F;\\ E_-:-1\in F,0\notin F,1\notin F;\\ E_+:-1\notin F,0\notin F,1\in F;\\ \{0\}:-1\notin F,0\in F,1\notin F;\\ E_-^0:-1\in F,0\in F,1\notin F;\\ E_+^0:-1\notin F,0\in F,1\notin F;\\ E^{\times}:-1\in F,0\notin F,1\in F;\\ \mathbb{R}:-1\in F,0\in F,1\in F.\end{cases}$$

可见，$\mathcal{S}=\{\varnothing,\{0\},E_+,E_-,E_+^0,E_-^0,E^{\times},\mathbb{R}\}$.

(2) 命 $f(x)=[x]$，则 $f(E)$ 只能是可列集 $\mathbb{Z}$ 的子集，这些子集都是 Borel 集. 注意到 $f^{-1}(F)=\bigsqcup\limits_{n\in F}[n,n+1)$，这得 $\mathcal{S}=\{\bigsqcup\limits_{n\in J}[n,n+1)|J\subseteq\mathbb{Z}\}$.

(3) 当 $n \in \mathbb{Z}$ 时，限制 $\sin : (-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi] \to (-1, 1]$ 和限制 $\sin : (\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi] \to (-1, 1]$ 都双向连续 (从而是 Borel 同构). 由

$$\sin E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \sin(E \cap (-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi]) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \sin(E \cap (\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi]).$$

得 (结论): 当 E 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集时， $\sin E$ 是 Borel 集. 下面证明:

$$\mathcal{S} = \{E \in \mathcal{B}_1 | E = \pi - E = 2\pi + E\}.$$

为此设 E 在上式右端，据 (结论) 可作 Borel 集 $F = \sin E$. 当 $x \in E$ 且 $\sin y = \sin x$ 时，有整数 k 使 $y = 2k\pi + x$ 或 $y = 2k\pi + \pi - x$, 从而 $y \in E$. 据 §1.2 练习 13 知 $E = \sin^{-1}(F)$. 因此 E 在 $\mathcal{S}$ 中. 反之，任取 $E \in \mathcal{S}$, 是有 Borel 集 F 使 $E = \sin^{-1}(F)$. 于是 E 是 Borel 集且由等式

$$\sin(\pi - x) = \sin(2\pi + x) = \sin x.$$

知 E 满足大括号内的条件. 这样要证的集合等式成立.

(4) 当 $k \in \mathbb{Z}$ 时，限制 $\tan : (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \to \mathbb{R}$ 是双向连续函数，从而是 Borel 同构. 当 E 是 X 的 Borel 集时， $\tan E$ 是 Borel 集:

$$\tan E = \bigcup\{\tan(E \cap (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)) | k \in \mathbb{Z}\}.$$

仿 (3) 可证有 Borel 集 F 使 $E = \tan^{-1}(F)$ 当且仅当 E 是 Borel 集且 $\pi + E = E$. 因此 $\mathcal{S} = \{E \in \mathcal{B}(X) | \pi + E = E\}$.

(5) 因为 $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 和 $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是互逆的 Borel 函数, 所以它们是 Borel 同构. 这样它们都将 Borel 集映为 Borel 集. 于是 $\mathcal{S} = \mathcal{B}_1$.

(6) 当 n 是整数时，限制 $(\cdot) : [n, n+1) \to [0, 1)$ 是双向连续函数 (从而是 Borel 同构), 所以当 E 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel 集时， $(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (E \cap [n, n+1))$, 这是 Borel 集. 仿 (3) 可证有 Borel 集 F 使 $E = (\cdot)^{-1}(F)$ 当且仅当 E 是 Borel 集且 $1 + E = E$. 于是 $\mathcal{S} = \{E \in \mathcal{B}_1 | E + 1 = E\}$.

练习 6 注意到这些函数都是连续函数即可.

练习 7 提示: (1) 命 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为 $f(x,y)=(x+y,x-y)$, 则 f 是连续函数且 $E=f^{-1}([0,2]\times[0,1])$, 从而 E 是 Borel 集.

(2) 命 $f(a,x)=(-ax_1,ax_2,\cdots,(-1)^n ax_n)$, 则 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续函数. 因为 $E=f^{-1}((-\infty,1]^n)$, 所以 E 是 Borel 集.

(3) 命 $f(x,y)=(\max\{x,y\},\min\{x,y\})$, 则 $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 连续且 $E=f^{-1}((-\infty,100]\times[10,+\infty))$, 所以 E 是 Borel 集.

(4) 命 $f(x)=|x|$, 则 f 连续且 $E=f^{-1}(\mathbb{Q})$, 所以 E 是 Borel 集.

练习 8 命 $\varphi(z)=|z|^p$, 则 $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是连续函数 (从而是 Borel 函数). 这样 $|f|^p$ 是 $f:X\to\mathbb{C}$ 与 $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 的复合, 它是可测函数. 又 $\exp\circ f$ 是可测函数 $f:X\to\mathbb{C}$ 与 Borel 函数 $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 的复合, 它是可测函数. 因为 $|f|^2$ 与 $|g|^2$ 都可测, 所以 $\sqrt{|f|^2+|g|^2}$ 是可测函数 $|f|^2+|g|^2:X\to[0,+\infty]$ 与连续函数 $\sqrt{\cdot}:[0,+\infty)\to\mathbb{C}$ 的复合, 它可测.

练习 9 提示: (1) 中函数是 f 与连续函数 $(x,y)\mapsto x\pm y$ 的复合.

(2) 中函数是 f 与连续函数 $(x,y)\mapsto xy$ 的复合.

(3) 中函数是 f 与连续函数 $(x,y)\mapsto x/y$ 的复合.

(4) 中函数是 f 与连续函数 $(x,y)\mapsto |x|^2+|y|^2$ 的复合.

(5) 中函数是 $f|_{\mathbb{R}}$ 与连续函数 $(x,y)\mapsto (x+y+|x-y|)/2$ 的复合.

(6) 中函数是 $f|_{\mathbb{R}}$ 与连续函数 $(x,y)\mapsto (x+y-|x-y|)/2$ 的复合.

练习 10 命 $X_0=(f>0)$ 而 $X_1=(f\leqslant 0)$, 则 $\{X_0,X_1\}$ 是 X 的可测划分. 将 f 在 X_i 上的限制记为 f_i, 则 f_i^2 都是可测函数.

命 $\varphi_i(y)=(-1)^i\sqrt{|y|}$, 则 $\varphi_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续因而是 Borel 函数. 又 $f_i=\varphi_i\circ f_i^2$. 所以 f_i 是可测. 因为 f 是 f_1 与 f_2 的黏接, 所以 f 可测.

练习 11 对任何实数 b, 取递增至 b 的有理数列 (b_n), 则可测集列 $((f<b_n))_{n=1}^{\infty}$ 递增至 $(f<b)$. 因此 $(f<b)$ 是可测集, 从而 f 是可测函数.

练习 12 因为 (1)~(4) 这四个集类都是 $\mathcal{B}_1$ 的子类, 所以

$$\mathbf{S}(1)\cup\mathbf{S}(2)\cup\mathbf{S}(3)\cup\mathbf{S}(4)\subseteq\mathcal{B}_1.$$

(1) 因为 $(a,b]=(a,+\infty)\setminus(b,+\infty)$, 所以 $\mathcal{B}_1\subseteq\mathbf{S}(1)$. 于是 $\mathcal{B}_1=\mathbf{S}(1)$.

(2) 因为 $(a,+\infty)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}[a+\frac{1}{n},+\infty)$, 所以 $\mathbf{S}(1)\subseteq\mathbf{S}(2)$.

(3) 因为 $(a,b]=(-\infty,b]\setminus(-\infty,a]$, 所以 $\mathcal{B}_1\subseteq\mathbf{S}(4)$. 于是 $\mathcal{B}_1=\mathbf{S}(4)$.

(4) 因为 $(-\infty,b]=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}(-\infty,b+\frac{1}{n})$, 所以 $\mathbf{S}(4)\subseteq\mathbf{S}(3)$.

总结以上诸结论得 $\mathbf{S}(1)=\mathbf{S}(2)=\mathbf{S}(3)=\mathbf{S}(4)=\mathcal{B}_1$.

练习 13 提示: 取覆盖 E 的测度有限可测集列 $\{G_n\}$, 命 $E_1 = G_1 \cap E$. 当 $n \geqslant 2$ 时, 命 $E_n = E \cap G_n \setminus \bigcup_{i<n} G_i$ 而 $F_n = \bigcup_{i \leqslant n} E_i$ 即可.

练习 14 作 $[0,1]$ 的可列子集 $D = \{\frac{i}{2^k} | i = 0, \cdots, 2^k; k \in \mathbb{N}\}$ 和 K 的可列子集 E 如下:

$$E = \{(0.a_1a_2\cdots)_3 \in K | \exists n \forall i \geqslant n : a_i = a_n\}.$$

作双射 $f: K \setminus E \to [0,1] \setminus D$ 如下:

$$f(0.b_1b_2\cdots)_3 = (0.\frac{b_1}{2}\frac{b_2}{2}\cdots)_2.$$

因为 f 和 f^{-1} 连续 (参见 §1.5 练习 16), 所以 f 是 Borel 同构. 又 E 和 D 作为可列集也是 Borel 同构的. 这样 K 和 [0,1] 是 Borel 同构的.

练习 15 对于实数 b, 取个 (最小) 闭集 E_i 使 $E_i \cap X = (f_i \leqslant b)$. 于是

$$(\sup_{i \in I} f_i \leqslant b) = \bigcap_{i \in I} (f_i \leqslant b) = (\bigcap_{i \in I} E_i) \cap X.$$

一簇闭集之交还是闭集, 上式右端是 Borel 集. 从而 $\sup_{i \in I} f_i$ 是 Borel 函数.

取个 (最大) 开集 U_i 使 $U_i \cap X = (f_i > b)$. 于是

$$(\inf_{i \in I} f_i > b) = \bigcup_{i \in I} (f_i > b) = (\bigcup_{i \in I} U_i) \cap X.$$

一簇开集之并还是开集, 上式右端是 Borel 集. 从而 $\inf_{i \in I} f_i$ 是 Borel 函数.

每个 f_i 仅是 Borel 函数时, 结论不必成立. 为此取非 Borel 集 E, 当 $a \in E$ 时, $\chi_{\{a\}}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 函数. 但 $\sup_{a \in E} \chi_{\{a\}} = \chi_E$, 这不是 Borel 函数.

练习 16 取可列个互异的可测集 $A_1, A_2, \cdots$, 其并记为 A. 命

$$\mathcal{P} = \{\bigcap_{n \geqslant 1} E_n | E_n = A_n \text{或} E_n = A \setminus A_n\},$$

据 §2.1 练习 24 知, $\mathcal{P}$ 中成员是相互不交的可测集恒使 $A_n = \bigsqcup \{H \in \mathcal{P} | H \subseteq A_n\}$, 所以 $\mathcal{P}$ 至少有可列个成员. 对于 $\mathcal{P}$ 的子类 $\mathcal{E}$(这些子类至少有 $2^{\aleph_0}$ 个), 作可测集 $[\mathcal{E}] = \bigcup_{H \in \mathcal{E}} H$. 因为 $\mathcal{P}$ 不同的子类 $\mathcal{E}$ 对应不同的 $[\mathcal{E}]$, 所以 X 至少有 $2^{\aleph_0}$ 个可测集.

练习 17 命 $E=E_1\cap E_2$, 这是 E_1 和 E_2 的非空可测子集. 因此 $E=E_1$ 且 $E=E_2$. 换言之 $E_1=E_2$.

练习 18 (1) 命 $E=\bigcap H_n$, 其中 H_n 如条件 (3) 所述. 当 E 同时包 x 和 y 时, 每个 A_n 含 x 当且仅当 A_n 含 y. 若 E 非原子, E 含一个非空可测真子集 F. 取 $a\in F$ 和 $b\in E\setminus F$, 于是有个 n 使 A_n 只含 a 和 b 中一个元素. 矛盾. 命 $\mathcal{P}$ 同 §2.1 练习 24, 作原子类 $\mathcal{A}=\mathcal{P}\setminus\{\varnothing\}$. 据 §2.1 练习 24 知

$$\bigsqcup\mathcal{A}=\bigcup_{n\geqslant 1}A_n=X.$$

(2) 若 $E\in\mathcal{A}$ 使 $B\cap E$ 不空, 则 $B\cap E=E$. 由此及上式知

$$\bigsqcup\{E|B\supseteq E\in\mathcal{A}\}=\bigsqcup\{B\cap E|E\in\mathcal{A}\}=B.$$

(3) 如果 B 也是 X 的一个原子, 由上式知 B 只能在 $\mathcal{A}$ 中.

(4) 命 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\chi_{A_n}(x)}{3^n}$, 作 K 的子集 $Y=f(X)$. 这得可测函数 $f:X\to Y$ 使 $f(x_1)=f(x_2)$ 当且仅当恒有 $\chi_{A_n}(x_1)=\chi_{A_n}(x_2)$ 当且仅当 x 和 y 在 X 的同一个原子中. 可见, A_n 都是 f 的浸润集. 据 §1.2 练习 14 知, f 的浸润集全体是个 σ- 代数. 特别地, $\mathcal{S}$ 中成员都是 f 的浸润集. 现在

$$f(A_n)=Y\cap\{(0.a_1a_2\cdots)_3\in K|a_n=2\},$$

这是 Y 的 Borel 集. 最后说明 $\mathcal{M}$ 是 σ- 环即可, 其中

$$\mathcal{M}=\{E\in\mathcal{S}|f(E)\in B(Y)\}.$$

首先它对可列并运算封闭. 其次据 §1.2 练习 14(1) 知 $\mathcal{M}$ 对差运算封闭.

练习 19 提示: 可列集类 $\{(a,b]|a,b\in\mathbb{Q}^n\}$ 生成 B_n. 由 $B(X)=\mathcal{B}_n\cap X$ 知 $B(X)$ 是可数生成的. 因为 X 的单点子集都是原子, 练习 18(4) 中 $f:X\to Y$ 是单射: $f(x)=f(z)$ 当且仅当 x 和 z 在同一个原子中当且仅当 $x=z$.

练习 20 (1) 任取 $F(\mathcal{E})$ 中序列 (f_n), 命 $g(i,a)=f_{a_1}(i,a_2,a_3,\cdots)$, 则

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}\bigcup_{a\in\mathbb{S}}\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}f_n(i,a)=\bigcup_{a\in\mathbb{S}}\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}g(i,a).$$

从而 $\mathbf{A}(\mathcal{E})$ 对可数并运算封闭. 对于 $a\in\mathbb{S}$, 命

$$\pi_n a=(a_{2^{n-1}(2j-1)})_{j=1}^{\infty};h(n,a)=\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}f_n(i,\pi_n a)$$

$$\Rightarrow\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+}(\bigcup_{a\in\mathbb{S}}\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}f_n(i,a))=\bigcup_{a^1,a^2,\cdots\in\mathbb{S}}\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+}\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}f_n(i,a^n)$$

$$=\bigcup_{a\in\mathbb{S}}\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+}\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}f_n(i,\pi_n a)=\bigcup_{a\in\mathbb{S}}\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+}h(n,a).$$

因此 $\mathbf{A}(\mathcal{E})$ 对可数交运算封闭.

(2) 任取 $g \in F(\mathbf{A}(\mathcal{E}))$ 及 $a \in \mathbb{S}$, 据 (1) 知有个 $f_a \in F(\mathcal{E})$ 使

$$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+} g(i,a) = M(f_a).$$

对于 $c \in \mathbb{Z}_+$, 命 $a = (c_{2n})_{n=1}^{\infty}$ 且 $b = (c_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ 及 $h(i,c) = f_a(i,b)$, 则 $h \in F(\mathcal{E})$ 且

$$\bigcup_{a\in\mathbb{S}} M(f_a) = \bigcup_{a\in\mathbb{S}}\bigcup_{b\in\mathbb{S}}\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+} f_a(i,b) = M(h).$$

(3) 要证明的等式两边记为 A 和 B. 任取 $x \in A$, 则有 $l \in \mathbb{Z}_+$ 和 $a \in \mathbb{S}$ 使 $k \in \mathbb{Z}_+$ 时, $x \in f(i+k+1,b)$, 其中 $b = (a_1,\cdots,a_i,l,a_{i+1},a_{i+2},\cdots)$. 这样 $x \in g(i+k,b)$, 从而 x 在 B 中. 反之, 有 $b \in \mathbb{S}$ 使 $k \in \mathbb{Z}_+$ 时,

$$x \in g(i+k+1,b) = g(i+k+1,a_1,\cdots,a_i,l,a_{i+1},\cdots),$$

其中 $j \leqslant i : a_j = b_j; l = b_{i+1}; j > i : a_j = b_{j+1}$. 因此 x 在 A 中.

(4) 命 $g(i,a) = f(1,a)\cap\cdots\cap f(i,a)$, 则 g 是满足要求的正则映射.

练习 21 因为 f 连续, 它是 Borel 函数. 若有 x 使 $b \leqslant x < +\infty$, 补充定义 $f(x) = 0$. 这得 Borel 函数 $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 使 $a < x < b$ 时,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} n(f(x+1/n) - f(x)).$$

上式右端的函数都是 (a,b) 上的 Borel 函数, 因此 f' 也是 Borel 函数.

练习 22 必要性: 设 f 取可数个互异值 $a_k : k \in J$. 单点集 $\{b_k\}$ 是 Borel 集, 作 X 中相互不交可测集 $E_k = f^{-1}\{b_k\} : k \in J$ 即可.

充分性: 注意到 $f^{-1}(F) = \bigsqcup\{E_k | a_k \in F\}$ 即可.

练习 23 取 f 的实部 g 和虚部 h, 这是两个可测函数. 由于黏接保持可测性, 可分片定义 θ 如下:

(1) 在可测集 $(f = 0)$ 上, 作可测函数 $\theta = 0$.

(2) 在可测集 $(g \geqslant 0)$ 上, 作可测函数 $\theta = \arcsin(h \div |f|)$.

(3) 在可测集 $(g < 0)$ 上, 作可测函数 $\theta = \arcsin(h \div |f|) + \pi$.

练习 24 显然 ν 非负. 由 $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ 知 $\nu(\varnothing) = 0$. 当 $\{F_n\}$ 是 F 的可测划分时, $\{f^{-1}(F_n)\}$ 是 $f^{-1}(F)$ 的可测划分. 于是 $\sum \mu f^{-1}(F_n) = \mu f^{-1}(F)$. 这表明 ν 具有可列可加性.

练习 25 据 §1.4 练习 11 知 X 是 Borel 集. 当 b 是实数时, $f_1(x) < b$ 当且仅当有常数 $c < b$ 和 $r > 0$ 使 $x < y < x + r$ 时 $f(y) \leqslant c$. 此时 $f_1(y) < b$. 可见 $(f_1 < b)$ 中每点至少对应一个 $r > 0$ 使 $[x, x+r) \subseteq (f_1 < b)$. 据 §1.4 练习 11 知 $(f_1 < b)$ 是可数个长度非零区间的无交并, 它是 Borel 集. 因此 f_1 是 Borel 函数. 类似可知 f_2 是 Borel 函数.

§2.4 测度空间

练习 1 提示. 必要性: 作可测集的递减序列 $(E_n^\varepsilon)_{n=1}^\infty$ 如下:

$$E_n^\varepsilon = (\sup_{m\geqslant n} |f_m - f| > \varepsilon).$$

注意到 (E_n^ε) 的极限是 $E = \overline{\lim_{n\to\infty}} (|f_n - f| > \varepsilon)$ 且 $x \in E$ 时, 有子列 (k_n) 使 $|f_{k_n}(x) - f(x)| > \varepsilon$. 这样结论源自以下不等式:

$$E \subseteq (\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n - f| \geqslant \varepsilon).$$

充分性: 命 $E^\varepsilon = (\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n - f| > \varepsilon)$. 当 $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$ 时, 有子列 $|f_{k_n}(x) - f(x)| > \varepsilon$. 于是

$$E^\varepsilon \subseteq \overline{\lim_{n\to\infty}} (|f_n - f| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} E_n^\varepsilon.$$

这样 $\mu(E^\varepsilon) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^\varepsilon) = 0$. 从而结论源自下式:

$$(\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n - f| > 0) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+} E^{\frac{1}{k}}.$$

练习 2 首先, $f(0) = 0$ 且 $f(-x) = -f(x)$. 其次, 命 $X = \{x : |x| \leqslant 1\}$, 则 X 中有闭集 E 使 $|E|_n > 0$ 且 f 限制在 E 上是连续函数. 据 §2.2 练习 13 取 $r > 0$ 使

$$\{x : |x| < r\} \subseteq E - E.$$

因为 E 是紧集, 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $0 < \delta < r$ 使 $y, z \in E$ 且 $|y - z| < \delta$ 时, $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. 当 $|x| < \delta$ 时, 存在 $y, z \in E$ 使 $x = y - z$. 于是 $|f(x)| < \varepsilon$. 这表明 f 在原点连续, 从而 f 处处连续.

练习 3 (1) 源自线性基表达向量时线性组合的唯一性和下式:

$$\begin{aligned} rx + sy &= \sum_{e\in B} (r\alpha_e(x)e + s\alpha_e(y)) \\ &= \sum_{e\in B} \alpha_e(rx + sy)e. \end{aligned}$$

(2) 因为 α_e 不恒为零, 据 (1) 知 $\alpha_e(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Q}$. 这样 α_e 不连续 (否则, 其值域为区间, 矛盾). 据练习 2 知 α_e 不是 Lebesgue 可测函数.

(3) 否则, 有实数 b_0 使 $(\alpha_e < b_0)$ 是 Lebesgue 可测集. 当 r 是有理数时, 取 y 使 $\alpha_e(y) = r$. 于是 $\alpha_e(x) < b_0 + r$ 当且仅当 $\alpha_e(x - y) < b_0$, 得下式:

$$(\alpha_e < b_0 + r) = (\alpha_e < b_0) + y.$$

这是 Lebesgue 可测集. 取递增至 $b-b_0$ 的有理数列 (r_n), 则 $(\alpha_e < b_0 + r_n)$: $n \geqslant 1$ 递增至 $(\alpha_e < b)$. 于是 $(\alpha_e < b)$ 都是 Lebesgue 可测集, 与 (2) 矛盾.

(4) 否则, 有实数 b_0 使 $(\alpha_e \leqslant b_0)$ 是 Lebesgue 可测集. 对任何有理数 r, 取 y 使 $\alpha_e(y) = r$. 于是 $\alpha_e(x) \leqslant b_0 + r$ 当且仅当 $\alpha_e(x-y) \leqslant b_0$. 这得

$$(\alpha_e \leqslant b_0 + r) = (\alpha_e \leqslant b_0) + y.$$

这是 Lebesgue 可测集. 取递减至 $b-b_0$ 的有理数列 (r_n), 则 $(\alpha_e \leqslant b_0 + r_n)$: $n \geqslant 1$ 递减至 $(\alpha_e \leqslant b)$. 于是 $(\alpha_e \leqslant b)$ 都是 Lebesgue 可测集, 与 (2) 矛盾.

(5) 否则, 有个有理数 b_0 使 $(\alpha_e = b_0)$ 是 Lebesgue 可测集. 同 (4) 的证明可知, 当 b 是有理数时, $(\alpha_e = b)$ 是 Lebesgue 可测集. 因为 α_e 只取有理数值, 所以

$$(\alpha_e < b) = \bigcup\{(\alpha_e = c) | c \in \mathbb{Q}, c < b\}.$$

可见, $(\alpha_e < b)$ 是 Lebesgue 可测集, 与 (3) 矛盾.

(6) 若 B 有限, 则 $x \mapsto (\alpha_e(x))_{e\in B}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 至 $\mathbb{Q}^B$ 的双射, 所以 $\aleph = \aleph_0$. 矛盾. 因此 B 无限, 命 $X = \bigcup\limits_{k\geqslant 1}(B^k \times \mathbb{Q}^k)$, 则

$$((v_1, \cdots, v_k), (r_1, \cdots, r_k)) \mapsto \sum_{i=1}^{k} r_i v_i$$

是 X 到 $\mathbb{R}^n$ 的满射. 这得 $\aleph \leqslant |X|$. 注意到 $\aleph_0|B| = |B|$, 得

$$|X| \leqslant \sum_k |B^k||\mathbb{Q}^k| = \sum_k |B| = |B|.$$

从而 $|\aleph| \leqslant |B|$. 显然 $|B| \leqslant \aleph$.

(7) 命 $x_0 = 1$. 因为 $\mathbb{Q}x_0$ 可列, 所以差集 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}x_0$ 至少有一个点 x_1. 因为 $\mathbb{Q}x_0 + \mathbb{Q}x_1$ 可列, 所以差集 $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q}x_0 + \mathbb{Q}x_1)$ 至少有个点 x_2. 如此下去得到 $x_0, \cdots, x_k$. 如果有理数 $a_0, \cdots, a_k$ 使 $\sum a_i x_i = 0$. 因为 x_k 不在 $\mathbb{Q}x_0 + \cdots + \mathbb{Q}x_{k-1}$ 中, 所以 $a_k = 0$. 依次下去可得 $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$. 这样 $x_0, \cdots, x_k$ 有理线性无关.

练习 4 可设 $x_0 = 0$. 任取正整数 n. 当 $x \to 0$ 时, 可设 $|nx| < r$. 于是

$$f(kx) \leqslant \frac{f(kx-x) + f(kx+x)}{2} : k = 1, \cdots, n-1.$$

这得以下不等式组:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &\leqslant f(x) - f(0) \\ &\leqslant f(2x) - f(x) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\leqslant f(nx) - f(nx - x). \end{aligned}$$

上面右列的 n 项取平均并由 $f(nx) \leqslant b$ 得

$$f(x) - f(0) \leqslant \frac{f(nx) - f(0)}{n} \leqslant \frac{b - f(0)}{n}.$$

上式中先命 $x \to 0$ 再命 $n \to \infty$ 得 $\overline{\lim_{x \to 0}} f(x) \leqslant f(0)$. 由

$$2f(0) - f(-x) \leqslant f(x)$$

得 $f(0) \leqslant \underline{\lim}_{x \to 0} f(x)$. 因此 f 在 0 处连续.

练习 5 命 $X = [-1, 1]$, 据 Лузин 定理取个闭集 $E \subseteq X$ 使 $|E| > 1$ 且 f 限制在 E 上连续. 因为

$$\begin{aligned} |X \setminus (E \cap (-E))|_1 &= |X \setminus E \cup (-(X \setminus E))|_1 \\ &\leqslant 2|X \setminus E|_1 < 2, \end{aligned}$$

所以 $E \cap (-E)$ 非零集. 以 $E \cap (-E)$ 代替 E 后, 可设 $-E = E$. 因为 E 是紧集, $f|_E$ 有最大值 b. 据 §2.2 练习 13, 取 $r > 0$ 使

$$(-2r, 2r) \subseteq E - E = E + E.$$

于是当 $|x| < r$ 时, 可取 $y, z \in E$ 使 $2x = y + z$, 因此

$$f(x) \leqslant (f(y) + f(y))/2 \leqslant b.$$

据练习 4 知 f 在原点连续. 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$. 命 $g(x) = f(x_0 + x)$, 对 g 重复以上过程知 g 在原点连续. 于是 f 在 x_0 连续.

练习 6 命 $F = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} [n - 1, n - 10^{-|n|-2}]$ 即可.

练习 7 Лузин 定理的逆命题: 设 X 是 Lebesgue 可测集. 如果函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 满足: 当 $\delta > 0$ 时, 存在含于 X 的闭集 E 使 $\mathbf{m}(X \setminus E) < \delta$ 且 $f|_E$ 为连续函数, 则 f 是 Lebesgue 可测函数.

证明: 取含于 X 中的闭集 E_k 使 $\mathbf{m}(X \setminus E_k) < 1/k$ 且 f 限制在 E_k 上是连续函数. 命 $Y = \bigcup\{E_k | k \in \mathbb{Z}_+\}$, 则 Y 是 Borel 集且 $\mathbf{m}(X \setminus Y) = 0$. 因为 $f|_Y$ 是 Borel 函数 (从而是 Lebesgue 可测函数) 且 $f|_{X \setminus Y}$ 是 Lebesgue 可测函数, 所以 f 是 Lebesgue 可测函数.

练习 8 用 Cantor 函数，命 $g(x) = x + \varphi(x)$，则 $g : [0,1] \to [0,2]$ 严格递增且双向连续. 当 I 取遍 O 的构成区间时， $g(I)$ 取遍 $g(O)$ 的构成区间. 若记 $I = (a,b)$，则由 φ 在 I 上是常数知 $g(x) = x + \varphi(a)$. 于是

$$|g(O)|_1 = \sum |g(I)|_1 = \sum |I + \varphi(a)|_1 = |O|_1 = 1.$$

等式 $g(K) \sqcup g(O) = [0,2]$ 表明 $|g(K)|_1 = 1$. 取 $g(K)$ 的一个非 Lebesgue 可测子集 D. 命 $E = g^{-1}(D)$，则 E 是 Lebesgue 零集 K 的子集，从而它是 Lebesgue 可测集. 但等式 $D = g(E)$ 表明 E 非 Borel 集.

练习 9 任取 Z 中 Borel 集 F，原像 $h^{-1}(F)$ 是 Y 中 Borel 集. 而

$$f^{-1}(h^{-1}(F)) = (hf)^{-1}(F),$$

这是 X 中 Borel 集. 因此 hf 是 Borel 函数.

将 Borel 函数换成 Lebesgue 可测函数后结论不对. 为此用练习 8 中的符号. 命 $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是 E 的特征函数，则 h 是 Lebesgue 可测函数. 命 $f : [0,2] \to [0,1]$ 为 g 的反函数，则 f 是 Lebesgue 可测函数. 现在

$$(hf)^{-1}(\{1\}) = f^{-1}h^{-1}(\{1\}) = g(E) = D.$$

这非 Lebesgue 可测集. 因而 hf 不是 Lebesgue 可测函数.

这个表明即使 f 连续而 h 是 Lebesgue 可测的， hf 不必 Lebesgue 可测.

练习 10 取 X 的 Lebesgue 可测划分 $\{X_1, \cdots, X_k\}$ 使 f 在 X_i 上为常数 c_i. 无妨设 c_1 和 c_k 分别是 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 中的最小数和最大数.

取 X_i 中紧集 E_i 使 $\mathbf{m}(X_i \setminus E_i) < \delta/k$. 命 $g_i(x) = \prod\limits_{j \neq i} d(x, E_j)$，这得连续函数 $g_i : X \to \mathbb{R}$. 当 $x \in X$ 时，总有 i 使 $x \notin \bigcup\limits_{j \neq i} E_j$，这样 $g_i(x) > 0$. 因此若命 $g(x) = \sum\limits_{i \leqslant k} g_i(x)$，则 g 是 X 上无零点的连续函数. 命

$$h(x) = \sum_{i \leqslant k} c_i g_i(x) \div g(x),$$

这得连续函数 $h : X \to \mathbb{R}$ 使 $x \in E_i$ 时 $h(x) = c_i$. 明显 $c_1 \leqslant h \leqslant c_k$.

练习 11 (1) 取一列简单函数 (g_n) 点态逼近 f, 则 (g_n) 依测度逼近 f. 据练习 10, 取连续函数 h_n 使 $\mathbf{m}(h_n \neq g_n) < 1/n$, 则 $(h_n - g_n)$ 依测度逼近 0. 据 Weierstrass 定理, 取有理系数多项式 f_n 使 $|f_n - h_n| < 1/n$, 则 $(f_n - h_n)$ 依测度逼近 0. 注意到 $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ 时, $|f_n(x) - h_n(x)| \geqslant \varepsilon/3$ 或 $|h_n(x) - g_n(x)| \geqslant \varepsilon/3$ 或 $|g_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon/3$, 于是 (f_n) 依测度逼近 f. 据 F. Riesz 定理取子列后可设 (f_n) 几乎处处逼近 f.

(2) 命 f_n 同 (1). 当 $0 \leqslant x \leqslant 1/n$ 时, 命

$$h_n(x) = f(2\pi) + n(f_n(1/n) - f_n(2\pi))x;$$

当 $1/n \leqslant x \leqslant 2\pi$ 时, 命 $h_n(x) = f_n(x)$, 这得连续函数 $h_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ 使 $\mathbf{m}(h_n \neq f_n) \leqslant 1/n$ 且 $h_n(0) = h_n(2\pi)$. 取 Weierstrass 第二逼近定理得有理系数三角多项式 g_n 使 $|g_n - h_n| < 1/n$, 则 (g_n) 依测度逼近 f. 取子列后可设 (g_n) 几乎处处逼近 f.

练习 12 将全体有理系数多项式排成一列 $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ 使 $g_0 = 0$ 且每个有理系数多项式在 (g_n) 中出现可列次. 命 $h_n = g_n - g_{n-1}$, 这得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$.

命 (f_n) 同练习 11(1), 归纳地命 $k_1 = \min\{k > 0 | g_k = f_1\}$ 及

$$k_n = \min\{k > k_{n-1} | g_k = f_n\},$$

则 $(g_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ 几乎处处逼近 f. 最后, 注意到下式即可

$$g_{k_n} = \sum_{i=1}^{n}(g_{k_i} - g_{k_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n}(h_{k_{i-1}+1} + \cdots + h_{k_i}).$$

练习 13 (1) 设函数 g 与 Lebesgue 可测函数 f 几乎处处相等. 命 $E = (f \neq g)$, 这是 Lebesgue 零集. 因为 $g|_{E_0}$ 是 Lebesgue 可测函数 (见例 4) 而且 $g|_{X \setminus E} = f|_{X \setminus E}$ 是 Lebesgue 可测函数, 所以 g 是 Lebesgue 可测函数.

(2) 设 Lebesgue 可测函数列 (f_n) 几乎处处逼近函数 f. 命

$$E = (\varlimsup_{n \to \infty} |f_n - f| > 0).$$

这是 Lebesgue 零集. 因为 $f|_{X \setminus E} = \lim\limits_{n \to \infty} f_n|_{X \setminus E}$ 是 Lebesgue 可测函数而且 $f|_E$ 也是 Lebesgue 可测函数, 所以 f 是 Lebesgue 可测函数.

(3) 因为 (f_n) 有子列几乎处处逼近 f, 据 (2) 知 f 是 Lebesgue 可测函数.

(4) 设 $f : X \to \mathbb{C}$ 是几乎处处连续的函数, 以 X_1 记 f 的连续点全体, 则 f 限制在 X_1 上连续 (从而是 Lebesgue 可测函数). 又 f 限制在 Lebesgue 零集 $X \setminus X_1$ 上是 Lebesgue 可测函数, 所以 f 是 Lebesgue 可测函数.

(5) Dirichlet 函数与零函数 $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 几乎处处相等但处处不连续.

练习 14 因为 $\mathbb{R}^n$ 有 $2^{\aleph}$ 个 Lebesgue 可测集且每个 Lebesgue 可测集的特征函数都是 Lebesgue 可测函数, 所以 $|L| \geqslant 2^{\aleph}$. 又从 $L \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$ 得 $|L| \leqslant \aleph^{\aleph^n} = 2^{\aleph}$. 可见, $|L| = 2^{\aleph}$.

练习 15 可设 f_n 都非负, 从而 $(f_n > k))_{k=1}^{\infty}$ 递减至空集. 取 k 使 $\mu(|f_n| > k) < 2^{-n}$, 此种 k 的最小者记为 k_n. 命 $c_n = (nk_n)^{-1}$, 则

$$\sum_{n\geqslant 1} \mu(|c_n f_n| > 1/n) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(|f_n| > k_n) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}.$$

记 $E_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} (|c_n f_n| > 1/n)$, 据 Borel-Cantelli 引理知 $\mu(E_0) = 0$. 当

$$x \in X \setminus E_0 = \underline{\lim_{n\to\infty}} (|c_n f_n| < 1/n)$$

时, 有个 m 使 $n \geqslant m$ 时, $|c_n f_n(x)| < 1/n$. 于是 $\lim_{n\to\infty} c_n f_n(x) = 0$.

练习 16 注意这个事实: $\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)| > 0$ 当且仅当有个正整数 k, 对任何正整数 l, 有整数 $n \geqslant l$ 使 $|f_n(x)| \geqslant 2^{-k}$. 可见,

$$(\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n| > 0) = \bigcup_{k\geqslant 1} \bigcap_{l\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant l} (|f_n| \geqslant 2^{-k}).$$

记 $E_k^l = \bigcup_{n\geqslant l} (|f_n| \geqslant 2^{-k})$. 上式左端是零集, 从而 $E_k = \bigcap_{l\geqslant 1} E_k^l$ 都是零集. 因为测度有限集列 $(E_k^l)_{l=1}^{\infty}$ 递减至 E_k, 所以有正整数 l_k 使 $\mu(E_k^{l_k}) < 2^{-k}$.

以 $l_1 + \cdots + l_k$ 代替 l_k 后, 可设 $(l_k)_{k=1}^{\infty}$ 严格递增. 因为 $\sum \mu(E_k^{l_k}) < +\infty$, 据 Borel-Cantelli 引理可作零集 $E = \overline{\lim_{k\to\infty}} E_k^{l_k}$. 当 $n < k_1$ 时, 命 $c_n = 1$. 当 $l_k \leqslant n < l_{k+1}$ 时, 命 $c_n = \dfrac{1}{l_{k+1} - l_k}$. 从而

$$\sum_{n\geqslant l_1} c_n = \sum_{k\geqslant 1} \sum_{l_k \leqslant n < l_{k+1}} c_n = +\infty.$$

当 $x \in E^c = \underline{\lim_{k\to\infty}} (E_k^{l_k})^c$ 时, 有个 k 使 $i \geqslant k$ 时, $x \in (E_i^{l_i})^c$. 此即 $n \geqslant l_i$ 时, $|f_n(x)| < 2^{-i}$. 这样 $\sum_{l_i \leqslant n < l_{i+1}} |c_n f_n(x)| < \varepsilon_i$. 因此

$$\sum_{n\geqslant 1} |c_n f_n(x)| < \sum_{n<l_k} |c_n f_n(x) + \sum_{i\geqslant k} \varepsilon_i < +\infty.$$

练习 17 命 $g_n = \varphi f_n$ 及 $g = \varphi f$. 任取子列 $(g_n)_I$(其中 I 是 $\mathbb{Z}_+$ 的一个可列子集), 则 $(f_n)_I$ 有子列 $(f_n)_J$(其中 J 是 I 的可列子集) 几乎处处逼近 f. 于是 $(g_n)_I$ 的子列 $(g_n)_J$ 几乎处处逼近 g, 从而 (g_n) 依测度逼近 g.

练习 18 取个 $k_n \geqslant n$ 使 $\mu(|f_{nk_n} - f_n| \geqslant 2^{-n}) < 2^{-n}$. 当 $n > -\log_2 \varepsilon$ 时,

$$(|f_{nk_n} - f| \geqslant 2\varepsilon) \subseteq (|f_{nk_n} - f_n| \geqslant 2^{-n}) \cup (|f_n - f| \geqslant \varepsilon)$$
$$\Rightarrow \mu(|f_{nk_n} - f| \geqslant 2\varepsilon) < 2^{-n} + \mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon).$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(|f_{nk_n} - f| \geqslant 2\varepsilon) = 0$.

练习 19 作零集 $E_0 = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} (f_n > f_{n+1})$, 当 $x \in E_0$ 时, 命 $g(x) = 0$ 而当 $x \in X \setminus E_0$ 时, 命 $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. 于是 (f_n) 几乎处处逼近 g. 据 F. Riesz 定理知 (f_n) 有子列几乎处处逼近 f. 这样 f 与 g 几乎处处相等.

练习 20 当 f 是 μ^*- 简单函数 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\chi_{F_i}$(其中 $F_1, \cdots, F_n$ 是 E 中相互不交的 μ^*- 可测子集使 $E = \bigcup\limits_i F_i$) 时, 有 F_i 的可测子集 G_i 使 $\mu^*(F_i \setminus G_i) = 0$, 命 $G = \bigcup\limits_i G_i$, 则 $f|_G$ 是可测函数.

当 f 是 μ^*- 可测函数时, 有列 μ^*- 简单函数 (f_n) 逐点逼近 f. 取 E 的可测子集 E_n 使 $\mu^*(E \setminus G_n) = 0$ 且 f_n 限制在 G_n 上是可测函数. 作可测集 $G = \bigcap\limits_n G_n$, 则 $\mu^*(E \setminus G) = 0$. 注意到 $(f_n|_G)$ 逐点逼近 $f|_G$ 即可.

练习 21 当 $f_n(x) > c$ 时, $f_{n+1}(x) > c$. 这样 $(f_n > c) \subseteq (f_{n+1} > c)$. 于是 $((f_n > c))_{n=1}^{\infty}$ 是递增的. 因为 $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ 递增至 $f(x) > c$, 所以 $f(x) > c$ 当且仅当存在 n 使 $f_n(x) > c$. 这样 $(f > c) = \bigcup\limits_n (f_n > c)$.

练习 22 当 $f(x) \leqslant 1 - 1/n$ 时, $f(x) \leqslant 1 - 1/(n+1)$. 因此 $(f \leqslant 1 - 1/n) \subseteq (f \leqslant 1 - 1/(n+1))$. 又 $f(x) < 1$ 当且仅当存在正整数 n 使 $f(x) \leqslant 1 - 1/n$. 于是 $((f \leqslant 1 - 1/n))_{n=1}^{\infty}$ 递增至 $(f < 1)$.

练习 23 归纳地命 $E_1 = (f \geqslant c_1)$ 及 $E_n = (f \geqslant c_n + \sum\limits_{i<n} c_i\chi_{E_i})$. 当 $f(x) = 0$ 时, x 不在每个 E_n 中, 结论对. 当 $f(x) = +\infty$ 时, x 在每个 E_n 中, 结论对. 下面设 $0 < f(x) < +\infty$, 命 $J = \{n | x \in E_n\}$. 当 $n \in J$ 时,

$$f(x) \geqslant c_n + \sum_{i<n} c_i\chi_{E_i}(x) = \sum_{i\leqslant n : i\in J} c_i.$$

命 n 取遍 J 中数得 $f(x) \geqslant \sum\limits_{i\in J} c_i$. 对每个 n, 总有 $\sum\limits_{i>n} c_i = +\infty$. 于是有 $l > n$ 使 $l \notin J$, 这种 l 的最小者记为 l_n. 于是

$$f(x) < c_{l_n} + \sum_{i<l_n} c_i\chi_{E_i}(x) \leqslant c_{l_n} + \sum_{i\in J} c_i.$$

命 $n \to \infty$ 得 $f(x) \leqslant \sum\limits_{i \in J} c_i$. 于是结论成立.

练习 24 (1)⇒(2): 因为 $(f \leqslant a) \subseteq (f < b)$, 所以

$$\begin{aligned}&\lambda(F(f \leqslant a)) + \lambda(F(f \geqslant b))\\ \leqslant&\lambda(F(f < b)) + \lambda(F(f \geqslant b)) = \lambda(F).\end{aligned}$$

(2)⇒(1): 设 (c_n) 是严格递增数列, 命 $B_n = F(c_{2n-1} < f \leqslant c_{2n})$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(B_i) \leqslant \lambda(\bigsqcup_{i \leqslant n} B_i). \tag{3}$$

当 $n = 1$ 时 (3) 对. 设 $n = k$ 时 (3) 对. 当 $n = k + 1$ 时, 命 $G = \bigcup\limits_{i=1}^{k+1} B_i$, 则 $\bigsqcup\limits_{i \leqslant k} B_i = G(f \leqslant c_{2k})$ 且 $B_{k+1} = G(f \geqslant c_{2k+1})$. 于是

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda(B_i) \leqslant \lambda(\bigsqcup_{i \leqslant k} B_i) + \lambda(B_{k+1}) \leqslant \lambda(G).$$

当 b 是实数时, 命 $b_n = b - n^{-1}$ 及 $A_n = F(b_{n-1} < f \leqslant b_n)$. 据 (3) 知

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda(A_{2n-1} \leqslant \lambda(F); \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda(A_{2n}) \leqslant \lambda(F).$$

注意到 $b_n < b$ 及 $F(f < b) \subseteq \bigcup\{F(f \leqslant b_n), A_i | i > n\}$, 可得

$$\lambda(F(f < b)) + \lambda(F(f \geqslant b)) \leqslant \lambda(F) + \sum_{i > n} \lambda(A_i).$$

如果 $\lambda(F)$ 有限, 则 $\sum\limits_{i \geqslant 1} \lambda(A_i)$ 收敛. 在上式中命 $n \to \infty$ 得

$$\lambda(F(f < b)) + \lambda(F(f \geqslant b)) \leqslant \lambda(F).$$

如果 $\lambda(F)$ 无限, 则上式总成立. 因此 $(f \geqslant b)$ 是 λ- 可测集.

练习 25 (1) 当 $0 < c < 1$ 时, 总有 $\mu(E) > c$. 命 $c \to 1$ 即可.

(2) 注意到 $X \setminus F$ 为可数个零集 $X \setminus E_n : n \geqslant 1$ 之并即可.

(3) 有 k_n 使 $\mu(E_k) > 1 - (1 - c)/2^n$, 此种 k 之最小者记为 k_n. 这得第一不等式. 第二不等式源自下式

$$\mu(X \setminus \bigcap_{n \geqslant 1} E_{k_n}) = \mu(\bigcup_{n \geqslant 1} (X \setminus E_{k_n})) < 1 - c.$$

练习 26 否则, 有可测集列 (E_k) 使 $m(E_k) \geqslant 1-1/k$ 且 $F \cap E_k$ 是可测集. 命 $E = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} E_k$, 则 E 是可测集使 $m(E)=1$ 且 $F\cap E$ 是可测集. 最后注意到 $F \setminus E$ 是零集知 F 是可测集, 矛盾.

练习 27 必要性: 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |f_n| = 0$ 及定理 3 即可.

充分性: 据 F. Riesz 定理知 (g_n) 有子列几乎处处收敛. 因 (g_n) 是递减的, 所以 (g_n) 也几乎处处收敛 0. 最后注意到 $|f_n| \leqslant g_n$ 即可.

练习 28 只证充分性: 对于 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$, 命 $\eta=\varepsilon\wedge\delta$. 取 m 使 $n>m$ 时, $\mu^*(|f_n-f|\geqslant\eta)<\eta$. 于是 $\mu^*(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)<\delta$ 源自下式:

$$(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\subseteq(|f_n-f|\geqslant\eta).$$

练习 29 当 $0<\varepsilon<1$ 时, 存在 $m\geqslant1$ 使 $n\geqslant m$ 时, $|(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)|_0<\varepsilon$. 因为非空子集的计数测度不小于 1, 所以 $(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=\varnothing$. 这即

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant1,\forall n\geqslant m,\forall x\in X: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

这即 (f_n) 一致逼近 f. 反之, 上式表明当 $n\geqslant m$ 时, $(|f_n-f|<\varepsilon)=X$. 这即 $(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=\varnothing$. 从而 $|(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)|_0=0$.

练习 30 (1) 自反性: 因为 $(f\neq f)=\varnothing$, 所以 $f\doteq f$. 对称性: $f\doteq g$ 当且仅当 $\mu^*(f\neq g)=0$ 当且仅当 $\mu^*(g\neq f)=0$ 当且仅当 $g\doteq f$.

传递性: $f\doteq g$ 且 $g\doteq h$ 时, $\mu^*(f\neq g)=0$ 且 $\mu^*(g\neq h)=0$. 因为

$$f(x)\neq h(x)\Rightarrow f(x)\neq g(x)\text{或}g(x)\neq h(x),$$

所以 $(f\neq h)\subseteq(f\neq g)\cup(g\cup h)$. 这样 $\mu^*(f\neq h)=0$. 于是 $f\doteq h$.

(2) 自反性: 因为 $(f>f)=\varnothing$, 所以 $f\dot{\leqslant}f$.

传递性: $f\dot{\leqslant}g$ 且 $g\dot{\leqslant}h$ 时, $\mu^*(f>g)=0$ 且 $\mu^*(g>h)=0$. 因为

$$f(x)>h(x)\Rightarrow f(x)>g(x)\text{或}g(x)>h(x),$$

所以 $(f>h)\subseteq(f>g)\cup(g>h)$. 这样 $\mu^*(f>h)=0$. 于是 $f\dot{\leqslant}h$.

考虑 $\mathbb{R}$ 上的 Dirichlet 函数 D 与 Riemann 函数 R, 则 $R\leqslant D$. 又

$$(D>R)=\{p/q|p\in\mathbb{Z}^\times,q\in\mathbb{Z}_+,q\geqslant2\}$$

表明 $D\dot{\leqslant}R$. 然而 $D\neq R$.

(3) 因为 $(f\neq g)=(f>g)\cup(g>f)$, 所以 $\mu^*(f\neq g)=0$ 当且仅当 $\mu^*(f>g)=0$ 且 $\mu^*(g>f)=0$.

§3.1 积分及其性质

练习 1 当 E 有可测划分 $\{E_n\}$ 时, $\mu_i(E)=\sum\limits_k \mu_i(E_k)$. 这两边关于 i 取上确界时用 §1.4 定理 6 知 $\mu(E)=\sum\limits_k \mu(E_k)$. 这样 μ 是测度. 据 §2.3 定理 6 知 f 形如 $\sum\limits_{n\geqslant 1} c_n\chi_{E_n}$, 其中 $0\leqslant c_n\leqslant +\infty$ 而 E_n 是 X 的可测集. 于是

$$\int_X f d\mu_i=\sum_n c_n\mu_i(E_n).$$

再用 §1.4 定理 6 知上式右端的上确界是 $\sum\limits_n c_n\mu(E_n)$. 这即 $\int\limits_X f d\mu$.

练习 2 三个条件依次记为 (1)~(3). 命 $E_n=(n\leqslant |f|<n+1)$, 这得 X 的可测划分 $\{E_n|n=0,1,\cdots\}$. 当 $x\in E_n$ 时, $n\leqslant |f(x)|<n+1$. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n)\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}|f|d\mu=\int_X |f|d\mu.$$

这表明 (1)⇒(2). 因为 $(|f|\geqslant n)=\bigsqcup\{E_k|k\geqslant n\}$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(|f|\geqslant n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mu(E_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\mu(E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\mu(E_k).$$

这表明 (2)⇔(3). (2)⇒(1) 源自积分的可列可加性与下式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f|d\mu\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}(n+1)d\mu$$

$$=\mu(X)+\sum_{n=1}^{\infty}n\mu(E_n)<+\infty.$$

练习 3 无妨设 g 非负, 则 $\int g\leqslant \sup g(E)\mu(E)<+\infty$. 现取递增至 X_0 的测度有限集列 (Y_n). 命 $E_n=Y_n\cap(|f|\leqslant n)$. 对任何 $x\in X_0$, 设 $x\in Y_k$ 且 $|f(x)|\leqslant l$. 命 $n=k+l$, 则 $x\in E_n$.

练习 4 取递增至 X 的测度有限集列 (X_n). 命 $Y_n=X_n(|g|+|h|\leqslant n)$, 则测度有限集列 (Y_n) 递增至 X 且 g 和 h 在 Y_n 上都有界. 命 $E_n=Y_n(g>h)$, 则

$$\int_{E_n}g\leqslant\int_{E_n}h\leqslant\int_{E_n}g.$$

于是 g 与 h 在 E_n 上几乎处处相等, 从而 $\mu(E_n)=0$. 于是 $(g>h)=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}E_n$ 是零集.

练习 5 (1) 因为 f 只在原点连续，从而 f 在 [0,1] 上不是 Riemann 可积函数. 但在 [0,1] 上，f 是有界 Borel 函数，从而 f 是 Lebesgue 可积函数. 注意到 f 与 sin 几乎处处相等，因此

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sin x dx = \cos 1 - 1.$$

(2) 因为 f 有界且在开集 O 上连续，所以 f 有界且几乎处处连续. 因此 f 是 Riemann 可积函数. 此时其 Riemann 积分与 Lebesgue 积分相等，所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_K f(x)dx + \int_O f(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{3^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(3) 同 (2) 可知 f 是 Riemann 可积函数. 因为 $f(x) \doteq x^4$, 所以

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}.$$

(4) 同 (2) 的理由知 f 是 Riemann 可积函数. 因为 f 在 O 的每个构成区间 (a,b) 上的积分是以 $b-a$ 为直径的半圆的面积 $\pi\dfrac{(b-a)^2}{8}$, 所以

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}\pi}{3^{2n} \times 8} = \frac{\pi}{56}.$$

练习 6 将 f 在 $(3^{-n}, 1-3^{-n})$ 上的限制记为 f_n，它的不连续点集 E_n 是 Lebesgue 零集. 集列 (E_n) 与 $\{a,b\}$ 合并为一个零集 E. 当 $x_0 \in (0,1) \setminus E$ 时，有个 n 使 $3^{-n} < x_0 < 1-3^{-n}$ 且 x_0 不在 E_n 中. 这样

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0) = f(x_0).$$

从而 f 几乎处处连续.

练习 7 取 n 使 $|f_n - f| < 1$, 则 $|f| \leqslant |f_n| + 1$. 于是 f 有界. 所有 f_n 的公共连续点全体记为 E, 则 $[0,1] \setminus E$ 是 Lebesgue 零集. 因为一致收敛保持连续性，所以 E 的点都是 f 的连续点. 这样据 Lebesgue 定理知 f 是 Riemann 可积的. 对于 $\varepsilon > 0$, 取 $l \geqslant 1$ 使 $n > l$ 时，$|f_n - f| < \varepsilon$. 此时,

$$\left|\int_0^1 f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

练习 8 取常数 b 使 $f \leqslant b$, 注意到 $\mu(|f|>1)<c$, 有

$$\int_{(1<f\leqslant b)} f d\mu \leqslant bc < +\infty.$$

说明 f 在 $(0<f\leqslant 1)$ 上可积即可. 命 $E_n = (\frac{1}{n+1} < f \leqslant \frac{1}{n})$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{(0<f\leqslant 1)} f d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(E_n)}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mu(f>\frac{1}{n+1}) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mu(f>\frac{1}{n}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\mu(f>\frac{1}{n}) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mu(f>\frac{1}{n}) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}\mu(f>\frac{1}{n}) - \mu(f>1) \\
&< \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n^{a+1}} - \mu(f>1) < +\infty.
\end{aligned}$$

练习 9 取 $r>0$ 使 $|x|<r$ 时, $|f(x)|<(|f'(0)|+1)|x|$; 这得 $|g(x)|<|f'(0)|+1$. 当 $|x|\geqslant r$ 时, $|g(x)|\leqslant |f(x)|/r$. 这样 g 在 $(-r,r)$ 与 $(-\infty,-r]\cup[r,+\infty)$ 上都是 Lebesgue 可积函数. 从而 g 在 $\mathbb{R}$ 上是 Lebesgue 可积函数.

练习 10 否则, 有可测集列 (E_n) 使 $\mu(E_n)\geqslant c$ 且 $\int_{E_n} f d\mu < 2^{-n}$. 这得 $\sum_n \int_{E_n} f d\mu < +\infty$. 命 $E = \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n$, 则 $c \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\mu(E_n)\leqslant \mu(E)$. 因为

$$\int_E f d\mu \leqslant \int_{\cup\{E_i|i>n\}} f d\mu \leqslant \sum_{i>n}\int_{E_i} f d\mu,$$

命 $n\to\infty$ 得 $\int_E f d\mu = 0$(此式可直接用测度的 Borel-Cantelli 引理而得: 命 $\nu(F)=\int_F d\mu$, 则 $\nu(\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n)=0$). 从而 f 在 E 上几乎处处为 0. 这与 $f>0$ 且 $\mu(E)>0$ 矛盾.

练习 11 区间缩小时, 上确界不增而下确界不减. 于是

$$g_1\leqslant\cdots\leqslant g_n\leqslant\cdots\leqslant f\leqslant\cdots\leqslant h_n\leqslant\cdots\leqslant h_1.$$

以 g 和 h 分别记 (g_n) 与 (h_n) 的点态极限, 则 $g \leqslant f \leqslant h$. 显然函数 g_n 和 h_n 各自的 Lebesgue 积分 $\int$ 与 Riemann 积分 $(R)\int$ 都存在且相等:

$$\int_0^1 g_n(x)dx = (R)\int_0^1 g_n(x)dx = \sum_{i=1}^{n!} \frac{a_{ni}}{n!},$$
$$\int_0^1 h_n(x)dx = (R)\int_0^1 h_n(x)dx = \sum_{i=1}^{n!} \frac{b_{ni}}{n!}.$$

(1)⇒(2): 据 Darboux 定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$
$$\Rightarrow (L)\int_0^1 (h-g) \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^1 (h_n(x)-g_n(x))dx = 0.$$

可见 g 与 h 几乎处处相等.

(2)⇒(3): 作 Lebesgue 零集 $E = \{i/n! | 0 \leqslant i \leqslant n!, n \in \mathbb{N}\} \cup (g \neq h)$. 说明 $[0,1] \setminus E$ 的点 x 是 f 的连续点即可. 为此设 $\varepsilon > 0$. 取 n 使

$$h_n(x) - g_n(x) < \varepsilon.$$

取 k 使 x_0 在开区间 $(k-1)/n!, k/n!)$ 中. 对此区间中的点 z, 有

$$|f(z) - f(x)| \leqslant b_{nk} - a_{nk} = h_n(x) - g_n(x) < \varepsilon.$$

(3)⇒(1): 函数 f 在 (0,1) 内的任何连续点 x 及 $\varepsilon > 0$ 对应个 $\delta > 0$ 使 [0,1] 中的点 z 满足 $x - \delta < z < x + \delta$ 时就成立 $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$. 取 N 使 $n \geqslant N$ 时, 有一个 k 满足:

$$x \in [(k-1)/n!, k/n!] \subseteq (x-\delta, x+\delta).$$

因此有 $b_{nk} - a_{nk} \leqslant \varepsilon$. 这表明 $h_n(x) - g_n(x) \leqslant \varepsilon$, 即 $h(x) = g(x)$. 这表明 $(h_n - g_n)$ 几乎处处收敛于零, 从而依测度收敛于零.

记 $\phi_n = h_n - g_n$, $\omega = \sup f(E) - \inf f(E)$ 及 $\delta = \varepsilon/2$, 则有正整数 n 使 $\omega \mathbf{m}(E(\phi_n \geqslant \delta)) < \varepsilon/2$. 由于

$$\sum_{i=1}^{n!} \frac{b_{ni}}{n!} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ni}}{n!} = \int_0^1 h_n - \int_0^1 g_n$$
$$= \int_{E(\phi_n \geqslant \delta)} \phi_n + \int_{E(\phi_n < \delta)} \phi_n < \varepsilon,$$

据 Darboux 定理可知, f 是 Riemann 可积的.

练习 12 据绝对连续性，有严格递减至 0 的数列 (b_n) 使 $\int_0^{b_n} f(x)dx < \frac{n}{2^n}$. 命 $g = \sum_{n\geqslant 1} n\chi_{(b_{n-1},b_n]}$, 则 $\lim_{x\to 0+} g(x) = +\infty$ 且

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \sum_{n\geqslant 1} n \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x)dx < \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} = 1.$$

练习 13 无妨设 f 只取有限值. 当 $x \in E_n$ 时, $n\delta - \delta \leqslant f(x) < n\delta$. 于是

$$\sum_{n=1}^\infty (n\delta - \delta)\mu(E_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu \leqslant \sum_{n=1}^\infty n\delta\mu(E_n).$$

因为 $\{E_n\}$ 是 X 的可测划分，上式化成要证的下式:

$$\sum_{n\geqslant 1} n\delta\mu(E_n) - \delta\mu(X) \leqslant \int_X f d\mu \leqslant \sum_{n\geqslant 1} n\delta\mu(E_n).$$

练习 14 整数 k 满足 $0 \leqslant k \leqslant p-1$ 时，使 $b_n(x) = k$ 的 x 全体是 Borel 集

$$\bigsqcup\{[0.a_1\cdots a_{n-1}k, 0.a_1\cdots a_{n-1}k + (0.1)^n) : a_i = 0, \cdots, p-1\},$$

其 Lebesgue 测度是 $p^{n-1}/p^n = 1/p$. 因此 b_n 是右连续的 Borel 简单函数且

$$\int_0^1 b_n(x)dx = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{k}{p} = \frac{p-1}{2}.$$

练习 15 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 l 使 $n > l$ 时, $|f_n - f| < \varepsilon$. 于是

$$\int |f_n - f| \leqslant \varepsilon\mu(X).$$

练习 16 提示. 记 $c_n^i = i/n$ 及 $E_n^i = (c_n^{i-1} \leqslant f < c_n^i)$, 命 $a_n = \sum_{i\geqslant 1} c_n^{i-1}\mu(E_n^i)$ 且 $b_n = \sum_{i\geqslant 1} c_n^i\mu(E_n^i)$. 先说明 $a_n \leqslant \int_X f d\mu \leqslant b_n$, 再说明 $b_n \leqslant a_n + \mu(X)/n$ 即可.

练习 17 将欲证等式中的两个数依次为 a 和 b. 由 $\sum_{A\in\mathcal{D}} \inf f(A)\chi_A \leqslant f$ 积分得 $a \leqslant b$. 设 $\varepsilon > 0$. 作可测集 $G = (f = +\infty)$. 取 $\delta_n > 0$ 使 $\delta\mu(X) < \varepsilon$. 作 X 的可测子集 $A_i = (i\delta - \delta \leqslant f < i\delta)$ 和 $H_n = \bigsqcup\{A_i | i > n\}$. 作 X 的可测划分 $\mathcal{D} = \{A_i, G | i \in \mathbb{N}\}$ 和 $\mathcal{D}_n = \{A_i, H_n, G | i \leqslant n\}$. 因为

$$\int_{A_i} f d\mu \leqslant \sup f(A_i)\mu(A_i) \leqslant \inf f(A_i)\mu(A_i) + \delta\mu(A_i),$$

上式关于 i 求和得 $\int f \leqslant L(f, \mathcal{D}) + \delta\mu(X)$. 注意到

$$L(f, \mathcal{D}) = \sup\{L(f, \mathcal{D}_n) | n \geqslant 1\},$$

得 $b \leqslant a + \varepsilon$. 命 $\varepsilon \to 0$ 得 $b = a$.

练习 18 提示: 考虑用自积分的单调性.

练习 19 只提示充分性: 命 $E=f^{-1}\{1\}$.

练习 20 作非负可测函数 $g=|f-f^2|^2$, 则 $g=|f^2|-f\overline{f}^2-f^2\overline{f}+|f^4|$. 于是 $\int\limits_X gd\mu=0$. 从而 $g\doteq 0$. 这得 $f\doteq f^2$. 命 $E=(f=1)$, 则 $f\doteq\chi_E$.

§3.2 积分极限定理

练习 1 当 $x\geqslant 1$ 时, 命 $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{e^{n^2x^2}(1+x^2)}$, 则

$$f_n(x)\leqslant\frac{n^2x}{n^2x^2(1+x^2)}\leqslant\frac{1}{1+x^2}.$$

这样 (f_n) 有控制可积函数. 又 (f_n) 点态收敛于 0, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_1^\infty\frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx=0.$$

练习 2 命 $b=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\int\limits_X|f_n-f|d\mu$, 取子列后可设 $b=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X|f_n-f|d\mu$. 再取子列后可设 (f_n) 几乎处处逼近 f. 对于 $\delta>0$, 据 Егоров 定理取 X 的可测集 E 使 $\mu(E^c)<\delta$ 且 (f_n) 在 E 上一致逼近 f. 现在,

$$b\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_E|f_n-f|d\mu+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int\limits_{E^c}|f_n-f|d\mu,$$

可见 $b\leqslant 2c\delta$. 命 $\delta\to 0$ 得 $b=0$.

练习 4 命 $g_n=f-f_n$, 则 $g_n^+\leqslant|g_n|$ 表明

$$(g_n^+\geqslant\varepsilon)\subseteq(|g_n|\geqslant\varepsilon).$$

故 $(g_n^+)_{n=1}^\infty$ 依测度逼近 0 且 $g_n^+\leqslant f$. 据控制收敛定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X g_n^+d\mu=0$. 此式结合 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X g_nd\mu=0$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X g_n^-d\mu=0$. 于是

$$\lim\int\limits_X|g_n|d\mu=\lim(\int\limits_X g_n^+d\mu+\int\limits_X g_n^-d\mu)=0.$$

练习 5 因为 $|f|$ 是 Lebesgue 可积函数，其积分记为 b. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(n^2x)|dx=\sum_n\frac{b}{n^2}<+\infty.$$

据逐项积分定理，级数 $\sum\limits_n f(n^2x)$ 几乎处处收敛于一个可积函数 $g(x)$ 且

$$\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=\sum_n\int_{\mathbb{R}}f(n^2x)dx=\sum_n\frac{10}{n^2}=\frac{5\pi^2}{3}.$$

练习 6 命 $E=f^{-1}(\mathbb{Z})$. 当 $x\in F=[0,1]\setminus E$ 时，$|\cos\pi f(x)|<1$. 由有界收敛定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_F|\cos(\pi f(x))|^n dx=0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|\cos(\pi f(x))|^n dx=\int_E 1dx=\mathbf{m}(E).$$

练习 7 (1) 当 $0\leqslant x<1$ 时有以下非正项级数

$$\frac{\ln(1-(1-x))}{1-x}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{-(1-x)^{n-1}}{n}$$
$$\Rightarrow\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}.$$

(2) 命 $f_n(x)=\chi_{(0,n]}(x)(1-\frac{x}{n})^n$. 先说明当 $0<x<n$ 时，

$$(1-\frac{x}{n})^n\leqslant(1-\frac{x}{n+1})^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow(1-\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}\leqslant(1-\frac{x}{n+1})^{\frac{n+1}{x}}.$$

这相当于 g 是 $(0,1)$ 上递减函数，其中 $g(t)=(1-t)^{\frac{1}{t}}$. 但

$$\ln g(t)=\frac{\ln(1-t)}{t}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}$$

表明 g 确是递减的. 因此 (f_n) 点态递增至 $\exp(-x)$. 据单调收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1-\frac{x}{n})^n\exp\frac{x}{2}dx=\int_0^{\infty}\exp(-\frac{x}{2})dx=2.$$

练习 8 命 $g=\sum\limits_{n\geqslant 1}|f_n|$, 则 $\mu(g=+\infty)=0$, 这是因为

$$\int\limits_X g d\mu=\sum_{n\geqslant 1}\int\limits_X |f_n| d\mu<+\infty.$$

当 $g(x)<+\infty$ 时, $\lim|f_n(x)|=0$. 从而 (f_n) 几乎处处收敛于 0.

练习 9 去个零集后可设 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\chi_{E_i}$ 处处收敛. 当 k 是正整数时, 记

$$H_k=\{x\in X|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_{E_n}(x)\leqslant k\},$$

则可测集列 (H_k) 递增至 X. 取 k 使 $\mu(H_k)>0.9$. 这样由下式

$$0.2\leqslant\mu(E_n)=\mu(E_n\cap H_k)+\mu(E_n\setminus H_k)<\mu(E_n\cap H_k)+0.1$$

知 $\mu(E_n\cap H_k)>0.1$. 逐项积分得

$$\int\limits_{H_k}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_{E_n}d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu(E_n\cap H_k).$$

这样得 $k\mu(H_k)\geqslant 0.1\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant 10k\mu(H_k)$.

练习 10 利用 Euler 公式和二项式定理得

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b(\cos nx)^{2l}dx&=\int\limits_a^b\left(\frac{\exp(\sqrt{-1}nx)+\exp(-\sqrt{-1}nx)}{2}\right)^{2l}dx\\
&=\int\limits_a^b\sum_{i=0}^{2l}\frac{(2l)!}{i!(2l-i)!}\frac{\exp(\sqrt{-1}inx)}{2^i}\frac{\exp(-\sqrt{-1}(2l-i)nx)}{2^{2l-i}}dx\\
&=\sum_{i\neq l}\frac{(2l)!\exp((2i-2l)n\sqrt{-1}x)}{2^{2l}i!(2l-i)!(2i-2l)n\sqrt{-1}}\Big|_a^b+\frac{(2l)!x}{2^{2l}l!l!}\Big|_a^b.
\end{aligned}$$

可见所求极限为 $\dfrac{(2l)!(b-a)}{(2^l l!)^2}$. 请注意本题不能用积分极限定理.

练习 11 据 §3.1 练习 4 知 $f_n\dot{\leqslant}f_{n+1}$. 除了零集 $\bigcup\limits_{n\geqslant 1}(f_n>f_{n+1})$ 后可设 (f_n) 递增, 其极限记为 g; 则对任何可测集 E 有

$$\int\limits_E g d\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n d\mu=\int\limits_E f d\mu.$$

再据 §3.1 练习 4 知 g 与 f 几乎处处相等.

练习 12 因为 $f_+ \leqslant h_+$ 和 $f_- \leqslant g_-$ 几乎处处成立，所以 $f_\pm$ 可积.

练习 13 可设 $[a,b]=[0,1]$. 命 $\omega_i = M_i - m_i$，这是 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅. 作简单函数 $\omega_P(x) = \sum\limits_i \omega_i \chi_{(x_{i-1},x_i)}(x)$，则

$$\int \omega_P = \sum_i \omega_i(x_i - x_{i-1}) = U(P) - L(P).$$

作划分 $P_n = \{i/2^{-n} | i = 0,\cdots,2^n\}$. 所有 P_n 的所有分点组成一个零集 E. 命 $c = \sup\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. 当 $x \in E^c$ 时，$\omega(x) \leqslant \omega_{P_n}(x) \leqslant 2c$. 任取 $\delta > 0$. 当 $2^{-n} < \delta$ 时，取 i 使 $(i-1)/2^n < x < i/2^n$. 于是

$$\omega_{P_n}(x) = \omega_i \leqslant \sup\{f(t) - f(s) | x - \delta < s, t < x + \delta\}.$$

上式先命 $n \to \infty$ 再命 $\delta \to 0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_{P_n}(x) \leqslant \omega(x)$. 可见 ω_{P_n} 在 Borel 集 E^c 上递减至 ω. 这样 ω 在 E^c 上是 Borel 函数. 又 E 是可列集，所以 ω 在 E 上也是 Borel 函数. 据有界收敛定理得

$$\int_0^1 \omega = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \omega_{P_n} = \lim_{n\to\infty} (U(P_n) - L(P_n)).$$

这得 $\int \omega \geqslant U - L$. 当 $\varepsilon > 0$ 时，取 $[0,1]$ 的分点组 P 使 $L < L(P) + \varepsilon$ 且 $U > U(P) - \varepsilon$. 当 $x_{i-1} < x < x_i$ 时，$\omega(x) \leqslant \omega_i$. 所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega(x)dx \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant U - L + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $\int \omega \leqslant U - L$. 总之 $\int \omega = U - L$.

据 Darboux 定理，f 是 Riemann 可积函数当且仅当 $L = U$ 当且仅当 $\int \omega = 0$ 当且仅当 ω 几乎处处为零当且仅当 f 几乎处处连续.

练习 14 (1) 作变量代换 $y = x^b$，则

$$\int_0^1 |x^a \sin x^b| dx = \int_0^1 y^{\frac{a+1}{b}-1} \frac{|\sin y|}{b} dy, b > 0;$$

$$\int_0^1 |x^a \sin x^b| dx = \int_1^\infty y^{\frac{a+1}{b}-1} \frac{|\sin y|}{|b|} dy, b < 0.$$

被积函数都连续. 据数学分析知 f 可积当且仅当 $a > -1$.

(2) 作变量代换 $y = x^b$, 则

$$\int_1^{\infty} |x^a \sin x^b| dx = \int_1^{\infty} y^{\frac{a+1}{b}-1} \frac{|\sin y|}{b} dy, b > 0.$$

$$\int_1^{\infty} |x^a \sin x^b| dx = \int_0^{1} y^{\frac{a+1}{b}-1} \frac{|\sin y|}{|b|} dy, b < 0.$$

被积函数都连续. 据数学分析知 f 可积当且仅当 $a < -1$.

§3.3 重积分与累次积分

练习 1 命 $f(x,y) = xy$, 这得连续函数 $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使 $E = f^{-1}(\mathbb{Q})$, 所以 E 是 Borel 集. 当 $x = 0$ 时, 截口 $E_x = \mathbb{R}$; 当 $x \neq 0$ 时, $E_x = \{y | xy \in \mathbb{Q}\}$ 是可列集. 因此 $|E_x|_1$ 关于 x 几乎处处为零. 这样

$$|E|_2 = \int_{\mathbb{R}} |E_x|_1 dx = 0.$$

练习 2 命 $f(x,y) = (\sin x, \cos(x+y))$, 这得连续函数 $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ 使

$$E = f^{-1}([0, \frac{1}{2}) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})).$$

可见 E 是 Borel 集. 当 $(x,y) \in E$ 时, 由 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 且 $\sin x < 1/2$ 得 $0 \leqslant x < \pi/6$. 由 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 得 $0 \leqslant x + y < \pi/2$. 由 $\cos(x+y)$ 非有理数得

$$x + y \in \arccos([0,1] \setminus \mathbb{Q}).$$

可见

$$E_x = \{y | 0 \leqslant y \leqslant 1 : y \notin \arccos([0,1] \setminus \mathbb{Q}) - x\}.$$

于是 $|E_x|_1 = 1$. 从而

$$|E|_2 = \int_0^{\pi/6} |E_x|_1 dx = \frac{\pi}{6}.$$

练习 3 因为 $y \in E - x \Leftrightarrow x \in E - y \Leftrightarrow x + y \in E$, 所以

$$\begin{aligned}\mathbf{m}((E-x) \cap F) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(E-x)\cap F}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E-x}(y)\chi_F(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x+y)\chi_F(y) dy.\end{aligned}$$

因为 $(x,y) \mapsto \chi_E(x+y)$ 是 Borel 函数 (它是 Borel 函数 χ_E 与连续函数 $(x,y) \mapsto x + y$ 的复合), 所以 $(x,y) \mapsto \chi_E(x+y)\chi_F(y)$ 是上非负 Borel 函

数, 据 Tonelli 定理知 $x \mapsto \mathbf{m}((E-x)\cap F$ 是 x 的 Borel 函数. 再据 Tonelli 定理得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{m}((E-x)\cap F)dx=\int_{\mathbb{R}^n}dy\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{E-y}(x)\chi_F(y)dx\\=&\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{m}(E-y)\chi_F(y)dy=\mathbf{m}(E)\int_{\mathbb{R}^n}\chi_F(y)dy=\mathbf{m}(E)\mathbf{m}(F).\end{aligned}$$

练习 4 由对数函数的递增性得

$$\begin{aligned}&(f(x)-f(y))(\ln f(x)-\ln f(y))\geqslant 0\\\Rightarrow& f(x)\ln f(y)+f(y)\ln f(x)\\\leqslant& f(x)\ln f(x)+f(y)\ln f(y).\end{aligned}$$

上式作为 (x,y) 的非负可测函数在 $X\times X$ 上积分得

$$\begin{aligned}&\int_X f(x)\mu(dx)\int_X\ln f(y)\mu(dy)+\int_X\ln f(x)\mu(dx)\int_X f(y)\mu(dy)\\\leqslant&\int_X f(x)\ln f(x)\mu(dx)\int_X\mu(dy)+\int_X\mu(dx)\int_X f(y)\ln f(y)\mu(dy).\end{aligned}$$

注意到 $\mu(X)=1$, 化简上式即可.

练习 5

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{N}}\mu(di)\int_{\mathbb{N}}f(i,j)\mu(dj)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f(i,j)\\=&\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j<i}0-\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^i}+\sum_{j>i+1}0)=0,\\&\int_{\mathbb{N}}\mu(dj)\int_{\mathbb{N}}f(i,j)\mu(di)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}f(i,j)\\=&-\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{\infty}(\sum_{i<j-1}0+\frac{1}{2^{j-1}}-\frac{1}{2^j}+\sum_{i>j}0)=0.\end{aligned}$$

练习 6 对连续可微函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 用定理 5 即可.

练习 7 将所求积分记为 I, 据 Tonelli 定理得

$$I=\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}\exp(-x_i^2)dx_i=\sqrt{\pi^n}.$$

练习 8 从式子 $C=\{x\in X|\det\phi'(x)=0\}$ 知 C 是 Borel 集 (事实上是 F_σ-型集) 且 $x\in C$ 时， $\det\phi'(x)=0$. 据定理 5 知

$$\mathbf{m}(\phi(C))\leqslant\int_C|\det\phi'(x)|\mathbf{m}(dx)=0.$$

练习 9 在 Z 上， $R(xy)+D(xy)>0$ 当且仅当 $y\in(\mathbb{Q}/x)\cap(0,1]$. 因此

$$\int_Z(R(xy)+D(xy))dxdy=\int_0^1dx\int_{(\mathbb{Q}/x)\cap(0,1]}(R(xy)+D(xy))dy=0.$$

练习 10 构造点态逼近 f 的可测函数列即可. 对任何整数 i 和正整数 n, 当 $i-1<nx\leqslant i$ 时, 命 $f_n(x,y)=f(\frac{i}{n},y)$. 这分片定义了可测函数 $f_n:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. 固定 x 和 y, 取唯一 i_n 使 $i_n-1<nx\leqslant i_n$. 记 $x_n=i_n/n$, 则 $0\leqslant x_n-x<1/n$. 这样 $\lim x_n=x$. 据条件得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y)=f(x,y)$, 此即 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x,y)=f(x,y)$.

练习 11 作可测集 $E=(f=+\infty)$, 则 $\mu\{x\in E|\nu(E_x)>0\}=0$. 于是

$$\int_Y\mu(E^y)\nu(dy)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)=0.$$

从而 $\nu\{y\in Y|\mu(E^y)>0\}=0$, 即几乎所有 $y\in Y$ 使 $f(\cdot,y)$ 几乎处处有限.

练习 12 函数 f 不可积. 这是因为它的两个二次积分存在且不相等:

$$\begin{aligned}&\int_0^1dx\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\\=&\int_0^1dx\int_0^{\arctan(1/x)}\frac{\cos2\theta d\theta}{x}\\=&\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},\\&\int_0^1dy\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx=-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

练习 13 否则, 据积分的单调性和定理 1 得以下矛盾式子:

$$0.5>\int_Y\mu(E^y)\nu(dy)=\int_X\nu(E_x)\mu(dx)\geqslant0.5.$$

练习 14 当 (t_k) 递减至 t 时, 区间列 $(t_k,+\infty]: k=1,2,\cdots$ 递增至区间 $(t,+\infty]$. 因此 $(|f|>t_k)$ 递增至 $(|f|>t)$. 这样 $\mu(|f|>t_k)$ 递增至 $\mu(|f|>t)$. 这同时说明了 λ_f 的递减性与右连续性. 作 $X\times\mathbb{R}$ 的可测集

$$A=\{(x,t):|f(x)|^p>t>0\}.$$

截口 $A_x=(0,|f(x)|^p)$ 而 $A^t=(|f|>t^{1/p})$, 其测度分别是 $|f(x)|^p$ 与 $\lambda_f(t^{1/p})$. 对 A 用定理 1 得下式中第一等式

$$\int_X |f|^p d\mu=\int_0^\infty \lambda_f(t^{1/p})dt=\int_0^\infty p\lambda_f(s)s^{p-1}ds.$$

作变量代换 $t\mapsto s^p$ 得上式中第二等式.

练习 15 提示: 记 $\lambda=\mu\times\nu$, 则 $\lambda(G)=\lambda(H)$ 正是下式:

$$\int_X \nu(G_x)\mu(dx)=\int_X \nu(H_x)\mu(dx).$$

练习 16 提示: 命 $f(n,t)=n+t$, 这得 Borel 同构 $f:\mathbb{Z}\times[0,1)\to\mathbb{R}$ 使

$$\mathbf{m}(f(\{n\}\times F))=\mathbf{m}(F):n\in\mathbb{Z},F\in\mathcal{B}[0,1).$$

练习 17 (1) 等式 $\{x\}=\prod_{n\geqslant}\{\pi_n(x)\}$ 表明 $\{x\}$ 是 X 的 Borel 集且

$$\mu\{x\}=\prod_{n\geqslant1}\mu_n\{\pi_n(x)\}=\prod_{n\geqslant1}0.5=0.$$

(2) 等式 $F=\bigcup_{n\geqslant1}\bigcap_{i\geqslant n}\pi_i^{-1}\{1\}$ 表明 F 是 X 的 Borel 集且

$$\mu(F)\leqslant\sum_{n\geqslant1}\prod_{i\geqslant n}\mu_i\{1\}=0.$$

(3) 明显 f 是双射. 因为 $x\mapsto 2^{-n}\pi_n(x)$ 是 X 上可测函数, 所以 f 是 X 上可测函数. 作函数 $b_n:[0,1)\to\{0,1\}$ 使 $b_n(z)$ 是 z 的标准二进位小数的第 n 位, 这是 Borel 函数使 $\pi_n(x)=b_n(f(x))$. 又 $\mathcal{S}$ 有个生成系 $\{\pi_n^{-1}\{i\}|i=0,1;n\geqslant1\}$ 使

$$f(\pi_n^{-1}\{i\})=(b_n=i).$$

这是 $[0,1)$ 的 Borel 集, 从而 f 是 Borel 同构.

设 a 和 b 是二进位有限小数使 $a<b$, 要证 $\mu(a\leqslant f<b)=b-a$. 取正整数 n 和 k 使 $b-a=k2^{-n}$, 将 $[a,b)$ 平分成 k 份后可设 $b-a=2^{-n}$. 于是有非

0 即 1 的数 $a_i : i \leqslant n$ 使 $a_n = 0$ 且 $a = 0.a_1 \cdots a_{n-1}0$ 而 $b = 0.a_1 \cdots a_{n-1}1$. 进而 $a \leqslant f(x) < b$ 当且仅当 $i \leqslant n$ 时 $\pi_i(x) = a_i$. 这样

$$(a \leqslant f < b) = \bigcap_{i \leqslant n} \pi_i^{-1}(a_i).$$

这得 $\mu(a \leqslant f < b) = 2^{-n}$. 于是 $\mathcal{B}[0,1)$ 上两个全有限测度 $\mathbf{m}(\cdot)$ 和 $\mu f^{-1}(\cdot)$ 限制在环 $\mathbf{R}\{[a,b) | 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1\}$ 上相等, 据测度延拓的唯一性知 $\mathbf{m}(G) = \mu f^{-1}(G)$ 恒成立.

§3.4 几个积分不等式

练习 1 因为 $\mathbf{m}(\mathbb{Z}) = 0$, 所以 $|f| \doteq 0$. 于是 $\|f\|_\infty = 0$.

练习 2 当 $0 < r < \|f\|_\infty$ 时, $\mu(|f| > r) > 0$, 从而

$$\|f\|_p \geqslant \Big(\int_{(|f|>r)} |f|^p\Big)^{1/p} \geqslant r\mu(|f| > r)^{1/p}.$$

于是 $\varliminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant r$. 命 $r \to \|f\|_\infty$ 得 $\varliminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$. 又

$$\varlimsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \varlimsup_{p\to\infty} \mu(X)^{1/p}\|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

练习 3 否则, 对任何正整数 l, 据有界收敛定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b (\cos k_n x)^{2l} dx = 0$. 这与 §3.2 练习 10 矛盾.

练习 4 当 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是 X 的可测划分且 $c_1, \cdots, c_n$ 是正数时, 据数学分析中介绍的 L'Hospital 法则得

$$\lim_{p\to 0+} \frac{\ln \sum\limits_{i=1}^n c_i^p \mu(E_i)}{p} = \lim_{p\to 0+} \frac{\sum\limits_{i=1}^n c_i^p \ln c_i \mu(E_i)}{\sum\limits_{i=1}^n c_i^p \mu(E_i)} = \sum_{i=1}^n (\ln c_i)\mu(E_i).$$

若以 f 记简单函数 $\sum\limits_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$, 则 $f^p = \sum\limits_{i=1}^n c_i^p \chi_{E_i}$. 上式表明

$$\lim_{p\to 0+} \ln \|f\|_p = \int_X \ln f d\mu.$$

一般地, 取递增至 f 的简单函数列 (g_k) 和递减至 f 的简单函数列 (h_k) 使 $0.1 < g_k$ 而 $h_k < 10$. 这样 $\ln \|g_k\|_p \leqslant \ln \|f\|_p \leqslant \ln \|h_k\|$. 命 $p \to 0$ 得

$$\int \ln g_k \leqslant \varliminf_{p\to 0+} \ln \|f\|_p \leqslant \varlimsup_{p\to 0+} \ln \|f\|_p \leqslant \int \ln h_k.$$

据单调收敛定理，命 $k \to \infty$ 得

$$\int \ln f \leqslant \varliminf_{p\to 0+} \ln \|f\|_p \leqslant \varlimsup_{p\to 0+} \ln \|f\|_p \leqslant \int \ln f.$$

练习 5 提示: 当 $0 < a < b < +\infty$ 时，取 b/a 的共轭数 c, 则

$$(\int |f|^a 1)^{\frac{1}{a}} \leqslant (((\int (|f|^a)^{\frac{b}{a}})^{\frac{a}{b}})^{\frac{1}{a}}((\int 1^c)^{\frac{1}{c}})^{\frac{1}{a}} = (\int |f|^b)^{\frac{1}{b}}.$$

练习 6 对等式 $1 = f^{\frac{1}{2}} f^{\frac{-1}{2}}$ 用 Hölder 不等式即可.

练习 7 可设 $1 < p < +\infty$ 且 $f = 0$. 取 p 的共轭指数 q, 结论源自下式:

$$|\int_a^x f_n(t)dt| \leqslant (\int_a^x |f_n(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} (\int_a^x 1^q dt)^{\frac{1}{q}} \leqslant (x-a)^{\frac{1}{q}} \|f_n\|_p.$$

练习 8 可设 $1 < p < +\infty$ 时，取 p 的共轭数 q, 则

$$\begin{aligned} g(y) &\leqslant \int_X f(x) K(x,y)^{1/p} K(x,y)^{1/q} \nu(dy) \\ &\leqslant (\int_X f(x)^p |K(x,y)\mu(dx))^{1/p} (\int_X K(x,y)\mu(dx))^{1/q}. \end{aligned}$$

由此得 $\|g\|_p^p \leqslant \int_Y \int_X c^{p/q} f(x)^p K(x,y)\mu(dx)\nu(dy) = c^p \|f\|_p^p$.

练习 9 按条件得

$$\begin{aligned} &\|g\|_p^p = \int_X \left(\int_Y A(x,y) f(y) \nu(dy) \right)^p \mu(dx) \\ &= \int_X \mu(dx) \left(\int_Y A(x,y)^{1/q} h(y) A(x,y)^{1/p} \frac{f(y)}{h(y)} \nu(dy) \right)^p \\ &\leqslant \int_X \mu(dx) \left(\left(\int_Y A(x,y) h(y)^q \nu(dy) \right)^{1/q} \left(\int_Y A(x,y) \frac{f(y)^p}{h(y)^p} \nu(dy) \right)^{1/p} \right)^p \\ &\leqslant \int_X \mu(dx) \int_Y \beta^p h^p(x) A(x,y) \frac{f(y)^p}{h(y)^p} \mu(dx) \\ &\leqslant \int_Y \beta^p \gamma^p f(y)^p \nu(dy) = (\beta\gamma \|f\|_p)^p. \end{aligned}$$

练习 10 记 $f_n = \chi_{E_n}$, 据 Чебышев 不等式知 (f_n) 依测度收敛于 f:

$$\mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) \leqslant \int_X |f_n - f|/\varepsilon d\mu.$$

据 F. Risze 定理, 有子列 (f_{k_n}) 在某个零测度集 F 外处收敛于 f. 当 $x \in X \setminus F$ 时, $(f_n(x) = f_n(x)^2)$ 同时收敛于 $f(x)$ 与 $f(x)^2$. 这样在 $X \setminus F$ 上, f 要么取值 0 要么取值 1. 作可测集 $E = \{x \in X \setminus F | f(x) = 1\}$, 则 f 与 χ_E 几乎处处相等. 因为 $f = (f - f_n) + f_n$, 所以 f 是可积函数. 从而 E 是测度有限集.

练习 11 必要性: 由 §3.2 练习 4 知 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. 应用本节定理 8(2) 而得 δ 的存在性.

充分性: (f_n) 满足本节定理 8 中 (1)-(3), 如在 (1) 中命 $E = X$ 即可. 这样 (f_n) 依平均收敛, 其极限应是 f.

练习 12 提示: 应用练习 11.

练习 13 对共轭指数 $((p+1)/p, p+1)$ 用 Hölder 不等式得

$$\int |f|^p \times 1 \leqslant \left(\int |f|^{p \times \frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int 1^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} = \left(\int |f|^{p+1} d\mu\right)^{\frac{p}{p+1}}.$$

记 $c_p = \|f\|_{p+1}^{p+1} / \|f\|_p^p$, 上式表明 $c_p \geqslant \|f\|_{p+1}$. 因为

$$\int |f|^{p+1} d\mu \leqslant \|f\|_\infty \int |f|^p d\mu,$$

所以 $c_p \leqslant \|f\|_\infty$. 可见 $\varliminf\limits_{p\to\infty} c_p \geqslant \|f\|_\infty$ 且 $\varlimsup\limits_{p\to\infty} c_p \leqslant \|f\|_\infty$.

练习 14 对共轭数对 $(1/p, 1/(1-p))$ 用 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int |fg|^p |g|^{-p} d\mu \\ &\leqslant \left(\int (|fg|^p)^{\frac{1}{p}} d\mu\right)^p \left(\int (|g|^{-p})^{\frac{1}{1-p}} d\mu\right)^{1-p} \\ &= \left(\int |fg| d\mu\right)^p \left(\int |g|^q d\mu\right)^{1-p} = \|fg\|_1^p \|g\|_q^{-p}. \end{aligned}$$

化简上式即可.

练习 15 记 $r = 1/p$, 而 s 是 r 的共轭数. 于是

$$\begin{aligned} (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p)^p &= \left(\left(\int f_1^p\right)^r + \left(\int f_2^p\right)^r\right)^{1/r} \\ &= \sup\left(b_1 \int f_1^p + b_2 \int f_2^p\right) = \sup \int (b_1 f_1^p + b_2 f_2^p) \\ &\leqslant \sup \int (b_1^s + b_2^s)^{1/s} (f_1 + f_2)^p = \|f_1 + f_2\|_p^p, \end{aligned}$$

其中 b 取遍使 $b_1^s + b_2^s = 1$ 的非负数对, 第二等式源自在计数测度空间 $(\{1,2\}, \mu)$ 上对共轭数对 (r, s) 用定理 2, 而不等式源自在此计数测度空间上对共轭数对 (r, s) 用 Hölder 不等式.

练习 16 提示: 命 $E=(|f|\geqslant\varepsilon)$, 则 $\int\limits_E \psi(\varepsilon)d\mu\leqslant\int\limits_X \psi(|f|)d\mu$.

练习 17 为证明 Clarkson 不等式, 先导出几个初等不等式. 设 $0\leqslant t\leqslant 1$ 且 n 是正整数, 则成立 3 个以下不等式:

(5) $(p-2n)t^{2nq-2n}+2nt^{2nq-q-2n}\leqslant p$,

(6) $2(1+t^q)^{p-1}\leqslant(1+t)^p+(1-t)^p$,

(7) $(1+t)^q+(1-t)^q\leqslant 2(1+t^p)^{q-1}$.

为此当 $0\leqslant s\leqslant 1$ 时, 命 $f(s)=(p-2n)s^{2n}+2ns^{2n-p}$. 因为

$$f'(s)=2n(2n-p)(s^{2n-p-1}-s^{2n-1})\geqslant 0,$$

所以 $f(s)\leqslant f(1)$, 此式在 $t=s^{p-1}$ 时即是 (5) 式. 当 $n\geqslant 1$ 时,

$$\binom{p}{2n}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-2n+1)}{(2n)!}\geqslant 0.$$

现在 (6) 式与 (7) 式在 $t=1$ 时成立. 在 $0\leqslant t<1$ 时, 由上式与 (5) 式得

$$\begin{aligned}&(1+t^q)^{p-1}-((1+t)^p+(1-t)^p)/2\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p-1}{n}t^{qn}-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}\frac{t^n+(-t)^n}{2}\\=&\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\binom{p-1}{2n}t^{2nq}+\binom{p-1}{2n-1}t^{(2n-1)q}-\binom{p}{2n}t^{2n}\right\}\\=&\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n}\binom{p}{2n}\frac{(p-2n)t^{2nq-2n}+2nt^{2nq-2n-q}-p}{p}\leqslant 0.\end{aligned}$$

这得 (6) 式. 在 (6) 式中以 $(1-t)/(1+t)$ 代替 t 得 (7) 式.

设 u 与 v 是复数, 则成立以下 4 个不等式:

(8) $|u+v|^q+|u-v|^q\leqslant 2(|u|^p+|v|^p)^{q-1}$,

(9) $|u+v|^q+|u-v|^q\leqslant 2^{q-1}(|u|^q+|v|^q)$,

(10) $2(|u|^q+|v|^q)^{p-1}\leqslant|u+v|^p+|u-v|^p$,

(11) $2^{p-1}(|u|^p+|v|^p)\leqslant|u+v|^p+|u-v|^p$.

无妨设 $0\leqslant r\leqslant 1$ 及 $|z|=1$ 使 $v/u=rz$, 则 (8) 相当于下式

$$|1+rz|^q+|1-rz|^q\leqslant 2(1+r^p)^{q/p}.$$

记 $z=x\pm\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}$, 其中 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 将上式左端记为 $e(x)$, 则

$$e(x)=(1+r^2+2rx)^{q/2}+(1+r^2-2rx)^{q/2}.$$

可见 $e(x)$ 是 x 的偶函数且当 $0<x<1$ 时,

$$e'(x)=qr(1+r^2+2rx)^{q/2-1}$$
$$-qr(1+r^2-2rx)^{q/2-1}\geqslant 0.$$

因此 e 在 $x=\pm 1$ 时取得最大值 $(1+r)^q+(1-r)^q$. 由此结合 (7) 式知 (8) 式成立. 由 $[1,+\infty)$ 上函数 $t\mapsto t^{q-1}$ 的下凸性得以下不等式:

(12) $(|u|^p/2+|v|^p/2)^{q-1}\leqslant(|u|^{p(q-1)}+|v|^{p(q-1)})/2.$

注意到 $pq-p=q$ 并结合 (8) 式可知 (9) 式成立. 在 (8) 式中, 以 $u+v$ 代替 u 而以 $u-v$ 代替 v 得 (10) 式. 由 (10) 式和 (12) 式知 (11) 式成立.

至于 (1) 式, 注意到 $\||g|^q\|_{p-1}=\|g\|_p^q$,

$$\|g+h\|_p^q+\|g-h\|_p^q=\||g+h|^q\|_{p-1}+\||g-h|^q\|_{p-1}$$
$$\leqslant\||g+h|^q+|g-h|^q\|_{p-1}(\text{此由反向 Minkowski 不等式})$$
$$\leqslant\|2(|g|^p+|h|^p)^{q/p}\|_{p-1}(\text{此由上面 (8) 式})$$
$$=\|2^{p-1}(|g|^p+|h|^p)\|_1^{1/(p-1)}=2(\|g\|_p^p+2\|h\|_p^p)^{q-1},$$

至于 (3) 式, 注意到 $\|g\|_q^p=\||g|^p\|_{q-1}$,

$$\|g+h\|_q^p+\|g-h\|_q^p=\||g+h|^p\|_{q-1}+\||g-h|^p\|_{q-1}$$
$$\geqslant\||g+h|^p+|g-h|^p\|_{q-1}(\text{此由 Minkowski 不等式})$$
$$\geqslant\|2(|g|^q+|h|^q)^{p-1}\|_{q-1}(\text{此由 (10) 式})$$
$$=2\||g|_q+|h|^q\|_1^{p-1}=2(\|g\|_q^q+\|h\|_q^q)^{p-1}.$$

最后在 (9) 式与 (11) 式中命 $u=g(x)$ 而 $v=h(x)$ 并积分得 (4) 式与 (2) 式.

练习 18 (1) 任取 $\mathcal{S}$ 中序列 (E_n), 则

$$(E_1\setminus E_2)\cap X_i=(E_1\cap X_i)\setminus(E_2\cap X_i)\in\mathcal{S}_i,$$
$$(\bigcup_{n\geqslant 1}E_n)\cap X_i=\bigcup_{n\geqslant 1}(E_n\cap X_i)\in\mathcal{S}_i.$$

因为 $\{i|(E_1\setminus E_2)\cap X_i\neq\varnothing\}$ 是可数集 $\{i|E_1\cap X_i\neq\varnothing\}$ 的子集 (自然可数) 而 $\{i|(\bigcup_{n\geqslant 1}E_n)\cap X_i\neq\varnothing\}$ 是可数集 $\bigcup_{n\geqslant 1}\{i|E_n\cap X_i\neq\varnothing\}$ 的子集 (也可数), 从而 $\mathcal{S}$ 对差运算和可列并运算封闭.

当 $\mathcal{S}$ 是代数时, $X\cap X_i=X_i\in\mathcal{S}_i$ 且 $J=\{i|X\cap X_i\neq\varnothing\}$, 从而 J 是可数集. 反之, 对任何 $i\in J$, 有 $X\cap X_i=X_i\in\mathcal{S}_i$. 从而 X 在 $\mathcal{S}$ 中.

(2) 明显 $\mu(\varnothing)=0$ 且 $\mu(E)\geqslant 0$. 现设 E 有可测划分 $\{E_n\}$, 则

$$\mu(E)=\sum_{i\in J}\mu_i(E\cap X_i)=\sum_{i\in J}\sum_{n\geqslant 1}\mu_i(E_n\cap X_i)$$
$$=\sum_{n\geqslant 1}\sum_{i\in J}\mu_i(E_n\cap X_i)=\sum_{n\geqslant 1}\mu(E_n).$$

因此 μ 是测度. 它 σ- 有限时, 每个 $E\in\mathcal{S}_i$ 有测度有限划分 $\{F_n\}$. 因此 F_n 都在 $\mathcal{S}_i$, 这样 μ_i 都是 σ- 有限的. 反之, 每个 $E\in\mathcal{S}$ 对应 J 的一个可数子集 I 和 $E_i\in\mathcal{S}_i$ 使 $E=\bigsqcup_{i\in I}E_i$. 每个 E_i 是 $\mathcal{S}_i$ 中一个测度有限集列 (E_{ni}) 所覆盖, 这样 $E_{ni}:n\geqslant 1, i\in I$ 是可列个测度有限集, 它们覆盖 E.

(3)提示: 充要条件源自限制和黏接保持可测性. 要证的两个等式源自逐项积分和 X 中零集都形如 $\bigsqcup_{i\in J}E_i$, 其中 E_i 是 X_i 的零集.

练习 19 对于正整数 n, 作可测集 $E_n=(n-1\leqslant |f|<n)$. 作可数集 $J=\{n|\mu(E_n)\neq 0\}$ 和 X 上非负可测函数 $g=\sum_{n\in J}\chi_{E_n}\div\mu(E_n)$, 则等式 $\int_X g d\mu=\sum_{n\in J}1$ 和题目条件表明 J 是有限集. 于是有正整数 l 使 $n>l$ 时, $\mu(E_n)=0$. 这表明 $|f|\dot{\leqslant} l$. 从而 f 本性有界. 命 $V=\mathbb{C}\setminus Y$, 其中

$$Y=\{y\in\mathbb{C}|\forall r>0:\mu(f^{-1}O(y,r))>0\}.$$

可见, $y\in V$ 当且仅当有 $r>0$ 使 $\mu(f^{-1}O(y,r))=0$. 此时当 $z\in O(y,r)$ 时, $\mu(f^{-1}O(y,r-|y-z|))=0$. 可见 $O(y,r)\subseteq V$. 从而 V 是开集. 这样 Y 是闭集, 其有界性源自不等式 $Y\subseteq\{y:|y|\leqslant\|f\|_\infty\}$, 从而 Y 是紧集. 取可列个这种开圆盘 $O(y_k,r_k):k\geqslant 1$ 覆盖 V. 据等式 $f^{-1}(V)=\bigcup_k f^{-1}O(y_k,r_k)$ 知 $\mu(f^{-1}(V))=0$.

任取 $y\in Y$, 命 $E_y=f^{-1}\{y\}$. 当 $x\in E_y$ 时, 命 $g_y(x)=0$. 当 $x\in X\setminus E_y$ 时, 命 $g_y(x)=(f(x)-y)^{-1}$. 这得本性有界函数 $g_y:X\to\mathbb{C}$. 命 $r_y=(\|g_y\|_\infty+1)^{-1}$, 则几乎所有 $x\in E_y^{\mathrm{c}}$ 使 $|f(x)-y|^{-1}\leqslant r_y^{-1}$. 命

$$V_y=\{z\in\mathbb{C}|0<|z-y|<r_y\},$$

则 $\mu f^{-1}(V_y)=0$. 因为 $\{O(y,r_y)|y\in Y\}$ 是 Y 的开覆盖, 可取其有限子覆盖 $\{O(y,r_y)|y\in F\}$, 所以据原像保持并运算知 $\{E_y\cup f^{-1}(V_y),\cup f^{-1}(V)|y\in F\}$ 是 X 的可测覆盖. 因为 $\mu(f^{-1}(V)\cup\bigcup_{y\in F}\{f^{-1}(V_y)|y\in F\})=0$, 所以 f 与简单函数 $\sum_{y\in F}y\chi_{E_y}$ 几乎处处相等.

练习 20 (1) 命 $h=|f|/f$ 即可. (2) 当 $0<r<\|f\|_\infty$ 时, 取 $(|f|>r)$ 可测子集 E 使 $0<\mu(E)<+\infty$. 命 $g=\chi_E/\mu(E)$, 则 $\|g\|_1=1$ 且 $\int|gf|\geqslant r$. 命 $r\to\|f\|_\infty$ 即可.

练习 21 当 $\|f\|_{p_i}$ 有限时且 $p_1<p<p_2$ 时, 据插值不等式得

$$\|f\|_p\leqslant\|f\|_{p_1}\vee\|f\|_{p_2}<+\infty.$$

若命 $E=\{q:\|f\|_q<+\infty\}$, 则 $[p_1,p_2]\subseteq E$. 据 §1.4 例 2 知 E 是区间.

§3.5 含参变量积分

练习 1 (1) 命 φ 同例 1. 命 $r_0=\min\{d(x,\mathbb{R}^n\backslash U)|x\in K\}$. 当 $0<r<r_0/3$ 时, 作开集 $V=\{x|d(x,K)<r\}$ 与紧集 $A=\{x|d(x,K)\leqslant 2r\}$. 显然

$$K\subseteq V\subseteq A\subseteq U.$$

命 $g=\chi_V*\varphi_r$, 它是光滑函数且 $0\leqslant g\leqslant 1$. 现在

$$g(x)=\int\limits_{|y|<r}\chi_V(x-y)\varphi_r(y)dy.$$

任意固定 $|y|<r$. 首先, $|d(x,K)-d(x-y,K)|\leqslant|y|$. 当 $x\in K$ 时, $d(x-y,K)\leqslant|y|$; 从而 $\chi_V(x-y)=1$. 这样 $g(x)=1$. 当 $x\notin A$ 时,

$$d(x-y,K)\geqslant d(x,K)-|y|>r.$$

于是 $\chi_V(x-y)=0$. 从而 $g(y)=0$. 这说明 $(g\neq 0)\subseteq A\subseteq U$.

(2) 据 §3.4 定理 4, 可设 f 是 $(a,b]$ 的特征函数. 据正则性, Ω 中有紧集 K 和开集 U 使 $K\subseteq(a,b]\subseteq U$ 且 $\mathbf{m}(U\setminus K)<\min\{\varepsilon^{p_1},\varepsilon^{p_2}\}$. 命 g 同 (1), 则 $|g-f|\leqslant\chi_{U\setminus K}$. 于是 $p_1\leqslant p\leqslant p_2$ 时, $\|g-f\|_p\leqslant\varepsilon$.

(3) 命 $r_A=\min\{d(x,\mathbb{R}^n\setminus\Omega)|x\in A\}$. 当 $0<r<r_A/2$ 时, 命 $V_r=\{x|d(x,A)<r\}$, 作 Ω 中紧集 $B=\{x|d(x,A)\leqslant 2r\}$. 任取 $x\in V_r$. 当 $|y|<r$ 时, $x-y$ 在 B 中. 这样 $f*\varphi_r(x)$ 只与 f 在 B 上的函数值有关:

$$f*\varphi_r(x)=\int\limits_{|y|<r}f(x-y)\varphi_r(y)dy.$$

因此 $f*\varphi_r$ 在开集 V_r 上有意义. 将 f 在 B 外重新定义为 0 后, 可设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上 p 方可积函数. 据定理 4 知

$$\lim_{r\to 0}\|f*\varphi_r-f\|_{p,A}\leqslant\lim_{r\to 0}\|f*\varphi_r-f\|_p=0.$$

据性质 3(7) 知 $\partial^\alpha(f*\varphi_r)=f*\partial^\alpha\varphi$. 从而 $f*\varphi_r$ 光滑.

练习 2 因为 $\hat{g}(x)=\int\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)f(y+u)du$, 此式中以 $y-u$ 代替 y 并据 Lebesgue 积分的平移不变性得

$$\hat{g}(x)=\int\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot(y-u))f(y)dy.$$

此即 $\exp(2\pi\sqrt{-1}x\cdot u)\hat{f}(x)$.

练习 3 注意到下式即可

$$\begin{aligned}&\int\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)f(\tau^{-1}y)dy\\=&\int\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot\tau z)f(z)|\det\tau|dz\\=&|\det\tau|\int\exp(-2\pi\sqrt{-1}\tau^{\mathrm{T}}x\cdot z)f(z)dz.\end{aligned}$$

练习 4 据积分的定义可设 $f\geqslant 0$. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(nx)}{n^c}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t)}{n^{1+c}}dt<+\infty.$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f(nx)}{n^c}$ 几乎处处有限，它的通项便几乎处处逼近 0.

练习 5 (1) 据内正则性，可设 E 和 F 是 Lebesgue 测度非零的紧集. 作卷积 $f=\chi_E*\chi_F$. 若 x 不在 $E+F$ 中，则

$$\begin{aligned}&t\in E\Rightarrow x-t\notin F\\&\Rightarrow\chi_F(x-t)=0\Rightarrow f(x)=0.\end{aligned}$$

注意到 $\|f\|_1=\|\chi_E\|_1\|\chi_F\|_1$, 它为正，由上面的结论知

$$(f\neq 0)\subseteq E+F\subseteq G.$$

据性质 3 知 f 一致连续，从而 $(f\neq 0)$ 是非空开集.

(2) 命 E 和 F 都是 Cantor 集，§1.5 练习 15 已说明 $E+F=[0,2]$, 它包含开集 $(0,1)$.

练习 6 当 g 是区间 $(a,b]$ 的特征函数时，取 $(bx-ax)/T$ 的整数部分 k, 则

$$\begin{aligned}&\frac{bx-T-ax}{Tx}\leqslant\frac{k}{x}\leqslant\frac{bx-ax+T}{Tx},\\&\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)\psi(xy)dy=\int_a^b\psi(xy)dy=\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}\psi(y)dy\\=&\int_{ax}^{ax+kT}\frac{\psi(y)}{x}dy+\int_{ax+kT}^{bx}\frac{\psi(y)}{x}dy=\frac{kI}{x}+J.\end{aligned}$$

因为 $|J| \leqslant \|\psi\|_\infty T/x$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{x}=\dfrac{b-a}{T}$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g(y)\psi(y)dy=\frac{I}{T}\int_{\mathbb{R}} g(y)dy.$$

因此当 g 是相对于 $\mathcal{R}_1$ 的简单函数时，上式成立．在 f 可积时，记

$$\varphi(f)=\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_{\mathbb{R}}(\psi(xy)-\frac{I}{T})f(y)dy\right|.$$

当 $\varepsilon>0$ 时，取如上的简单函数 g 使 $\|f-g\|_1<\epsilon$, 则

$$\begin{aligned}\varphi(f)&\leqslant\varphi(f-g)+\varphi(g)\\&\leqslant(1+I/T)\|f-g\|_1<c\epsilon,\end{aligned}$$

其中 c 是只与 I 和 T 有关的常数．命 $\epsilon\to0$ 得 $\varphi(f)=0$.

先命 $\psi(x)=|\sin x|$, 则 ψ 是周期为 π 的有界连续函数使 $\int\limits_0^\pi\psi(x)dx=2$. 对此 ψ 用上面的结论可得 §3.4 例 2. 最后命 $\psi(x)=\exp(\pm2\pi\sqrt{-1}xy)$, 则 ψ 是周期为 1 的有界连续函数使 $\int\limits_0^1\psi(x)dx=0$. 对此 ψ 用上面的结论可得一维情形的 Riemann-Lebesgue 引理.

练习 7 否则，命 φ 同例 1. 当 $r>0$ 时，命 $\varphi_r(x)=\dfrac{1}{r^n}\varphi(\dfrac{x}{r})$. 这得卷积的近似单位 $(\varphi_r)_{r>0}$(见定理 4) 使 $|x|>r$ 时 $\varphi_r(x)=0$. 于是

$$\lim_{r\to0}\|\varphi_r-e\|_1=\lim_{r\to0}\|e*\varphi_r-e\|_1=0.$$

据 Чебышев 不等式知 $(\varphi_r)_{r>0}$ 依测度逼近 e, 于是有严格递减至 0 的数列 (r_k) 使 (φ_{r_k}) 几乎处处逼近 e.

当 $|x|>r_k$ 且 $l>k$ 时，$\varphi_{r_k}(x)=0$. 这样使 $|x|>r_k$ 的几乎所有 x 使 $e(x)=0$. 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}r_k=0$, 所以 e 几乎处处为零．于是对所有紧支撑的光滑函数 f 成立 $e*f=0$, 矛盾.

练习 8 注意到 $\hat{f}(x)=\int\limits_a^b\exp(2\pi\sqrt{-1}xy)dy$. 由 Newton-Leibniz 公式得

$$\hat{f}(x)=\frac{\sin\pi(b-a)x\exp(-\sqrt{-1}\pi(a+b)x))}{\pi x}.$$

以 $(r,s]$ 代替 $(a,b]$ 知 $\widehat{f\hat{g}}$ 是可积函数，它的虚部是奇函数. 因此

$$\begin{aligned}\int f\overline{\hat{g}} &= \int \frac{\sin\pi(b-a)x\sin\pi(s-r)x\cos(\pi(a+b-r-s)x)}{(\pi x)^2}\\&= \int \frac{[\sin\pi(b-r)x]^2+[\sin\pi(a-s)x]^2}{2(\pi x)^2}dx\\&-\int \frac{[\sin\pi(b-s)x]^2+[\sin\pi(a-r)x]^2}{2(\pi x)^2}dx\\&=\frac{-|b-s|-|a-r|+|b-r|+|s-a|}{2}=\int f\overline{g}.\end{aligned}$$

练习 9 提示: 将 f 在 X 外补充定义为 0 后可设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可积函数，对其用 Riemann-Lebesgue 引理即可.

练习 10 提示: 命 $\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\times\cdots\times\mathcal{S}_n$, 则 $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}^*$. 用 §3.4 定理 4.

练习 11 提示: 当 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 是形如 $g_1\otimes\cdots\otimes g_n$ 的函数时 (其中 g_i 都是 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 可积函数使 $g(x)=g_1(x_1)\cdots g_n(x_n)$),

$$\hat{g}(x)=\widehat{g_1}(x_1)\cdots\widehat{g_n}(x_n).$$

据练习 10, 对一般 Lebesgue 可积函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ 和 $\varepsilon>0$, 有上述形式的 g 的线性组合 h 使 $\|f-h\|_1<\varepsilon$. 最后利用 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\hat{h}(x)=0$ 和 ε 的任意性.

§4.1 有界变差函数

练习 1 要证等式两边记为 v 和 w. 当 f 无界时，$v=w=+\infty$. 现设 f 有界. 对于 $\varepsilon>0$, 在 $[x_{k-1},x_k]$ 中取两点 y_k 与 z_k 使 $\omega_k\leqslant|f(z_k)-f(y_k)|+\varepsilon/n$. 于是 $Q=P\cup\{y_l,z_l|1\leqslant l\leqslant n\}$ 是 $[a,b]$ 的一个分点组使

$$V(f,P)\leqslant\Omega(f,P)\leqslant V(f,Q)+\varepsilon.$$

由此得 $v\leqslant w\leqslant v+\varepsilon$. 命 $\varepsilon\to 0$ 得 $w=v$.

练习 2 记 $c=\sup\limits_{a<x<b}|f'(x)|$. 对于分点组 $P:x_0<\cdots<x_n$,

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|=|f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})|\leqslant c(x_i-x_{i-1}).$$

将上式关于 i 求和得 $V(f,P)\leqslant c(b-a)$. 因而 f 是有界变差函数.

练习 3 作变量代换 $t \mapsto sx$ 得 $g(x) = \int\limits_0^1 f(sx)ds$. 于是

$$|g(x_i) - g(x_{i-1})| \leqslant \int\limits_0^1 |f(sx_i) - f(sx_{i-1})|ds$$

$$\Rightarrow \bigvee_0^1 g \leqslant \int\limits_0^1 (\bigvee_0^s f)ds \leqslant \bigvee_0^1 f.$$

练习 4 显然 α 是递减函数而 β 是递增函数. 对于 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 使 $0 \leqslant x_2 - x_1 < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}\beta(x_2) &= \beta(x_1) \vee \max\{f(y)|x_1 \leqslant y \leqslant x_2\} \\ &\leqslant \beta(x_1) \vee (f(x_1) + \varepsilon) \leqslant \beta(x_1) + \varepsilon.\end{aligned}$$

这样 $\beta(x_2) - \beta(x_1) < \varepsilon$, 从而 β 一致连续. 同样 α 也一致连续.

练习 5 (1) 源自 $x_1 < x_0 < x_2$ 时, $\Delta_f(x_1, x_0) \leqslant 0 \leqslant \Delta_f(x_2, x_0)$.

仿 (1) 得 (2). (3) 取实数 r 和 s 使 $D^- f(x_0) < r < 0$ 且 $0 < s < D_+ f(x_0)$, 则有 $\delta > 0$ 使 $0 < x_0 - x_1 < \delta$ 且 $0 < x_2 - x_0 < \delta$ 时,

$$\Delta_f(x_1, x_0) < r < s < \Delta_f(x_2, x_0).$$

由此得 $f(x_1) > f(x_0)$ 且 $f(x_2) > f(x_0)$, 从而 x_0 为严格极小值点.

(4) 当 x 是 f 的严格极小点时, 取有理数 a_x 和 b_x 使 x 为 f 在开区间 (a_x, b_x) 上的严格最小值点. 不同的 x 对应的开区间 (a_x, b_x) 不同. 这些区间有可数个.

(5) 命 $f_r(x) = f(x) - rx$, 则

$$\begin{aligned}&(D^- f < r < D_+ f) = (D^- f_r < 0 < D_+ f_r) \\ \Rightarrow &(D^- f < D_+ f) = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}} (D^- f_r < 0 < D_+ f_r).\end{aligned}$$

据 (3) 和 (4) 知 $(D^- f < D_+ f)$ 可数. 同样 $(D^+ f < D_- f)$ 可数.

练习 6 因为 f 分别在 [0,1) 与 (1,2] 内单调, 所以 f 在这两个区间的全变差分别是 1 与 3. 注意到 $|f(1) - f(1-)| = 10$ 且 $|f(1+) - f(1)| = 9$, 所以 f 在 $[0, 2]$ 内的全变差是 $1 + 10 + 9 + 3$ 即 23.

练习 7 当 $P: x_0 < \cdots < x_n$ 取遍 $[a, b]$ 的分点组时, $f(P): f(x_0) < \cdots < f(x_n)$ 取遍 $[c, d]$ 的分点组. 注意到 $V(gf, P) = V(g, f(P))$ 即可.

练习 8 注意到 $\exp(\sqrt{-1}f)$ 与 f 的全变差一致，这得 (1). (2) 因为 $1/|g|$ 有界变差，所以 $\exp(\sqrt{-1}f)=g/|g|$ 有界变差. 这样 f 有界变差.

练习 9 注意到 sin 在区间 $[0,\pi/2]$ 递增而在区间 $[\pi/2,\pi]$ 上递减，有

$$(\bigvee\sin)(x)=\begin{cases}\sin x:0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 2-\sin x:\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

现在 sin 的正负变差函数 $g_{\pm}(x)=\dfrac{1}{2}((\bigvee\sin)(x)\pm\sin x)$，也即

$$g_+(x)=\begin{cases}\sin x:0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1:\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi;\end{cases}$$

$$g_-(x)=\begin{cases}0:0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1-\sin x:\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

练习 10 可设 f 递增，于是 g 也递增. 设 $0<t<1$.

(4) 如果 $x>x_0$, 则 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant f(x+t(x-x_0))$. 命 $x\to x_0+$, 得

$$f(x_0+)\leqslant g(x_0+)\leqslant f(x_0+).$$

这样 $g(x_0+)=f(x_0+)=g(x_0)$, 从而 g 在 x_0 右连续.

(5) 如果 $x<x_0$, 则 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant f(x+t(x_0-x))$. 命 $x\to x_0-$, 得

$$f(x_0-)\leqslant g(x_0-)\leqslant f(x_0-).$$

(2) 必要性：由 (4) 和 (5) 得 $g(x_0\pm)=f(x_0)$, 即 g 在 x_0 连续.

充分性：由 (4) 和 (5) 知 $f(x_0\pm)=g(x_0)$, 即 f 在 x_0 连续.

(3) 设 $0<t<1$, 据 (2) 和 (4) 及 (5) 得

$$\begin{aligned}x>x_0:\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&\leqslant\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&\leqslant\frac{f(x+t(x-x_0))-f(x_0)}{(1+t)(x-x_0)}(1+t);\\x<x_0:\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&\geqslant\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\&\geqslant\frac{f(x+t(x_0-x))-f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)}(1-t).\end{aligned}$$

先命 $x \to x_0+$, 再命 $x \to x_0-$ 得以下 4 组不等式:

$$D_+f(x_0) \leqslant D_+g(x_0) \leqslant D_+f(x_0)(1+t),$$
$$D^+f(x_0) \leqslant D^+g(x_0) \leqslant D^+f(x_0)(1+t),$$
$$D_-f(x_0) \leqslant D_-g(x_0) \leqslant D_+f(x_0)(1-t),$$
$$D^-f(x_0) \leqslant D^-g(x_0) \leqslant D^-f(x_0)(1-t).$$

命 $t \to 0$ 得 $D_\pm f(x_0) = D_\pm g(x_0)$ 且 $D^\pm f(x_0) = D^\pm g(x_0)$.

练习 11 (1) 当 $0 \leqslant y < 1$ 时, $\sin x = y$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个解, 因此 $\chi(y) = 2$. 当 $y = 1$ 时, $\sin x = y$ 在 $[0,\pi]$ 有一个解, 因此 $\chi(1) = 1$. 当 $y < 0$ 或 $y > 1$ 时, $\chi(y) = 0$. 于是

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(y)dy = \int_{[0,1)} 2dy = 2.$$

据定理 4 知 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 的全变差是 2.

(2) 函数 $t \mapsto \exp(\sqrt{-1}t)$ 与 $t \mapsto t$ 在 $[0,2\pi]$ 上有相同的全变差 2π.

(3) 函数 $t \mapsto \exp(\sqrt{-1}\sin t)$ 与 $\sin t$ 在 $[0,2\pi]$ 上有相同的全变差 2.

(4) 函数 ln 在 $[1,100]$ 的全变差是 $\ln 100 - \ln 1 = 2\ln 10$.

练习 12 必要性: 命 $g(x) = \bigvee_a^x f$ 即可. 充分性是显然的.

练习 13 设 $a < c < b$. 当 $a < x < c$ 且 $n \geqslant 1/(b-c)$ 时, 命 $f_n(x) = n(f(x+1/n)-f(x))$, 则在区间 (a,c) 上连续函数列 (f_n) 逼近 f'. 据 Lagrange 中值定理, (f_n) 一致有界. 据有界收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n(x)dx = \int_a^c f'(x)dx.$$

上式左边为 $f(c) - f(a)$. 最后命 $c \to b$ 即可.

练习 14 (1) 对于 $\varepsilon > 0$, 命 $t = c + \varepsilon$, 命 $r_n = 2^{-n}$. 作 E 的子集

$$E_n = \{x \in E : |z| < r_n \Rightarrow |g(x+z) - g(x)| \leqslant t|z|\}.$$

取 (a,b) 中覆盖 E_n 的开集 U_n 使 $|U_n|_1 < |E_n|_1^* + \varepsilon$.

将 U_n 的长度不小于 r_n 的构成区间平分多份并从 E 中去了可数个点 (这不影响 E 和 $g(E)$ 的外测度) 后, 可设 U_n 的每个构成区间 J 的长度 $|J|_1 < r_n$. 当 $x, y \in E_n \cap J$ 时, $|g(y) - g(x)| \leqslant t|J|_1$. 由此得下式

$$\begin{aligned}|g(E_n)|_1^* &\leqslant \sum_J |g(E_n \cap J)|_1^* \\ &\leqslant t\sum_J |J|_1 < t(|E_n|^* + \varepsilon).\end{aligned}$$

注意到 (E_n) 递增至 E 而 $(g(E_n))$ 递增至 $g(E)$, 据外测度的下连续性对上式取极限得 $|g(E)|_1^* \leqslant t(|E|_1^* + \varepsilon)$. 最后命 $\varepsilon \to 0$ 即可.

(2) 对于正整数 n, 作可测集 $E_n = E(n\varepsilon - \varepsilon \leqslant |g'| < n\varepsilon)$. 据 (1) 得

$$|g(E_n)|_1^* \leqslant n\varepsilon |E_n|_1 \leqslant \int_{E_n} |g'(t)| + \varepsilon |E_n|_1.$$

因为 $\{E_n\}$ 是 E 的可测划分而 $\{g(E_n)\}$ 覆盖 $g(E)$, 由上式得

$$|g(E)|_1^* \leqslant \int_E |g'(t)| dt + \varepsilon |E|_1.$$

最后命 $\varepsilon \to 0$ 即可.

练习 15 无妨设 f 是实值函数, f' 在 x_0 的左右极限都存在且有限. 当 $\varepsilon > 0$ 时, 取 $x_1 > x_0$ 使 $x_0 < z < x_1$ 时, $|f'(z) - f'(x_0+)| < \varepsilon$. 据中值定理, 当 $x_0 < x < x_1$ 时, 在 x_0 和 x 之间有个 z 使

$$f(x) - f(x_0) = f'(z)(x - x_0)$$
$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0+) \right| < \varepsilon.$$

可见 $f'(x_0) = f'(x_0+)$. 同样可得 $f'(x_0) = f'(x_0-)$.

练习 16 只证明必要性. 这源自下式: $u < x < v$ 时,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(v) - f(u)}{v - u} - f'(x) \right| \\ \leqslant &\left| \frac{f(v) - f(x)}{v - x} - f'(x) \right| \frac{v - x}{v - u} + \left| \frac{f(x) - f(u)}{x - u} - f'(x) \right| \frac{x - u}{v - u} \\ \leqslant &\left| \frac{f(v) - f(x)}{v - x} - f'(x) \right| + \left| \frac{f(x) - f(u)}{x - u} - f'(x) \right|. \end{aligned}$$

练习 17 只证明 (1). 将题中级数记为 $f(x)$. 取与 x 有关的唯一整数 c_n 使

$$c_n - \frac{1}{2} \leqslant b^n x < c_n + \frac{1}{2}.$$

命 $y_n = (c_n - 1)/b^n$ 及 $z_n = (c_n + 0.5)/b^n$, 记

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i (\cos b^i \pi z_n - \cos b^i \pi y_n),$$
$$R_n = \sum_{i=n}^{\infty} a^i (\cos b^i \pi z_n - \cos b^i \pi y_n).$$

显然 $y_n < x < z_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - y_n) = 0$. 当 $i \geqslant n$ 时, $\cos b^i\pi z_n = 0$ 且

$$\cos b^i\pi y_n = \cos b^{i-n}\pi(c_n - 1) = -(-1)^{c_n}$$
$$\Rightarrow R_n = \sum_{i\geqslant n} a^i(-1)^{c_n} = \frac{a^n(-1)^{c_n}}{1-a}.$$

据 $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|$ 得

$$\begin{aligned}|S_n| &\leqslant \sum_{i<n}(ab)^i\pi(z_n - y_n)\\ &= \frac{\pi(z_n - y_n)((ab)^n - 1)}{ab-1}\\ &< \frac{2(z_n - y_n)(a^nb^n - 1)}{3(a-1)},\end{aligned}$$

其中最后不等式源自 $ab - 1 > \dfrac{3}{2}\pi(1-a)$. 据上面的不等式得

$$\frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n} = \frac{2(-1)^{c_n}a^nb^n}{3(1-a)} + \theta_n\frac{2a^nb^n - 2}{3(1-a)},$$

其中 $|\theta_n| < \dfrac{\pi(1-a)}{2(ab-1)} < 1$. 命 $\xi_n = (c_n - 0.5)/b^n$ 和 $\eta_n = (c_n + 1)/b^n$, 则

$$\frac{f(\xi_n) - f(\eta_n)}{\xi_n - \eta_n} = \frac{2((-1)^{c_n}a^nb^n + \lambda_na^nb^n - \lambda_n)}{3(a-1)},$$

其中 $|\lambda_n| < \dfrac{\pi(1-a)}{2} < 1$. 如果有无限项 c_n 是偶数, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{f(y_n) - f(z_n)}{y_n - z_n} = +\infty,\ \varliminf_{n\to\infty}\frac{f(\xi_n) - f(\eta_n)}{\xi_n - \eta_n} = -\infty;$$

如果有无限项 c_n 是奇数, 则

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{f(y_n) - f(z_n)}{y_n - z_n} = -\infty,\ \varlimsup_{n\to\infty}\frac{f(\xi_n) - f(\eta_n)}{\xi_n - \eta_n} = +\infty.$$

总之 f 在 x 不可微.

练习 18 必要性: 对任何 $x \in I$, 由 $\Delta_f(z, x) \geqslant 0$ 取下极限得 $(\underline{D}f)(x) \geqslant 0$.

充分性: 否则, 有 $a, b \in I$ 使 $a < b$ 且 $f(a) > f(b)$. 取 $s > 0$ 使 $s(b-a) < f(a) - f(b)$. 命 $v(x) = f(x) + sx$ 及 $c = (a+b)/2$, 则 $v(b) < v(a)$. 当 $v(c) < v(a)$ 时, 命 $[a_1, b_1] = [a, c]$; 否则, 命 $[a_1, b_1] = [c, b]$.

这得 $v(b_1) < v(a_1)$. 如此下去, 得长度趋向零的闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$ 使 $v(b_n) < v(a_n)$. 取 $\{[a_n, b_n]\}$ 的公共交点 x_0. 如果 $v(b_n) < v(x_0)$, 命 $x_n = b_n$; 否则命 $x_n = a_n$. 这得逼近 x_0 的数列 (x_n) 使 $(v(x_n) - v(x_0))/(x_n - x_0) < 0$. 这与 $\underline{D}v \geqslant s$ 矛盾.

此时, 设 f 不严格递增, 则有 $a, b \in I$ 使 $a < b$ 且 $f(a) = f(b)$. 于是 f 在区间 $[a, b]$ 内是常数. 这样 $(\overline{D}f = 0)$ 含长度非零的区间 (a, b). 反之, 若 $(\overline{D}f = 0)$ 含一个长度非零的区间 (a, b), 则 $a < x < b$ 时,

$$0 \leqslant (\underline{D}f)(x) \leqslant (\overline{D}f)(x) = 0.$$

这得 $f'(x) = 0$. 于是 f 在 (a, b) 内是常数. 从而 f 不严格递增.

练习 19 任取包含 $f(E)$ 且构成区间 (c_i, d_i) 都与 $f(E)$ 相交的开集 V, 区间 $f^{-1}(c_i, d_i)$ 的左端点 a_i 和右端点 b_i 满足 $c_i \leqslant f(a_i+)$ 且 $f(b_i-) \leqslant d_i$. 于是

$$\begin{aligned}\int_E f'(t)dt &\leqslant \sum_i \int_{(a_i, b_i)} f'(t)dt \\ &\leqslant \sum_i (f(b_i-) - f(a_i+)) \leqslant |V|_1.\end{aligned}$$

据 Lebesgue 测度的正则性, 命 $|V|_1 \to |f(E)|_1$ 即可.

在 $E \subseteq (D_- f < +\infty)$ 时, 对于 $\varepsilon > 0$, 作 Borel 集

$$E_n = E(n\varepsilon - \varepsilon \leqslant D_- f < n\varepsilon).$$

集列 (E_n) 无交并为 E, 据 Dini 导数的性质得下式中第二不等式

$$\begin{aligned}|f(E)|_1 &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f(E_n)|_1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon |E_n|_1 \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} (D_- f(t) + \varepsilon)dt = \int_E f'(t)dt + \varepsilon |E|_1.\end{aligned}$$

最后命 $\varepsilon \to 0$ 并结合前面的不等式即可.

练习 20 否则, (a, b) 中有两点 x_1 和 x_2 使 $x_1 < x_2$ 且 $f(x_1) > f(x_2)$. 命 $d = (f(x_1) - f(x_2))/2$. 设 $0 < c(x_2 - x_1) < d$ 并命

$$g(x) = f(x_1) - f(x) - c(x - x_1).$$

算得 $g(x_1) = 0$ 且 $g(x_2) > d$, 从而 (x_1, x_2) 中有个点 z 使 $g(z) = d$. 此种 z 的上确界记为 ξ_c, 则 $g(\xi_c) = d$ 且 $\xi_c < \eta < x_2$ 时, $g(\eta) > g(\xi_c)$. 于是

$$0 \leqslant D_+ g(\xi_c) = -D^+ f(\xi_c) - c.$$

这样 $D^+f(\xi_c) \leqslant -c$, 从而 ξ_c 在 $(D^+f<0)$ 中.

不同的 c 对应不同的 ξ_c. 为此设 $\xi_{c_1}=\xi_{c_2}$, 则 $c_1=c_2$ 源自下两式:

$$f(x_1)-f(\xi_{c_1})-c_1(\xi_{c_1}-x_1)=d,$$
$$f(x_1)-f(\xi_{c_2})-c_2(\xi_{c_2}-x_1)=d.$$

这样 $(D^+f<0)$ 包含一个连续统 $\{\xi_c|0<c<d/(x_2-x_1)\}$, 矛盾.

为证后一个结论，命 $f(x)=-h(-x)$, 这得连续函数 $f:(-b,-a)\to\mathbb{R}$ 使 $(D^+f)(x)=(D^-h)(-x)$. 于是 $(D^+f<0)$ 不具连续势，从而 f 递增. 这即 h 递增.

练习 21 命 $g(x)=f(x)-px$, 则 $D^+g=D^+f-p\geqslant 0$. 据练习 20 知 g 是递增函数. 这样 $g(x)\leqslant g(x')$, 此即 $px'-px\leqslant f(x')-f(x)$.

同样从 $f(x)-qx$ 的递减性得 $qx'-qx\geqslant f(x')-f(x)$.

练习 22 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$D^+f(x_0)-\varepsilon<D^+f(x)<D^+f(x_0)+\varepsilon.$$

据练习 21 知 $|D^{\pm}_{\pm}f(x_0)-D^+f(x_0)|\leqslant\varepsilon$. 可见 $D^{\pm}_{\pm}f(x_0)=D^+f(x_0)$.

练习 23 结论源自 Denjoy-Young-Saks 定理.

练习 24 先设 $(D^+f\neq 0)$ 不具有连续势. 若 f 不为常数，则有 c 使

$$p:=f(c)-f(a)\neq 0.$$

可设 $p>0$. 当 $0<q<p$ 及 $0<k<(p-q)/(c-a)$ 时，作连续函数

$$h_k(x)=f(x)-f(a)-k(x-a).$$

因为 $h_k(a)=0$ 且 $h_k(c)>q$, 据 h_k 的连续性得 z_k 使 $h_k(z_k)=q$ 且当 $z>z_k$ 时， $h_k(z)>q$. 于是 $(D^+h_k)(z_k)\geqslant 0$. 此即 $(D^+f)(z_k)\geqslant k$.

当 $z_{k_0}=z_k=z$ 时， $h_k(z)=q=h_{k_0}(z)$. 这得 $(k-k_0)(z-a)=0$. 于是 $k=k_0$. 因为 k 在一个区间内变化，这样的 z_k 全体具有连续势. 矛盾. 从而 f 是常数函数.

设 $(D_+f\neq 0)$ 不具有连续势，这相当于 $(D^+(-f)\neq 0)$ 不具有连续势. 由以上结论知 $-f$ 是常数函数. 设 $(D^-f\neq 0)$ 不具有连续势，这相当于 $(D^+g\neq 0)$ 不具有连续势，其中 $g(x)=f(-x)$. 由上面结论知 g 是常数函数. 设 $(D_-f\neq 0)$ 不具有连续势，这相当于 $(D^+h\neq 0)$ 不具有连续势，其中 $h(x)=-f(-x)$. 由上面结论知 h 是常数函数.

总之，在每一种情形下， f 都是常数函数.

练习 25 当 $a \leqslant x_0 < b$ 且 $\varepsilon > 0$ 时，取 $\delta > 0$ 使 $0 < x - x_0 < \delta$ 时

$$D_+ f(x_0) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < D^+ f(x_0) + \varepsilon.$$

这样 $\varliminf\limits_{x \to x_0+} f(x) \geqslant f(x_0)$ 且 $\varlimsup\limits_{x \to x_0+} f(x) \leqslant f(x_0)$. 于是 f 在 x_0 右连续. 同样当 $a < x_0 \leqslant b$ 时，f 在 x_0 左连续.

练习 26 只证明充分性: 取常数 c 使 $|D^{\pm}_{\pm} f| \leqslant c$. 据练习 25 知 f 连续. 据练习 21 知 $x < z$ 时，$|f(z) - f(x)| \leqslant c|z - x|$. 因此 f 是 Lipschtiz 函数.

练习 27 仅证明充分性: 当 $a \leqslant x_0 < b$ 时，任取正整数 n. 设

$$\frac{\delta}{n+1} \leqslant x - x_0 < \frac{\delta}{n}.$$

这即 $n(x - x_0) < \delta$, 从而 $n|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 可见若命 $c = \varepsilon/\delta$, 则

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{x - x_0} < \frac{\varepsilon}{n(x - x_0)} \leqslant \frac{(n+1)c}{n}.$$

先命 $x \to x_0+$, 再命 $n \to \infty$ 得 $|D^+_+ f(x_0)| \leqslant c$. 同样当 $a < x_0 \leqslant b$ 时，$|D^-_- f(x_0)| \leqslant c$. 据练习 26 知 f 是 Lipschtiz 函数.

§4.2 绝对连续函数

练习 1 当 f 有界变差时，$f(0+)$ 存在. 这表明 $a > 0$, 此时 f 连续 (从而 f 的全变差函数也连续). 当 $0 < a < 1$ 时，f 在 $[a, 1]$ 上连续可微 (从而在 $[a, 1]$ 上绝对连续). 于是

$$\bigvee_0^1 f = \sup_{0<a<1} \bigvee_a^1 f = \sup_{0<a<1} \int_a^1 |f'(x)| dx.$$

因为 $f'(x) = tx^{t-1} \sin(1/x) - x^{t-2} \cos(1/x)$ 且函数 $x \mapsto tx^{t-1} \sin(1/x)$ 在 $(0, 1]$ 上关于 Lebesgue 测度可积，所以 f' 可积当且仅当 $x \mapsto x^{t-2} \cos(1/x)$ 在 $(0, 1]$ 上可积当且仅当 $t - 2 > -1$ 当且仅当 $t > 1$. 这样 f 有界变差当且仅当 $t > 1$.

练习 2 命 $g(t) = t + \sqrt{-1} t \sin(1/t)$, 则 L 是 g 确定的参数曲线，其长度是 g 的全变差. 据练习 1 知 g 的虚部是无界变差函数，这样 L 不可求长.

练习 3 可设 f 递增. 当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, 据 §4.1 定理 8 得

$$\int_a^x f'(t)dt \leqslant f(x) - f(a),$$

$$\int_x^b f'(t)dt \leqslant f(b) - f(x).$$

上两式相加后得等式, 从而上面两个不等式都为等式. 于是 f 是其导函数的不定积分, 从而 f 绝对连续.

练习 4 据 Fubini 定理, $f' \doteq \sum\limits_{k\geqslant 1} f_k'$. 这个级数中的项都是非负的, 因此

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)dt &= \sum_{k\geqslant 1}\int_a^x f_k'(t)dt \\ &= \sum_{k\geqslant 1}(f_k(x) - f_k(a)) = f(x) - f(a).\end{aligned}$$

这表明 f 是其导函数的不定积分, 从而 f 绝对连续.

练习 5 提示: 取常数 c 恒使 $|g(x) - g(z)| \leqslant c|x - z|$. 考察下式

$$\sum |gf(b_i) - gf(a_i)| \leqslant c\sum |f(b_i) - f(a_i)|.$$

练习 6 可设 f 是实值函数. 记 $c_i = b_i - a_i$ 而 $d_i = f(b_i) - f(a_i)$.

(1)⇒(2): 任取 I 的有限子集 F, 命 $F_\pm = \{i \in F | \pm d_i > 0\}$, 则

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in F_\pm}(b_i - a_i) < \delta \Rightarrow |\sum_{i\in F_\pm} d_i| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \sum_{i\in F}|d_i| = \sum_{i\in F_+} d_i - \sum_{i\in F_-} d_i < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

当 F 取遍 I 的有限子集后, $\sum\limits_{i\in I}|d_i| \leqslant 2\varepsilon$. 注意到 ε 的任意性即可.

(2)⇒(3): 紧集 $[a_i, b_i] \times [a_i, b_i]$ 上连续函数 $(x, x') \mapsto |f(x) - f(x')|$ 能取到最大值, 从而有 $a_i', b_i' \in [a_i, b_i]$ 使 $\omega_i = |f(b_i') - f(a_i')|$. 无妨设 $a_i' < b_i'$. 注意到 $\sum\limits_{i\in I}(b_i' - a_i') < \delta$, 结论得证.

(3)⇒(1) 与 (4)⇒(1) 是显然的.

(2)⇒(4): 取正整数 k 使 $k\delta - \delta \leqslant \sum\limits_{i=1}^n c_i < k\delta$. 将 $(a_i, b_i]$ 等分成 k 个子区间 $(a_{ij}, b_{ij}]$, $j = 1, \cdots, k$, 则

$$\sum_{i=1}^n |d_i| \leqslant \sum_{j=1}^k\sum_{i=1}^n |d_{ij}| < k\varepsilon.$$

最后注意到 $k \leqslant (1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\delta})$ 即可.

练习 7 易证 (1)⇔(2)⇔(3)⇒(4). (4)⇒(1): 当 $t>0$ 时, 命 $h_t(x)=f(x)+tx^2$. 于是 $(\underline{D}h_t)(x)=(\underline{D}f)(x)+2tx$ 且 $(\overline{D}h_t)(x)=(\overline{D}f)(x)+2tx$. 当 $x<y$ 时 $(\overline{D}h_t)(x)<(\underline{D}h_t)(y)$.

因为 $\lim\limits_{t\to 0}h_t=f$, 说明 h_t 都下凸即可. 否则, 有个 t 使 h_t 不下凸. 命 $g=h_t$, 则 I 中有四个点 a,b,c,d 使 $a_1<b\leqslant c<d$ 且

$$\frac{g(a)-g(b)}{a-b}>\frac{g(c)-g(d)}{c-d}.$$

取 a 和 b 的中点 u 并取 c 和 d 的中点 v, 则

$$\frac{g(a)-g(b)}{a-b}=\frac{g(a)-g(u)}{2(a-u)}+\frac{g(u)-g(b)}{2(u-b)},$$
$$\frac{g(c)-g(d)}{c-d}=\frac{g(c)-g(v)}{2(c-v)}+\frac{g(v)-g(d)}{2(v-d)}.$$

因此 $\frac{g(a)-g(u)}{a-u}>\frac{g(c)-g(v)}{c-v}$(此时置 $[a_1,b_1]=[a,u]$ 且 $[c_1,d_1]=[c,v]$); 否则, $\frac{g(u)-g(b)}{u-b}>\frac{g(v)-g(d)}{v-d}$(此时置 $[a_1,b_1]=[a,u]$ 且 $[c_1,d_1]=[v,d]$). 于是得 $[a,b]$ 的半区间 $[a_1,b_1]$ 和 $[c,d]$ 的半区间 $[c_1,d_1]$ 使 $b_1<c_1$ 且

$$\frac{g(a_1)-g(b_1)}{a_1-b_1}>\frac{g(c_1)-g(d_1)}{c_1-d_1}.$$

如此下去得长度趋向 0 的闭区间套 $[a_n,b_n]:n\geqslant 1$ 和 $[c_n,d_n]:n\geqslant 1$ 恒使

$$\frac{g(a_n)-g(b_n)}{a_n-b_n}>\frac{g(c_n)-g(d_n)}{c_n-d_n}.$$

取 $[a_n,b_n]$ 的公区交点 x_0 和 $[c_n,d_n]$ 的公共交点 y_0, 则 $x_0\leqslant b_1<c_1\leqslant y_0$. 上式中 $n\to\infty$ 得 $(\overline{D}g)(x_0)\geqslant(\underline{D}g)(y_0)$. 矛盾.

练习 8 (1) 当 $x_1<x_2<x<x_3<x_4$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}\\ \leqslant&\frac{f(x_3)-f(x)}{x_3-x}\leqslant\frac{f(x_4)-f(x)}{x_4-x}.\end{aligned}$$

可见 $z\mapsto(f(z)-f(x))/(z-x)$ 在区间 (a,x) 内是有上界的递增函数而在 (x,b) 内是有下界的递增函数. 于是左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$ 都存在且有限. 在上式中命 $x_2\to x-$ 而 $x_3\to x+$ 得要证明的不等式.

(2) 设 $x<u<v<y$, 则下式中命 $u\to x+$ 而 $v\to y-$ 即可:

$$\begin{aligned}\frac{f(v)-f(x)}{v-x}&\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\\ \leqslant\frac{f(y)-f(v)}{y-v}&\leqslant\frac{f(y)-f(v)}{y-v}.\end{aligned}$$

(3) 命 $D=\{x|f'_-(x)<f'_+(x)\}$ 及 $h(x)=(f'_-(x),f'_+(x))$. 据练习 7 知 $h(x):x\in D$ 是相互不交且长度非零的开区间, 它们有可数个. 这样 D 可数.

练习 9 易证 (1)⇔(2)⇔(3). (1)⇒(4): 否则有 $a<b$ 使 $(\overline{D}f)(a)\geqslant(\underline{D}f)(b)$. 据练习 7 知 $(\overline{D}f)(a)=(\underline{D}f)(b)$. 当 $a<x<b$ 时, 据练习 8 知

$$-\infty<(\overline{D}f)(a)\leqslant(\underline{D}f)(x)\leqslant(\overline{D}f)(x)\leqslant(\underline{D}f)(b)<+\infty.$$

这样 f 在 (a,b) 内可导且导数是个常数 c. 于是有常数 d 使 $a<x<b$ 时, $f(x)=cx+d$. 这样 f 不严格下凸, 矛盾.

(4)⇒(1): 据练习 7 知 f 下凸. 若 f 不严格下凸, 则有 $a<b<c$ 使

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$$

据练习 8 知在区间 (a,c) 内 f' 是常数函数, 与条件矛盾.

练习 10 先写出上凸函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 的以下 4 个等价条件:

(1) f 是上凸函数: 当 $0\leqslant s\leqslant1$ 且 $x,y\in X$ 时,

$$f(sx+(1-s)y)\geqslant sf(x)+(1-s)f(y).$$

(2) $x_i\in X$ 且 $t_i\geqslant0$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{n}t_i=1$ 时,

$$f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)\geqslant t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n).$$

(3) x_1,x_2,x_3 是 X 中依小到大排列的三个数时,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

(4) x 和 y 是 X 中两点且 $x<y$ 时, $(\overline{D}f)(y)\leqslant(\underline{D}f)(x)$.

再写出上凸函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 的以下 3 个性质:

(5) f 在每点 $x \in (a,b)$ 的左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$ 都存在且

$$-\infty < f'_+(x) \leqslant f'_-(x) < +\infty.$$

(6) $a < x < y < b$ 时， $f'_-(y) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_-(x)$.

(7) f 的不可微点至多有可列个.

最后写出严格上凸函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 的以下 4 个等价条件：

(8) f 是严格下凸函数： $0 < s < 1$ 且 X 中数 x, y 互异时

$$f(sx + (1-s)y) > sf(x) + (1-s)f(y).$$

(9) $x_i \in X$ 且 $0 < t_i < 1$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$ 时，

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) > t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

(10) X 中三点 x_1, x_2, x_3 使 $x_1 < x_2 < x_3$ 时，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

(11) X 中两点 x 和 y 使 $x < y$ 时， $(\overline{D}f)(y) > (\underline{D}f)(x)$.

练习 11 设 c 是 f 的最小值点，则 f 在 $[c,b]$ 递增. 现在

$$c \leqslant x < y \leqslant s < b$$
$$\Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(b)-f(s)}{b-s}.$$

因此 f 在 $[c,s]$ 上满足 Lipschtiz 条件，从而在此区间上绝对连续. 据 f 在 $[a,c]$ 上的递减性和下凸性知 $a < r < c$ 时， f 在 $[r,c]$ 内绝对连续. 现在

$$\bigvee_c^s f = \int_c^s |f'(x)|dx, \bigvee_r^c f = \int_r^c |f'(x)|dx.$$

由 r 和 s 的任意性知 f 在 (a,b) 几乎处处可导. 上两式相加得

$$\bigvee_r^s f = \int_r^s |f'(x)|dx.$$

因为 f 是连续的有界变差函数，在上式中命 $r \to a$ 且 $s \to b$ 得

$$\bigvee_a^b f = \int_a^b |f'(x)|dx.$$

这样 f 是绝对连续的.

练习 12 当 $X=(a,b)$ 时, f 连续. 当 $X=[a,b]$ 时, f 可能不在 a 连续或不在 b 连续. 如命 $f(a)=f(b)=1$ 而 $a<x<b$ 时 $f(x)=0$, 则 f 是 $[a,b]$ 上不在端点连续的下凸函数.

练习 13 因为 f 连续, 据 §1.3 例 3 知 $|M|\leqslant\aleph$. 显然 $|M|\geqslant\aleph$.

练习 14 无妨设 f 是实函数且 $f(a)<f(b)$. 命 $\varepsilon=(f(b)-f(a))/2$ 及 $g(x)=\varepsilon x/(b-a)-f(x)$. 当 $a<x<b$ 使 $f'(x)=0$ 时 (此种 x 全体记为 E), 有 z 使 $x<z<b$ 且 $|f(z)-f(x)|<\varepsilon|z-x|/(b-a)$. 这得 $g(x)<g(z)$. 从而 x 是 g 的右控点. 据 §1.5 的 F. Riesz 引理得开集 V 使 $E\subseteq V\subseteq(a,b)$ 且 V 的构成区间 (a_i,b_i) 都满足 $g(a_i)\leqslant g(b_i)$, 这即 $f(b_i)-f(a_i)\leqslant\varepsilon(b_i-a_i)/(b-a)$.

由 $b-a=\sum(b_i-a_i)$ 知有 n 使 $b-a<\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)+\delta$, 无妨设 $a_1<\cdots<a_n$. 命 $b_0=a$ 而 $a_{n+1}=b$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}(a_i-b_{i-1})<\delta$. 于是

$$\begin{aligned}f(b)-f(a)&=\sum_{i=0}^{n+1}(f(a_i)-f(b_{i-1}))+\sum_{i=1}^{n}(f(b_i)-f(a_i))\\&<\sum_{i=0}^{n+1}(f(a_i)-f(b_{i-1}))+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)/(b-a).\end{aligned}$$

可见 $\sum\limits_{i=0}^{n+1}(f(a_i)-f(b_{i-1}))>\varepsilon$.

练习 15 对于 $\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使 $|y-x|<\delta$ 时, $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. 于是

$$0<r<\delta\Rightarrow\int_x^{x+r}\frac{|f(y)-f(x)|}{r}dy<\varepsilon.$$

练习 16 据 §4.1 定理 8, f' 可积. 据定理 4 知 f 绝对连续.

练习 17 因为闭集都是可列个紧集之并, 所以 F_σ 型集 E 都是可列个紧集之并. 这样 $f(E)$ 是可列个紧集之并.

练习 18 充分性: 取 F_σ- 型集 E_1 与 Lebesgue 零集 E_0 使 $E=E_1\cup E_0$. 这样 $f(E)=f(E_1)\cup f(E_0)$ 是一个 F_σ- 型集与 Lebesgue 零集之并.

必要性: 限制 $(f:E_0\to f(E_0))$ 是满射, $f(E_0)$ 的子集 F 都是 E_0 的某个子集的像. 这样 $f(E_0)$ 不含非 Lebesgue 可测集, 从而据 §2.2 性质 3(2) 知 Lebesgue 可测集 $f(E_0)$ 是 Lebesgue 零集.

练习 19 必要性：可设 E_0 不含 a 和不含 b. 命 ε 和 δ 同练习 6(3). 取开集 U 使 $E_0 \subseteq U \subseteq [a,b]$ 且 $|U|_1 < \delta$. 写 $U = \bigsqcup_i (a_i, b_i)$, 则

$$f(E_0) \subseteq \bigcup_i f(a_i, b_i) \subseteq \bigcup_i [u_i, v_i],$$

其中 u_i 和 v_i 分别是 f 在 $[a_i, b_i]$ 中的最小值与最大值. 由于 $v_i - u_i$ 为 f 在 (a_i, b_i) 上的振幅，据练习 6 得 $|f(E_0)|_1 \leqslant \sum_i \omega_i < \varepsilon$, 因此 $f(E_0)$ 是零集. 据练习 18 知 f 将 Lebesgue 可测集映为 Lebesgue 可测集.

当 E 满足要证的不等式时，称 E 满足性质 (A). 当 $E = (u, v]$ 时， $f(u, v]$ 是区间. 于是 $[u, v]$ 中有两点 u_0 和 v_0 使 $f(u_0)$ 和 $f(v_0)$ 分别是 $f(u, v]$ 的左右端点. 于是

$$|f(E)|_1 = |f(v_0) - f(u_0)| = |\int_{u_0}^{v_0} f'(t)dt| \leqslant \int_E |f'|(t)dt.$$

当 $E = \bigsqcup_i (u_i, v_i] \subseteq [a, b]$ 时,

$$|f(E)|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |f((u_i, v_i]| \leqslant \int_{u_i}^{v_i} |f'(t)|dt = \int_E f'(t)dt.$$

可见满足性质 (A) 的 Borel 集 E 全体 $\mathcal{M}$ 包含 $\{\{a\}, (u, v] | a \leqslant u \leqslant v \leqslant b\}$ 生成的环 $\mathcal{R}$. 任取 $\mathcal{M}$ 中单调序列 (E_n), 其极限记为 E. 在 (E_n) 递增时, $(f(E_n))$ 递增至 $f(E)$. 对 $f(E_n)|_1 \leqslant \int_{E_n} |f'|(t)dt$ 取极限：两边用测度的下连续性知 E 满足性质 (A); 在 (E_n) 递减时,

$$|f(E)|_1 \leqslant |f(E_n)|_1 \leqslant \int_{E_n} |f'|(t)dt.$$

对上式取极限，右边用测度的上连续性知 E 满足性质 (A).

据单调类定理知所有 Borel 集满足性质 (A). 而一般 Lebesgue 可测集 E 可写为一个 Borel 集 E_0 和一个 Lebesgue 零集 E_1 之并. 于是

$$|f(E)|_1 \leqslant |f(E_0)|_1 + |f(E_1)|_1 \leqslant \int_{E_0} |f'(t)|dt \leqslant \int_E |f'(t)|dt.$$

充分性：将 f 的可导点集记为 E, 则 $(a, b) \setminus E$ 是零集. 由条件和

$$f((a, b)) \setminus f(E) \subseteq f((a, b) \setminus E)$$

知上式左端是零集，所以 $|f((a,b))|_1 = |f(E)|_1$. 由 f 的连续性和 §4.1 练习 14 得

$$|f(b)-f(a)| \leqslant |f((a,b))|_1 \leqslant \int_E |f'(t)|dt = \int_a^b |f'(t)|dt.$$

对于 $[a,b]$ 的分点组 $x_0 < \cdots < x_n$, 以 (x_{i-1}, x_i) 代替上面的 (a,b) 得

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(t)|dt.$$

可见 $\bigvee_a^b f \leqslant \int_a^b |f'(t)|dt$. 据定理 1 知 f 绝对连续.

练习 20 必要性源自练习 19. 充分性: 任取 $[a,b]$ 中的零集 E, 命 $E_\infty = E(\overline{D}f = +\infty)$, 则 $f(E_\infty)$ 是零集. 命 $E_n = E(\overline{D}f \leqslant n)$. 据 §4.1 练习 14 知

$$|f(E_n)|_1 \leqslant \int_{E_n} f'(t)dt = 0.$$

从而 $f(E_n): n = 1, \cdots, \infty$ 之并 $f(E)$ 是零集. 据练习 19 知 f 绝对连续.

练习 21 因为 f 将零集映为零集, 去个零集后可设 E 是 Borel 集. 又去了零集 $E(D_-f = +\infty)$ 后可设 $E \subseteq (D_-f < +\infty)$. 最后应用 §4.1 练习 14 的结论即可.

练习 22 只证充分性: 如果 E 是 $[a,b]$ 的 Lebesgue 零集, 则 $f(E)$ 是 $[c,d]$ 中 Lebesgue 零集. 于是 $gf(E)$ 是 Lebesgue 零集. 据练习 19 知 gf 绝对连续.

练习 23 先证明 $(D_+h = -\infty)$ 是零集. 否则, 记 $J_0 = [a,b)$ 并取 J 的中点 c. 将 $[a,c)$ 和 $[c,b)$ 中第一个与 E 之交不为零集的区间记为 J_1. 同样 J_1 有一半子区间 J_2 使 $J_2 \cap E$ 不为零集. 如此下去得长度趋向 0 的区间套 (J_n) 使每个 $J_n \cap E$ 不为零集. 命 $t_n = |J_n \cap E|_1^*$, 则有包含 $J_n \cap E$ 的开集 U_n 使 $|U_n| < 2t_n$. 任取 $x \in J_n \cap E$, 则有区间 $[x,z) \subseteq U_n$ 使

$$\frac{h(z)-h(x)}{z-x} < -\frac{1}{t_n}. \tag{1}$$

据 Sierpinski 覆盖定理可得有限个这样相互不交的区间 $[x_{ni}, z_{ni}): i \in I_n$ 使

$$\Big|(J_n \cap E) \setminus \bigsqcup_{i \in I_n} (x_{ni}, z_{ni})\Big|_1^* < t_n/2.$$

由此得 $t_n/2 < \sum_{i\in I_n}(z_{ni}-x_{ni}) < 2t_n$. 在 (1) 式中将 z 换为 z_{ni} 而将 x 换为 x_{ni} 得

$$\sum_{i\in I_n}(h(z_{ni})-h(x_{ni})) < -\sum_{i\in I_n}\frac{z_{ni}-x_{ni}}{t_n} < -\frac{1}{2}.$$

因此 $\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i\in I_n}(h(z_{ni})-h(x_{ni})) \leqslant -\frac{1}{2}$, 与 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in I_n}(z_{ni}-x_{ni}) = 0$ 矛盾. 同样知 $(D_-h=-\infty)$ 是零集. 据 Denjoy-Young-Saks 导数定理知 h 几乎处处可微.

在 $h'\dot{\geqslant}0$ 时, 说明 $h(b)\geqslant h(a)$ 即可. 取零集 E 使 $x\in(a,b)\setminus E$ 时, $0\leqslant h'(x) < +\infty$. 于是有个长度非零的区间 $[x,z]$ 使

$$h(z)-h(x) > -\varepsilon(z-x).$$

据 Sierpinski 覆盖定理得有限个这样相互不交的区间 $[x_i,z_i) : i\in J$ 使

$$|((a,b)\setminus E)\setminus \bigsqcup_{i\in J}[x_i,z_i]|_1 < \delta.$$

因为 E 是零集且 $(a,b)\setminus\bigsqcup_{i\in J}[x_i,z_i]$ 由有限个相互不交的开区间组成, 所以

$$h(b)-h(a) > -\varepsilon-\varepsilon(b-a).$$

最后, 在上式中先命 $\delta\to 0$ 再命 $\varepsilon\to 0$ 即可.

练习 24 注意到 $-g$ 是下半绝对连续函数并用练习 23 的结论即可.

练习 25 因为 $h-g$ 是下半绝对连续函数且 $(h-g)'\dot{\geqslant}0$, 据练习 23 知 $h-g$ 是递增函数, 所以 $h(b)\geqslant g(b)$. 进而

$$0\leqslant h(x)-g(x)\leqslant h(b)-g(b).$$

必要性: 命 F 为 f 的 Lebesgue 不定积分使 $F(a)=0$, 则 F 是 f 的益积函数也是 f 的损积函数. 可见 $\sup_g g(b)=\inf_h h(b)=F(b)$.

充分性: 据上面分析可命 $P=\sup_g g=\inf_h h$. 因为 $P-g=\inf_h(h-g)$, 它是递增函数. 取 f 的损积函数列 (g_k) 和益积函数列 (h_k) 使

$$0\leqslant h_k(b)-g_k(b)\leqslant 2^{-k}.$$

记 $w_k=h_k-g_k$, 这是递增函数使 $w_k(a)=0$ 且 $w_k(b)<2^{-k}$. 级数 $\sum_k w_k$ 收敛, 据 Fubini 定理得 $\lim_{k\to\infty}w_k'\dot{=}0$. 因为 $g_k'\dot{\leqslant}f\dot{\leqslant}h_k'$, 可见 f 几乎处

处有限且 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k' \doteq f$. 递增函数项级数 $\sum\limits_k (P-g_k)$ 收敛, 据 Fubini 定理得 $\lim\limits_{k\to\infty}(P-g_k)' \doteq 0$. 可见 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k' \doteq P'$. 这样 $P' \doteq f$.

现在说明 P 绝对连续即可. 对于 $\varepsilon > 0$, 取 f 的损积函数 g 使 $P(b) < g(b)+\varepsilon$. 作递增函数 $F = P - g$. 任取有限个相互不交开区间 J_i, 则

$$\sum_i F[J_i] \leqslant F(b) - F(a) = F(b),$$

其中 $F[J_i]$ 表示 F 在 J_i 的两个端点的函数值的差. 因此

$$\sum_i P[J_i] < \sum_i g[J_i] + \varepsilon.$$

由此得 $\overline{\lim\limits_{\delta\to 0}} \sup\{\sum\limits_i P[J_i] : \sum\limits_i |J_i|_1 < \delta\} \leqslant \varepsilon$. 命 $\varepsilon \to 0$ 知 P 上是半绝对连续函数, 同样 P 是下半绝对连续函数. 总之, P 是绝对连续的.

练习 26 可设 $\varnothing \neq J \subseteq \mathbb{N}$ 使 $(\overline{D}g = +\infty) = \{x_i | i \in J\}$. 命

$$f_i(x) = \begin{cases} \max\{g(t) | x_i \leqslant t \leqslant x\} : x \geqslant x_i, \\ \min\{g(t) | x \leqslant t \leqslant x_i\} : x \leqslant x_i. \end{cases}$$

由此得连续的递增函数 $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$. 取 $[a,b]$ 中长度非零的子区间 $[a_i,b_i]$ 使 $f_i(b_i) - f_i(a_i) < 2^{-i}\varepsilon$ 并要求: 当 $x_i = a$ 时 $a_i = a$; 当 $x_i = b$ 时 $b_i = b$; 当 $a < x < b$ 时 $a_i < x < b_i$. 规定

$$h_i(x) = \begin{cases} 0, & a \leqslant x \leqslant a_i; \\ f_i(x) - f_i(a_i), & a_i \leqslant x_i \leqslant b_i; \\ f_i(b_i) - f_i(a_i), & b_i \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

由此得连续的递增函数 $h_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ 使 $h_i(a) = 0$ 且 $h_i(b) < 2^{-i}\varepsilon$.

作连续的递增函数 $h = \sum h_i$, 则 $h(a) = 0$ 且 $h(b) < \varepsilon$. 命 $g_1 = g - h$, 显然 $\overline{D}g_1 \leqslant \overline{D}g$. 当 x 不在 $\{x_i | i \in J\}$ 时, $(Dg_1)(x) < +\infty$ 源自下式

$$\overline{D}g_1 \leqslant \overline{D}g - \underline{D}h \leqslant \overline{D}g.$$

当 $a_i \leqslant x \leqslant b_i$ 且 $x \neq x_i$ 时, 由 $f_i(x_i) = g(x_i)$ 得

$$\begin{aligned} &\frac{g(x) - g(x_i)}{x - x_i} \leqslant \frac{f_i(x) - f_i(x_i)}{x - x_i} \\ \Rightarrow &\frac{(g(x) - h_i(x)) - (g(x_i) - h_i(x_i))}{x - x_i} \\ \leqslant &\frac{g(x) - g(x_i) - f_i(x) + f_i(x_i)}{x - x_i} \leqslant 0 \\ \Rightarrow &\overline{D}g_1(x_i) \leqslant \overline{D}(g - h_i)(x_i) \leqslant 0. \end{aligned}$$

仿练习 26 可得练习 27. 仿练习 28 可得练习 29.

练习 28 提示: 先以练习 26 中的 g_1 代替 g 后, 可设 $\overline{D}g < +\infty$. 作零集 $E = (\overline{D}g > f)$. 命 g_0 同 §4.1 例 3 而 $g_1 = g - g_0$ 即可.

练习 30 提示: 可设 $f \leqslant 1$, 考虑 $g(x) = x - a$ 即可.

练习 31 (1) 说明 $w(a) \leqslant w(b)$ 即可. 否则, 作集 $E = (\underline{D}w \leqslant 0)$. 因为 $w(E)$ 不具连续势, 所以差集 $(w(b), w(a)) \setminus w(E)$ 不空, 取其一点 c.

据 w 的连续性, 使 $w(x) \geqslant c$ 的 x 中的最大者 x_0 满足 $w(x_0) = c$ 且 $x_0 < x < b$ 时, $w(x) < c$. 这样 $\underline{D}w(x_0) \leqslant 0$. 这与 x_0 不在 E 中矛盾.

(2) 当 $r < c$ 时, 命 $w_r(x) = w(x) - rx$, 则 $(\underline{D}w_r \leqslant 0)$ 与 $(\underline{D}w \leqslant r)$ 相等, 从而它不具连续势. 据 (1) 知 w_r 是递增函数, 从而 $x_1 < x_2$ 时,

$$w(x_1) - rx_1 \leqslant w(x_2) - rx_2.$$

最后命 $r \to c-$ 即可.

练习 32 命 g_1 和 h_1 同练习 28 和练习 29, 记 $w = g_1 - h_1$, 则

$$\begin{aligned} &\overline{D}g_1 \leqslant f \leqslant \underline{D}h_1 \\ \Rightarrow &\underline{D}w \geqslant \underline{D}h_1 - \overline{D}g_1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

据练习 31(2) 知 w 是递增函数 (取 $c = 0$). 记 $v = g - h$, 则

$$0 \leqslant w - v < 2\varepsilon.$$

命 $\varepsilon \to 0$ 知 v 是递增函数.

练习 33 据练习 32 知 $F(b)$ 是有限数. 现在 $P(x)$ 的存在性源自下式

$$h(x) - g(x) \leqslant h(b) - g(b).$$

(1) 由 $P - g = \inf\limits_{h}(h - g)$ 知 $P - g$ 递增. 同样 $h - P$ 递增. 当 $\varepsilon > 0$ 时, 取 h 和 g 使 $h(b) - g(b) < \varepsilon$. 于是

$$0 \leqslant P - g \leqslant h - g < \varepsilon.$$

这样 F 可被连续函数任意一致的逼近, 它连续.

(2) 取 f 的下函数列 (g_k) 和上函数列 (h_k) 使 $h_k(b) - g_k(b) \leqslant 2^{-k}$. 记 $w_k = h_k - g_k$, 它是连续递增函数使 $w_k(a) = 0$ 且 $w_k(b) < 2^{-k}$. 于是递增函数项级数 $\sum\limits_k w_k$ 收敛, 据 Fubini 定理得 $\lim\limits_{k\to\infty} w_k' = 0$. 现在

$$\begin{aligned} &\overline{D}g_k \leqslant f \leqslant \underline{D}(g_k + w_k) \\ \leqslant &\overline{D}g_k + w_k' < +\infty. \end{aligned}$$

可见 $f \dot{<} +\infty$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{D}g_k \doteq f$. 同样 $f \dot{>} -\infty$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\underline{D}h_k \doteq f$. 递增函数项级数 $\sum\limits_k (P-g_k)$ 也收敛, 据 Fubini 定理得 $\lim\limits_{k\to\infty}(P-g_k)' \doteq 0$. 这样由 $g_k = P + (g_k - P)$ 得 $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{D}g_k \doteq \overline{D}P$. 类似可得 $\lim\limits_{k\to\infty}\underline{D}h_k \doteq \underline{D}P$.

综上可知 $\underline{D}P$ 和 $\overline{D}P$ 都与 f 几乎处处相等.

(3) 当 g 取遍 f 的下函数时, Rg 是 f 在 $[u,v]$ 上的下函数, 其中

$$(Rg)(x) = g(x) - g(u) \geqslant g(x) - P(u).$$

当 h 取遍 f 的上函数时, Rh 是 f 在 $[u,v]$ 上的上函数. 进而

$$\begin{aligned}\sup_g(g(v)-g(u)) &\geqslant \sup_g(g(v)-P(u)),\\ \inf_h(h(v)-h(u)) &\leqslant \inf_h(h(v)-P(u)).\end{aligned}$$

上两式右端都是 $P(v)-P(u)$, 这便是 f 在 $[u,v]$ 上的 Perron 积分.

练习 34 (1) 是显然的.

(2) 据练习 33, 可设 f_i 都有限. 当 g_i 取遍 f_i 的下函数而 h_i 取遍 f_i 的上函数时, g_1+g_2 是 f_1+f_2 的下函数且 h_1+h_2 是 f_1+f_2 的上函数. 在 $c_1=c_2=1$ 时的欲证等式源自下式

$$\begin{aligned}\sup_{g_1,g_2}(g_1+g_2) &= \sup_{g_1} g_1 + \sup_{g_2} g_2\\ &= \inf_{h_1} h_1 + \inf_{h_2} h_2 = \inf_{h_1,h_2}(h_1+h_2).\end{aligned}$$

在 $c>0$ 时, g 取遍 f 的下函数当且仅当 cg 取遍 cf 的下函数, 而 h 取遍 f 的上函数当且仅当 ch 取遍 cf 的上函数.

在 $c<0$ 时, g 取遍 f 的下函数当且仅当 cg 取遍 cf 的上函数, 而 h 取遍 f 的上函数当且仅当 ch 取遍 cf 的下函数.

(5) 命 $f_0 = f$. 对于正整数 n, 规定 $f_{\pm n} = \pm(n \wedge (\pm f))$. 以 L_i 记 f_i 的 Lebesgue 不定积分使 $L_i(a)=0$. 因为 $|f|$ 是诸 f_i 的控制可积函数, 据控制收敛定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} L_{\pm n} = L_0$. 对于 $\varepsilon > 0$, 取个 n 使

$$\begin{aligned}L_0(b)-\varepsilon < L_n(b) &\leqslant L_0(b),\\ L_0(b) \leqslant L_{-n}(b) &< L_0(b)+\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 $\overline{D}L_n \leqslant n$ 且 $\overline{D}L_n \doteq f_n \leqslant f$, 所以 L_n 是 f 的一个下函数. 类似地, 可知 L_{-n} 为 f 的一个上函数. 它们与 L_0 的差不过 ε.

(6) 据 (1) 和 (2) 可设 f 非负. 因为 0 为 f 的一个下函数, 所以 f 的个上函数 h 都递增. 由 $f \dot{\leqslant} h'$ 知 fLebesgue 可积.

(7) 可设 $a < c < b$ 时，f 在 $[a,c]$ 是 Riemann 可积的且其 Riemann 积分 $F(c)$ 使 $F(b) := \lim_{c \to b} F(c)$ 存在且有限. 现在 f 在 $[a,b)$ 几乎处处连续且 $[a,b)$ 中点 x 是 f 的连续点时 $F'(x) = f(x)$. 又 f 在 $[a,c]$ 有界，所以 $\overline{D}F$ 或 $\underline{D}F$ 不有限的点只能是 b. 这样 F 是 f 的上函数和下函数.

(8) 按定义，F 即是 f 的上函数也是 f 的下函数.

练习 35 可设 f 是实函数且 $f(a) = 0$, 则 f 既是 f' 的一般上函数又是其一般下函数. 因此 f 是 f' 的 Perron 不定积分：

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt.$$

因为 f' 是 Lebesgue 可积函数，上式也是 Lebesgue 积分. 因此 f 是 f' 的 Lebesgue 不定积分. 这样 f 绝对连续.

§4.3 带符号的测度

练习 1 (1) 将题中上确界记为 $b_\pm$, 则 $b_+ \leqslant \mu_+(E)$ 源自下式：

$$\mu(F) \leqslant \mu_+(F) \leqslant \mu_+(E).$$

取 μ 的 Hahn 分解 (A, B), 则 $\mu(E \cap A) \leqslant b_+$. 此即 $\mu_+(E) \leqslant b_+$.

(2) 将右边的上确界记为 $b_\pm$, 则 $b_+ \leqslant \mu_+(E)$ 源自 $\mu \leqslant \mu_+$ 及下式

$$\sum_{D \in \mathcal{D}} \mu(D) \vee 0 \leqslant \sum_{D \in \mathcal{D}} \mu_+(D) = \mu_+(E).$$

取 μ 的 Hahn 分解 (A, B), 命 $\mathcal{D} = \{E \cap A, E \cap B\}$, 则

$$\mu(E \cap A) \vee 0 + \mu(E \cap B) \vee 0 = \mu(E \cap A) = \mu_+(E).$$

于是 $b_+ \geqslant \mu_+(E)$. 从而 $b_+ = \mu_+(E)$. 类似得 $b_- = \mu_-(E)$.

练习 2 设 $|\mu_3|(E) = 0$, 则 $|\mu_2|(E) = 0$, 从而 $|\mu_1|(E) = 0$.

练习 3 据链式法则知 $d\mu = fgd\mu$ 且 $d\nu = fgd\nu$. 据 Radon-Nikodym 定理知 $fg \doteq 1$ (这几乎处处既可视为关于 $|\mu|$ 的，也可视为关于 $|\nu|$ 的).

练习 4 以 $\mathbf{m}(dx)$ 记 $[0, +\infty)$ 上的 Lebesgue 测度，则 $\mu(E) = 0$ 当且仅当 x 在 E 上关于 $\mathbf{m}$ 几乎处处为零 (请注意 $x \geqslant 0$) 当且仅当 $\mathbf{m}(E \setminus \{0\}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{m}(E) = 0$ 当且仅当 x^{-1} 在 E 上关于 $\mathbf{m}$ 几乎处处为零当且仅当 $\nu(E) = 0$. 可见 μ 和 ν 是等价测度.

由 $\mu(dx) = xdx$ 且 $\nu(dx) = dx/x$ 得 $dx = x\nu(dx) = \mu(dx)/x$. 从而 $\mu(dx) = xdx = x^2\nu(dx)$ 且 $\nu(dx) = \mu(dx)/x^2$.

练习 5 μ 关于 $|\cdot|_0$ 的 Radon-Nikodym 导数为 $f: n \mapsto n^2$:

$$\int_E n^2 |dn|_0 = \sum_{n\in E} \int_{\{n\}} n^2 |dn|_0$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \chi_E(n) |\{n\}|_0 = \mu(E).$$

练习 6 必要性: 取 X 的可测划分 A 使 $|\nu_1|(A) = 0$ 而 $|\nu_2|(X \setminus A) = 0$. 因为 $d|\nu_i| = |f_i| d\mu$, 所以 $|f_1|$ 在 A_1 上几乎处处为零而 $|f_2|$ 在 $X \setminus A$ 上几乎处处为零. 这样 $f_1 f_2$ 在 X 上几乎处处为零.

充分性: 除个 μ- 零集后, 可设 $f_1 f_2 = 0$. 命 $A = f_1^{-1}\{0\}$, 则 $X \setminus A \subseteq f_2^{-1} \setminus \{0\}$. 于是 $|\nu_1|(A) = 0$ 且 $|\nu_2|(X \setminus A) = 0$. 这样 μ_1 集中于 $X \setminus A$ 上而 ν_2 集中于 A 上.

练习 7 (1) 首先, $(\mu * \nu)(E)$ 有意义. 事实上,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mu|(dx) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x+y) |\nu|(dy)$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\mu|(dx) \|\nu\| = \|\mu\| \|\nu\| < +\infty.$$

从而据 (复值测度情形下的)Fubini 定理知定义 $(\mu * \nu)(E)$ 的积分是个复数.

其次, $\mu * \nu$ 是个复值测度. 事实上, 当 E 有 Borel 划分 $\{E_k\}$ 时,

$$\sum_k \int_{\mathbb{R}^n} |\mu|(dx) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_k}(x+y) |\nu|(dy)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\mu|(dx) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x+y) |\nu|(dy) < +\infty.$$

于是据 (复值测度情形下的) 逐项积分得

$$\sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_k}(x+y) \nu(dy)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx) \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x+y) \nu(dy).$$

这表明 $\mu * \nu$ 具有可列可加性, 从而 $\mu * \nu$ 是复值测度.

(2) 据逐项积分, 可设 f 是 Borel 集 E 的特征函数. 此时欲证明的等式正是定义 $(\mu * \nu)(E)$ 的等式.

练习 8 利用 Euler 公式和三角函数的和差化积公式得

$$|\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)-\exp(-2\pi\sqrt{-1}x'\cdot y)|=2|\sin\pi(x-x')\cdot y|.$$

记 $B_k=\{y\in\mathbb{R}^n:|y|\leqslant k\}$, 而 $\delta=|x-x'|$, 则

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}^n}(\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)-\exp(-2\pi\sqrt{-1}x'\cdot y))\mu(dy)\Big|\\ \leqslant&\int_{B_k}2|\sin\pi(x-x')\cdot y||\mu|(dy)+\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_k}2|\mu|(dy)\\ \leqslant&2\pi k\delta|\mu|(B_k)+2|\mu|(\mathbb{R}^n\setminus B_k),\end{aligned}$$

所以 $\overline{\lim\limits_{\delta\to0}}|\hat{\mu}(x)-\hat{\mu}(x')|\leqslant 2|\mu|(\mathbb{R}^n\setminus B_k)$. 因为 $(\mathbb{R}^n\setminus B_k)_{k=1}^{\infty}$ 递减至空集且 $|\mu|$ 是有限测度, 命 $k\to\infty$ 得 $\lim\limits_{\delta\to0}|\hat{\mu}(x)-\hat{\mu}(x')|=0$. 这表明 $\hat{\mu}$ 一致连续.

练习 9 按定义, Fourier 变换 $F_-(\mu*\nu)$ 在 x 处的值是

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)(\mu*\nu)(dy)\\ =&\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot(y+z))\mu(dy)\nu(dz)\\ =&\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)\mu(dy)\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot z)\nu(dz),\end{aligned}$$

其中上面第一个等式源自练习 7(2). 而最后一项正是 $(F_-\mu)(x)(F_-\nu)(x)$.

练习 10 取非负数列 (c_i) 和可测集列 (E_n) 使 $f=\sum\limits_i c_i\chi_{E_i}$. 因为

$$0\leqslant c_i\mu_0(E_i)=\lim_{n\to\infty}c_i\mu_n(E_i).$$

将级数视为一种积分, 对上式应用 Fatou 引理得

$$\sum_i c_i\mu_0(E_i)\leqslant\underline{\lim_n}\sum_i c_i\mu_n(E_i).$$

这即 $\int fd\mu_0\leqslant\underline{\lim}\int fd\mu_n$. 当 μ_n 递增到 μ 时, 用单调收敛定理即可.

练习 11 取 $\mu-\nu$ 的 Hahn 分解 $(A,X\setminus A)$, 则

$$\begin{aligned}&2|\mu(E)-\nu(E)|=|(\mu-\nu)(E)|+|(\mu-\nu)(X\setminus E)|\\ \leqslant&\|\mu-\nu\|=(\mu-\nu)(A)-(\mu-\nu)(X\setminus A)\\ =&2\mu(A)-2\nu(A)-1+1=2(\mu(A)-\nu(A)).\end{aligned}$$

练习 12 (1) 取非负数列 (c_n) 和可测集列 (E_n) 使 $f=\sum\limits_n c_n\chi_{E_n}$, 据非负可测函数关于测度的逐项积分得 $(Tf)(x)=\sum\limits_n c_nQ(x,E_n)$, 这是 x 的非负可测函数. 当 f 有界时, 取常数 c 使 $f\leqslant c$. 于是 $(Tf)(x)\leqslant cQ(x,X)=c$.

(2) 显然 $(T^*\mu)(E)\geqslant 0$ 且 $(T^*\mu)(\varnothing)=0$. 当 E 有可测划分 $\{E_k\}$ 时,

$$\int\limits_X Q(x,E)\mu(dx)=\int\sum_k Q(x,E_k)\mu(dx)=\sum_k\int\limits_X Q(x,E_k)\mu(dx).$$

由此得 $(T^*\mu)(E)=\sum\limits_k(T^*\mu)(E_k)$. 可见, $T^*\mu$ 是测度. 命 f 同上面, 则

$$\begin{aligned}&\int\limits_X f(y)(T^*\mu)(dy)=\sum_n c_n(T^*\mu)(E_n)=\sum_n c_n\int\limits_X Q(x,E_n)\mu(dx)\\&=\int\limits_X\sum_n c_nQ(x,E_n)\mu(dx)=\int\limits_X\mu(dx)\int\limits_X f(y)Q(x,dy).\end{aligned}$$

当 $\mu(X)=1$ 时, 则由 $Q(x,X)=1$ 知 $(T^*\mu)(X)=1$. 可见, 此时 $T^*\mu$ 为概率测度.

(3) 要证明的等式左边是 $\int\limits_X\mu(dx)\int\limits_X f(y)Q(x,dy)$, 而据 (2) 这也是右边.

(4) 任取 $x\in X$, 以 $\delta_x: E\mapsto\chi_E(x)$ 记 Dirac 测度, 则

$$f(x)=\int\limits_X f(y)\delta_x(dy)=\langle f,\delta_x\rangle.$$

因此 $\langle f,\delta_x\rangle=\langle g,\delta_x\rangle$ 表明 $f(x)=g(x)$.

(5) 任取可测集 E, 则 $\mu(E)=\langle\chi_E,\mu\rangle=\langle\chi_E,\nu\rangle=\nu(E)$.

练习 13 (1) 命 $\mu_x(dy)=Q_1(x,dy)$ 及 $f_E(y)=Q_2(y,E)$, 这得概率测度 μ_x 和非负可测函数 f_E 使

$$(Q_1*Q_2)(x,E)=(T_1f_E)(x)=(T_2\mu_x)^*(E).$$

据练习 12(1)-(2) 知, Q_1*Q_2 是转移函数. 据逐项积分, 可设 $f=\chi_E$. 于是要证明的等式两边就是定义 $(Q_1*Q_2)(x,E)$ 的等式.

(4) 是 (2) 的推论. (2) 据练习 12(2) 和以上 (1) 得

$$\begin{aligned}&((Q_1*Q_2)*Q_3)(x,E)\\&=\int Q_3(z,E)(Q_1*Q_2)(x,dz)\\&=\int\int Q_3(z,E)Q_2(y,dz)Q_1(x,dy)\\&=\int(Q_2*Q_3)(y,E)Q_1(x,dy)\\&=(Q_1*(Q_2*Q_3))(x,E)\end{aligned}$$

(3) 当 f 非负可测时,

$$\begin{aligned}(T_1T_2f)(x) &= \int\limits_X (T_2f)(y)Q_1(x,dy)\\ &=\int\limits_X\int\limits_X f(z)Q_2(y,dz)Q_1(x,dy)\\ &=\int\limits_X f(z)\int\limits_X Q_2(y,dz)Q_1(x,dy)\\ &=\int\limits_X f(z)(Q_1*Q_2)(x,dz).\end{aligned}$$

于是 Q_1*Q_2 对应 T_1T_2. 现在

$$\begin{aligned}\langle f,(T_1T_2)^*\mu\rangle &= \langle (T_1T_2)f,\mu\rangle\\ &=\langle T_2f,T_1^*\mu\rangle = \langle f,T_2^*T_1^*\mu\rangle.\end{aligned}$$

据练习 12(3) 知 $(T_1T_2)^*\mu = T_2^*T_1^*\mu$. 此即 $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.

练习 14 对于 $r>0$, 命 $s=r+\max\{|z|:z\in K\}$, 则

$$\begin{aligned}\int\limits_{|w|\leqslant r}\tilde{\mu}(w)|dw|_2 &= \int\limits_{|w|\leqslant r}|dw|_2\int\limits_K\frac{|\mu|(dz)}{|z-w|}\\ &\leqslant \int\limits_K|\mu|(dz)\int\limits_{|w-z|\leqslant s}\frac{|dw|_2}{|z-w|} = 2\pi s\|\mu\| < +\infty.\end{aligned}$$

练习 15 (1) 是显然的. 对 $F=(F\cap E)\sqcup(F\setminus E)$ 用有限可加性得 (2), 这蕴含 (3). 据 (2) 和归纳法可得 (1). (3) 是 (2) 的推论.

(4) 命 $E_0=\varnothing$, 则集列 $(E_i\setminus E_{i-1})_{i=1}^{\infty}$ 无交并为 E. 于是

$$\mu(E)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i\setminus E_{i-1})=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

(5) 对等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_k\setminus E_n)=\mu(E_k\setminus E)$ 用可减性即可.

(6) 可设 $\mu<+\infty$ 并命 $b=\sup\{\mu(E)|E\in\mathcal{S}\}$. 可设 $b>0$ 并取非空可测集列 (A_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=b$, 命 $A=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}A_n$ 及

$$\mathcal{F}_j=\{H_1\cap\cdots\cap H_j|H_k=A_k\text{或}A\setminus A_k\}\setminus\{\varnothing\}:j\geqslant 1.$$

据 §2.1 练习 24, $\mathcal{F}_j$ 中成员相互不交且 $A_n=\bigsqcup\{E\in\mathcal{F}_n|E\subseteq A_n\}$. 命

$$\mathcal{P}_n=\{E|\exists i\geqslant n:E\in\mathcal{F}_i(\mu\geqslant 0)\}.$$

当 $i \leqslant j$ 时，任取 $\mathcal{F}_i$ 中成员 E 和 $\mathcal{F}_j$ 中成员 F. 可取 $\mathcal{F}_i$ 中成员 E_1 使 $F \subseteq E_1$, 于是要么 $F \subseteq E$ 要么 $F \cap E = \varnothing$.

由此得结论： $\mathcal{F}_n(\mu \geqslant 0)$ 中成员都是 $\mathcal{P}_n$ 的极大成员； $\mathcal{P}_n$ 中极大成员相互不交； $\mathcal{P}_n$ 中每个成员含于某个极大成员中. 于是可命

$$B_n = \bigcup \mathcal{P}_n = \bigsqcup\{E \in \mathcal{P}_n | E\text{是极大成员}\}.$$

当 $n \leqslant l$ 时， $\mathcal{P}_n \supseteq \mathcal{P}_l$. 因此 (B_n) 是递减集列，其极限记为 X_+. 现在

$$\mu(A_n) \leqslant \sum(\mu(E) : E \in \mathcal{F}_n(\mu \geqslant 0)) \leqslant \mu(B_n).$$

在上式中取极限得 $b \leqslant \mu(X_+) \leqslant b$. 可见 $b = \mu(X_+)$. 任取可测集 E, 则

$$\mu(X_+) = \mu(X_+ \cap E) + \mu(X_+ \setminus E)$$

表明 $\mu(X_+ \cap E) \geqslant 0$. 命 $X_- = X \setminus X_+$, 则 $\mu(X_- \cap E) \leqslant 0$ 源自下式

$$\mu(X_+) + \mu(X_- \cap E) \leqslant \mu(X_+).$$

因为 $-\mu$ 有最大值，所以 μ 有最小值. 下面总设 (X_+, X_-) 是 μ 的 Hahn 分解.

(7) 与 (8) 中的上确界分别记为 b 和 c, 则 $c \leqslant b$. 又

$$\begin{aligned}\sum_{A \in \mathcal{D}} |\mu(A)| &= \sum_{A \in \mathcal{D}} |\mu(A \cap X_+) + \mu(A \cap X_-)| \\ &\leqslant \sum_{A \in \mathcal{D}} (\mu_+(A) + \mu_-(A)) = |\mu|(E),\end{aligned}$$

从而 $b \leqslant |\mu|(E)$. 又 $|\mu|(E) \leqslant c$ 源自下式

$$|\mu|(E) = |\mu(E \cap X_+)| + |\mu(E \cap X_-)|.$$

总之， $b = c = |\mu|(E)$.

(9) 源自练习 1(2) 的证明. 将 (10) 中的上确界记为 a. 因为

$$\begin{aligned}&|\mu(E_1) - \mu(E_2)| \\ \leqslant &|\mu(E_1)| + |\mu(E_2)| \\ \leqslant &|\mu|(E),\end{aligned}$$

所以 $a \leqslant |\mu|(E)$. 当 $\{A_i\}$ 是 E 的可测划分时，命

$$E_\pm = \bigsqcup\{A_i | \pm\mu(A_i) > 0\},$$

则

$$\sum |\mu(A_i)| = \mu(E_1) - \mu(E_2).$$

于是 $|\mu|(E) \leqslant a$.

练习 16 (2) 源自 (1). (1) 若 $G = E \sqcup F$, 当 $\{C_1, \cdots, C_n\}$ 取遍 G 的初等分解时, $\{C_1 \cap E, \cdots, C_n \cap E\}$ 取遍 E 关于 $\mathcal{R}$ 的有限划分而 $\{C_1 \cap F, \cdots, C_n \cap F\}$ 取遍 F 关于 $\mathcal{R}$ 的有限划分. 于是由

$$\sum_i |\mu(C_i)| \leqslant \sum_i |\mu(C_i \cap E)| + \sum_i |\mu(C_i \cap F)|$$

知 $|\mu|(G) \leqslant |\mu|(E) + |\mu|(F)$. 反向不等式源自 $\{C_i \cap E, C_i \cap F | i\}$ 是 G 关于 $\mathcal{R}$ 的有限划分. 其它结论的证明可仿练习 15 和练习 1 的证明.

练习 17 仿练习 16(1) 可得 $|\mu|$ 是容度. 注意到 $\operatorname{re}\mu$ 和 $\operatorname{im}\mu$ 是广义容度得

$$|\mu|(E) \leqslant |\operatorname{re}\mu|(E) + |\operatorname{im}\mu|(E) \leqslant 4 \sup_{F \subseteq E} |\mu(F)|.$$

练习 18 (1) 如果 f 还形如 $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i \chi_{F_i}$. 可设 E_i 和 F_j 都非空集. 取 M 中有限个相互不交的非空可测集 $G_k : k \leqslant l$ 使它们能初等分解每个 E_i 和 F_j. 对每个 k, 固定个 $x_k \in G_k$. 于是

$$\mu(E_i) = \sum_{G_k \subseteq E_i} \mu(G_k) = \sum_{k \leqslant l} \chi_{E_i}(x_k)\mu(G_k).$$

上式中 E_i 换为 F_j 可得 $\mu(F_j)$ 的表达式, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} a_i \mu(E_i) &= \sum_{k\leqslant l}\sum_{i\in I} a_i \chi_{E_i}(x_k)\mu(G_k) \\ &= \sum_{k\leqslant l}\sum_{j\in J} b_j \chi_{F_j}(x_k)\mu(G_k) = \sum_{j\leqslant n} b_j \mu(F_j).\end{aligned}$$

现说明 f 满足 (4). 将 f 写成 $\sum\limits_k c_k \chi_{G_k}$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\int_M f d\mu\right| &= \left|\sum c_k \mu(G_k)\right| \leqslant \sum_k |c_k| |\mu(G_k)| \\ &\leqslant \|f\| \sum_k |\mu(G_k)| \leqslant \|f\| \|\mu\|.\end{aligned}$$

显然简单函数关于容度的积分满足 (3).

(2) 因为 $\lim\limits_{n,k\to\infty} \|f_n - f_k\| = 0$ 且据上面的不等式知

$$\left|\int_M f_n d\mu - \int_M f_k d\mu\right| \leqslant \|f_n - f_k\| \|\mu\|,$$

所以 $(\int\limits_M f_n d\mu)$ 是基本数列. 如果 (g_n) 也是一致逼近 f 的简单函数列, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\int_M f_n d\mu - \int_M g_n d\mu\right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\| \|\mu\| = 0.$$

这表明 $\int\limits_M fd\mu$ 的定义合理. 现说明 f 满足 (4) 中不等式:

$$|\int\limits_M fd\mu| = \lim_{n\to\infty} |\int\limits_M f_n d\mu| \leqslant \lim_{n\to\infty} |f_n|\|\mu\| = \|f\|\|\mu\|.$$

(3) 是显然的. (5) 源自 (3) 和 (4).

练习 19 因为 $\nu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(E)$, 所以 ν 是有限可加的. 说明当可测集列 (E_k) 递减至空集时 $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(E_k) = 0$ 即可. 命 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$ 同 Vitali-Hahn-Saks 定理. 因为 $\lim\limits_{k\to\infty} |\mu|(E_k) = 0$, 取 l 使 $k \geqslant l$ 时 $|\mu|(E_k) < \delta$. 于是当 $n \geqslant 1$ 且 $k \geqslant l$ 时, $|\nu_n(E_k)| < \varepsilon$. 命 $n \to \infty$ 得 $|\nu(E_k)| < \varepsilon : k \geqslant l$.

练习 20 因为 $|\mu_n|$ 是有限测度, 可作个有限测度

$$\nu = \sum_n |\mu_n| \div 2^n(\|\mu_n\| + 1).$$

每个 μ_n 关于 ν 强绝对连续. 于是据练习 19 知 μ 是测度. 再据 Vitali-Hahn-Saks 定理知 (μ_n) 的可列可加性是一致.

练习 21 相对于 ν 的 σ- 有限集全体 $\mathcal{S}_1$ 是 σ- 环. 命 $c = \sup\{\mu(E)|E \in \mathcal{S}_1\}$, 于是 $\mathcal{S}_1$ 中有序列 (A_n) 使 $c = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. 命 $A = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$, 则 A 在 $\mathcal{S}_1$ 中使 $\mu(A) = c$. 任取 A^c 的可测子集 E 使 $\nu(E) < +\infty$, 则 $A \sqcup E$ 在 $\mathcal{S}_1$ 中. 于是 $\mu(E \sqcup A) = c$, 由此得 $\mu(E) = 0$. 从而 $\nu(E) = 0$. 可见 A 满足要求.

练习 23 命 $\nu = \mu_1 + \cdots + \mu_n$, 由此得全 [$\sigma$-] 有限测度 ν 恒使 $\mu_i \ll \nu$. 规定

$$(\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n})(E) = \int\limits_E \left(\frac{d\mu_1}{d\nu}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\nu}\right)^{t_n} d\nu.$$

由此得测度 $\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n}$, 其全 σ- 有限性源自 (1) 和下式

$$\begin{aligned}\int\limits_E \left(\frac{d\mu_1}{d\nu}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\nu}\right)^{t_n} d\nu &\leqslant \int\limits_E (t_1 \frac{d\mu_1}{d\nu} + \cdots + t_n \frac{d\mu_n}{d\nu}) d\nu \\ &= t_1 \int\limits_E d\mu_1 + \cdots + t_n \int\limits_E d\mu_n = t_1\mu_1(E) + \cdots + t_n\mu_n(E).\end{aligned}$$

由此得到了 (5). 作全 [σ-] 有限测度 $\rho = \lambda + \nu$, 则 $\lambda \ll \rho$ 且 $\nu \ll \rho$. 于是

$$\begin{aligned}\int\limits_E \left(\frac{d\mu_1}{d\lambda}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\lambda}\right)^{t_n} d\lambda &= \int\limits_E \left(\frac{d\mu_1}{d\lambda}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\lambda}\right)^{t_n} \frac{d\lambda}{d\rho} d\rho \\ = \int\limits_E \left(\frac{d\mu_1}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\rho}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\rho}\right)^{t_n} d\rho &= \int\limits_E \left(\frac{d\mu_1}{d\rho}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\rho}\right)^{t_n} d\rho.\end{aligned}$$

同样可得下式

$$\int\limits_E \left(\frac{d\mu_1}{d\nu}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\nu}\right)^{t_n} d\nu = \int\limits_E \left(\frac{d\mu_1}{d\rho}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\rho}\right)^{t_n} d\rho.$$

(3) 源自 (2). (4) 将题中下确界记为 c. 由 Hölder 不等式得

$$(\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n})(E) = \sum_{A\in\mathcal{D}} \int\limits_A \left(\frac{d\mu_1}{d\lambda}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\lambda}\right)^{t_n} d\lambda$$

$$\leqslant \sum_{A\in\mathcal{D}} \left(\int\limits_A \frac{d\mu_1}{d\lambda} d\lambda\right)^{t_1} \cdots \left(\int\limits_A \frac{d\mu_n}{d\lambda} d\lambda\right)^{t_n} = \sum_{A\in\mathcal{D}} \mu_1(A)^{t_1} \cdots \mu_n(A)^{t_n}.$$

这表明 $(\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n})(E) \leqslant c$. 现无妨设诸 $t_i > 0$ 并命 $\lambda = t_1\mu_1 + \cdots + t_n\mu_n$. 当 $a > 1$ 而 $k_1, \cdots, k_n$ 是整数时, 作可测集

$$E_{(k_1,\cdots,k_n)} = \bigcap_{i=1}^{n} E(a^{k_i-1} \leqslant (\frac{d\mu_i}{d\lambda})^{t_i} < a^{k_i}).$$

由此得 E 的可测划分 $\{E_k | k \in \mathbb{Z}^n\}$. 据 Hölder 不等式得

$$\sum_k \prod_i (\mu_i(E_k))^{t_i} = \sum_k \prod_i (\int\limits_{E_k} \frac{d\mu_i}{d\lambda} d\lambda)^{t_i} \leqslant \sum_k \prod_i (a^{\frac{k_i}{t_i}} \lambda(E_k))^{t_i}$$

$$= \sum_k a^n (\prod_i a^{k_i-1}) \lambda(E_k) \leqslant \sum_k a^n \int\limits_{E_k} \left(\frac{d\mu_1}{d\lambda}\right)^{t_1} \cdots \left(\frac{d\mu_n}{d\lambda}\right)^{t_n} d\lambda$$

$$= \sum_k a^n (\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n})(E_k) = a^n (\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n})(E).$$

最后命 $a \to 1$ 得 $c \leqslant (\mu_1^{t_1} \cdots \mu_n^{t_n})(E)$.

练习 24 必要性: 取可测集 A 使 $\mu_1(A) = 0$ 且 $\mu_2(A^c) = 0$, 于是

$$(\mu_1^{0.5}\mu_2^{0.5})(X) \leqslant \mu_1(A)^{0.5}\mu_2^{0.5}(A) + \mu_1(A^c)^{0.5}\mu_2(A^c)^{0.5} = 0.$$

充分性: 命 $E = X$ 而 $\{E_k | k \in \mathbb{Z}^2\}$ 同练习 23(4) 的答案, 则

$$\sum_k \mu_1(E_k))^{0.5}\mu_2(E_k)^{0.5} \leqslant \sqrt{\mu_1\mu_2}(X) = 0.$$

命 $J = \{k | \mu_1(E_k) = 0\}$, 则 $k \notin J$ 时 $\mu_2(E_k) = 0$. 命 $A = \bigcup\limits_{k\in J} E_k$. 由此得可测集 A 使 $\mu_1(A) = 0$ 而 $\mu_2(A^c) = 0$.

练习 25 对于非负可测函数 $f: X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$, 有

$$\int_{X\times Y} fd(\mu_1\times\nu_1)=\int_X \mu_1(dx)\int_Y f(x,y)\nu_1(dy)$$
$$=\int_X \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x)\mu_2(dx)\int_Y f(x,y)\frac{d\nu_1}{d\nu_2}(y)\nu_2(dy).$$

结论得证.

练习 26 如果 E 不包含测度任意有限大的可测集, 则存在非负实数 c 使 A 是 E 的可测子集时, $\mu(A)\leqslant c$ 或 $\mu(A)=+\infty$. 命

$$b=\sup\{\mu(A)|A\subseteq E:\mu(A)<+\infty\},$$

则 $b\leqslant c$. 取 E 的可测子集列 (A_n) 使 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\mu(A_n)=b$. 命

$$B_n=A_1\cup\cdots\cup A_n: n=1,2,\cdots,$$

则 $\mu(B_n)$ 有限. 于是 $\mu(B_n)\leqslant b$. 又 (B_n) 递增, 其极限记为 B, 从而 $\mu(B)=b$. 命 $F=E\setminus B$. 任取 F 的测度有限子集 A, 则 $\mu(A)=0$ 源自下式:

$$b\leqslant\mu(B\sqcup A)=\mu(B)+\mu(A)\leqslant b.$$

练习 27 提示: 任取 Lebesgue 可测集 E 使 $\mathbf{m}(E)>0$, 将 2.2 练习 6 的证明稍加修改可知 $\{\mathbf{m}(F)|F\subseteq E\}$ 是区间 $[0,\mathbf{m}(E)]$, 这样 E 不是原子.

练习 28 (1) 记 $b=\sum\limits_{i\in J}\mu(E\cap X_i)$. 当 F 是 J 的有限子集时,

$$\bigsqcup_{i\in F}(E\cap X_i)\subseteq E\Rightarrow\sum_{i\in F}\mu(E\cap X_i)\leqslant\mu(E).$$

上式关于 J 的所有有限子集 F 取上确界得 $b\leqslant\mu(E)$. 为证反向不等式可设 b 有限, 于是 J 有可数子集 J_0 使 $i\in J\setminus J_0$ 时, $\mu(E\cap X_i)=0$. 命

$$E_0=\bigcup\{E\cap X_i: i\in J\setminus J_0\}.$$

因为 E_0 与每个 $X_i(i\in J)$ 之交是个零集, 所以 $\mu(E_0)=0$. 注意到

$$E\setminus E_0=\bigcup_{i\in J_0}(E\cap X_i),$$

上式左边用测度的可减性而右边用测度的可列可加性得

$$\mu(E)=\sum_{i\in J_0}\mu(E\cap X_i)=\sum_{i\in J}\mu(E\cap X_i).$$

(2) 提示：命 $\mathcal{S}_0 = \{E \subseteq X | \forall i \in J : E \cap X_i \in \mathcal{S}\}$, 这是 X 上 σ- 环使 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_0$. 当 $E \in \mathcal{S}_0$ 时，命 $\hat{\mu}(E) = \sum\limits_{i \in J} \mu(E \cap X_i)$. 于是 $\hat{\mu}$ 是 $\mathcal{S}_0$ 上测度使 $\{X_i\}$ 是其一个完全分解. 据 (1) 知 $\hat{\mu}$ 是 μ 的测度延拓.

(3) 必要性源自限制保持可测性. 充分性：可设 f 是非负函数，于是

$$(f < b) = \bigcup\{(f < b) \cap X_i | i \in J\}.$$

因为 $(f < b) \cap X_i$ 是 X_i 的可测集，也是 X 的可测集，从而 $(f < b)$ 是可测集. 这样 f 是可测函数. 此时可设 f 是可测集 E 的特征函数，从而

$$\int_X f d\mu = \mu(E) = \sum_{i \in J} \mu(E \cap X_i) = \sum_{i \in J} \int_{X_i} f d\mu.$$

(4) 限制在 X_i 上后，μ 是有限的且 ν 关于 μ 绝对连续. 于是 X_i 上有可测函数 f_i 使 E 为可测集时，$\nu(E \cap X_i) = \int\limits_{E \cap X_i} f_i d\mu$. 所有 $f_i (i \in J)$ 粘成一个函数 f, 据 (3) 知 f 可测且

$$\nu(E) = \sum_{i \in J} \int_{X_i} \chi_E f d\mu = \int_E f d\mu.$$

§4.4 Lebesgue-Stieltjes 积分

练习 1 可设 g 在原点连续点. 当 $u < 0$ 时，$\mathbf{m}_g(x + (u, 0]) = \mathbf{m}_g(u, 0]$ 表明

$$g(x) - g(x + u) = g(0) - g(u).$$

可见，g 在 x 左连续. 由 x 的任意性知，g 是连续函数. 当 $v > 0$ 时，$\mathbf{m}_g(x + (0, v]) = \mathbf{m}_g(0, v]$ 表明 $g(x + v) - g(x) = g(v) - g(0)$. 总之，当 y 是非零实数时，

$$g(x + y) - g(x) = g(y) - g(0).$$

若命 $f(x) = g(x) - g(0)$, 则上式表明 $f(x + y) = f(x) + f(y)$. 由 f 的连续性得常数 a 恒使 $f(x) = ax$. 这样 $g(x) = ax + g(0)$.

练习 2 提示: 命 $\phi(x) = -x$ 及 $h(x) = -g(-x)$. 由此得双射 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使 $\phi([a, b)) = (-b, -a]$ 且 $g(b) - g(a) = h(-a) - h(-b)$. 应用 h 对 $\mathcal{R}_1$ 的结论即可 (见定理 1).

练习 3 取 X 的测度有限可测划分 $\{X_n\}$, 则实直线上有限 Borel 测度 $E \mapsto \mu(E \cap X_n)$ 为某个右连续的递增函数 $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 诱导：$\mathbf{m}_{g_n}(E) = \mu(E \cap X_n)$. 这样 $\mu(E) = \sum\limits_n \mu(E \cap X_n) = \sum\limits_n \mathbf{m}_{g_n}(E)$.

练习 4 当 $P: a = x_0 < \cdots < x_n = b$ 是分点组时,

$$|h(x_i) - h(x_{i-1})| = |\int_{[a,x_i]} fdg - \int_{[a,x_{i-1}]} fdg|$$

$$= |\int_{(x_{i-1},x_i]} fdg| \leqslant \int_{(x_{i-1},x_i]} |f||dg|.$$

可见 $V(h,P) \leqslant \int_{(a,b]} |f||dg|$. 这样 h 是有界变差函数.

练习 5 设 L_k 是由连续的有界变差函数 $h_k: [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$ 决定的曲线使

$$L = L_1 \cup \cdots \cup L_n.$$

记 $h_k = f_k + \sqrt{-1}g_k$. 直线 $x = c$ 与 L 有无限个交点当且仅当 $x = c$ 与某条 L_k 有无限个交点当且仅当有个 k 使 $\{t|f_k(t) = c\}$ 是无限集当且仅当某个 f_k 的指示函数 γ_k 满足 $\gamma_k(c) = +\infty$.

记 $E_k = (\gamma_k = +\infty)$, 据 §4.1 定理 4 知 E_k 是实直线上零集. 而 $E_1, \cdots, E_k$ 并为 E, 所以 E 是零集.

练习 6 用练习 5 中符号, 则 $E + n\delta, n \in \mathbb{Z}$ 并为一个零集 $E(\delta)$. 如果 a 不在 $E(\delta)$ 中, 则平行线组 $x = a + n\delta, n \in \mathbb{Z}$ 中任何一条与 L 的交点有限; 同样得个实数 b 使平行线组 $y = b + n\delta, n \in \mathbb{Z}$ 中任何一条与 L 的交点有限.

练习 7 据 f 的一致连续性, 对于 $\varepsilon > 0$, 存在 δ 使 $0 < \delta < 1$ 且当 $M \cup L$ 中两点 z_1 和 z_2 的距离小于 2δ 时, $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

命 $M_1, \cdots, M_n$ 同练习 6, 设 L_i 是 M_i 的正定向边界而 s_i 代表 L_i 的长度. 练习 6 中两组平行线所围的小正方形中有与 L 有交点的, 这种小正方形的个数记为 k 而 L 的长度记为 s. 因为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} L_i$ 是由 L 的弧段和数条直线段构成的, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i \leqslant l + 4k\delta$. 5 个相邻接小正方形中必有两个相距不小于 δ. 将 L 分为若干部分使各部分的长小于 δ, 则每一部分遇到的小正方形不过 4 个. 可见 $k \leqslant 4(l/\delta + 1)$, 于是 $s_1 + \cdots + s_n < 17s + 16$.

无妨设 $L_1, \cdots, L_m$ 都与 L 相交而 $L_{m+1}, \cdots, L_n$ 都与 L 无交. 当 $i \leqslant m$ 时, 固定个 $z_i \in L_i$. 这样据复变函数中的 Cauchy 定理知

$$\int_{L_i} f(z_i)dz = 0 : i \leqslant m; \int_{L_i} f(z)dz = 0 : i > m.$$

据此并注意到 $z \in L_i$ 与 z_i 距离小于 2δ, 得

$$|\int_L f(z)dz| = |\sum_{i\leqslant m}\int_{L_i} f(z)dz + \int_{i>m}\int_{L_i} f(z)dz|$$

$$= |\sum_{i\leqslant m}\int_{L_i} f(z) - f(z_i)dz| < \sum_{i=1}^{m} s_i\varepsilon.$$

注意到第二段最后的结论，命 $\varepsilon \to 0$ 即可.

练习 8 将 g_0 在 X 内部的不连续点全体记为 E. 命 $h_n = g_n - g_0$, 则 (h_n) 的全变差一致有界且在 $X \setminus E$ 点态逼近 0. 当 $f: X \to \mathbb{C}$ 有界连续时，命

$$\varphi(f) = \overline{\lim_{n\to\infty}} |\int f dh_n|.$$

在 X 是闭区间情形，记 $c = \sup\{\bigvee_X h_n | n \geqslant 1\}$. 任取 $\delta > 0$ 和 X 的分点组 $x_0 < \cdots < x_m$ 使 (x_i) 不在 E 中且 $\max_{i\leqslant m}|x_i - x_{i-1}| < \delta$, 则

$$|\int_X f dh_n| \leqslant |\int_{[x_0,x_1]} (f(x) - f(x_1))dh_n(x) + \int_{[x_0,x_1]} f(x_1)dh_n(x)|$$

$$+ \sum_{i>1} |\int_{(x_{i-1},x_i]} (f(x) - f(x_i))dh_n(x) + \int_{(x_{i-1},x_i]} f(x_i)dh_n(x)|$$

$$\leqslant c \sup_{|x-x'|\leqslant\delta} |f(x) - f(x')| + \sum_{i\geqslant 1} |f(x_i)||h_n(x_i) - h_n(x_{i-1})|.$$

先命 $n \to \infty$, 再据 f 的一致连续性命 $\delta \to 0$ 得 $\varphi(f) = 0$.

在一般情形，取子列后可设 $\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} |\int f dh_n|$. 据 Helly 选取原理，取子列后可设全变差函数列 $(\bigvee h_n)$ 逐点逼近 X 上一递增函数 h, 将 h 右连续化后仍记为 h. 适当增大 E 后可设 h_n 和 h 在每一点 $x \in X \setminus E$ 连续且

$$\lim_{n\to\infty} (|(\bigvee h_n)(x) - h(x)| + |h_n(x)|) = 0.$$

取递增至 X 的闭区间列 X_k 使 $\bigvee_X h = \sup_{k\geqslant 1} \bigvee_{X_k} h$ 且 X_k 的端点都不在 E 中. 重新记 $c = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, 于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\int_X f dh_n - \int_{X_k} f dh_n| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, c \int_{X_k^c} |dh_n|$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} c(\bigvee_X h_n - \bigvee_{X_k} h_n) = c(\bigvee_X h - \bigvee_{X_k} h).$$

因为 $\lim_{n\to\infty} \int_{X_k} f dh_n = 0$. 上式中命 $k \to \infty$ 得 $\varphi(f) = 0$.

练习 9 设 Y 是相对于 g 的 Lebesgue-Stieltjes 可测集. 如果 f 是 Y 上 Lebesgue-Stieltjes 可测函数且 $\delta > 0$, 则有含于 Y 中的闭集 E 使 $\mu_g(Y\backslash E) < \delta$ 且 f 限制在 E 上连续.

先设 g 是简单函数 $\alpha_1\chi_{X_1} + \cdots + \alpha_k\chi_{X_k}$, 其中 $\{X_i\}$ 是 Y 的 Lebesgue-Stieltjes 可测划分. 据正则性, 取闭集 E_i 使 $E_i \subsetneq X_i$ 且 $\mathbf{m}_g(X_i \setminus E_i) < \delta/k$. 作闭集 $E = E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_k$, 则 $E \subsetneq Y$ 且 $\mathbf{m}_g(Y \setminus E) < \delta$. 当 $x \in E$ 时, 可设 $x \in E_i$. 取 $r > 0$ 使 $j \neq i$ 时 $O(x,r) \cap E_j = \varnothing$. 当 $z \in E$ 且 $|z - x| < r$ 时, $g(z) = g(x)$. 这样 $g|_E$ 连续.

有界 Lebesgue-Stieltjes 可测函数 $g = f/(1 + |f|)$ 可被 Lebesgue-Stieltjes 简单函数列 (g_k) 一致逼近. 取 X 中闭集 E_k 使 $\mathbf{m}_g(X \setminus E_k) < \delta/2^k$ 并且 $g_k|_{E_k}$ 连续. 作闭集 $E = \bigcap\{E_k|k \geqslant 1\}$, 则 $E \subsetneq X$ 并且 $\mathbf{m}_g(X\setminus E) < \delta$. 因为 $(g_k|_E)$ 一致逼近 $g|_E$, 后者连续. 等式 $f = g/(1 - |g|)$ 表明 $f|_E$ 连续.

练习 10 将题中的 Lebesgue-Stieltjes 积分记为 I. 若 f 或 g 为常数, 则 $[a,b]$ 中任何点 x_0 满足要求. 下设 f 和 g 不为常数, 则 f 的不连续点有可数个而可数集为 $|dg|$ 的零集. 因此当 $a < x < b$ 时, 以 $f(x+)$ 代替 $f(x)$ 后 (不影响 I 的值), 可设 f 在 (a,b) 右连续. 据分部积分得

$$\int_a^b f dg = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g df.$$

取 g 的最小值 α 和最大值 β, 则

$$\alpha \leqslant \gamma = \int_a^b \frac{g(x)df(x)}{f(b) - f(a)} \leqslant \beta.$$

据介值定理 (即中间值定理), 有个 x_0 使 $g(x_0) = \gamma$. 此 x_0 满足要求.

为证第二个结论, 以 $f(a+)$ 代替 $f(a)$ 而 $f(b-)$ 代替 f 后 (不影响 I 的值), 可设 $f(a+) = f(a)$ 且 $f(b-) = f(b)$. 下说明可要求上面的 x_0 满足 $a < x_0 < b$.

(1) $\gamma = \alpha$. 如果 $(g = \alpha) = \{a\}$ 或 $(g = \alpha) = \{b\}$. 此时 $(g > \alpha) = (a,b]$ 或 $(g > \alpha) = [a,b)$ 为 $\mathbf{m}_f$ 的零集. 这即 $f(b) - f(a+) = 0$ 或 $f(b-) - f(a) = 0$. 从而 f 是常数函数, 矛盾. 这样 $(g = \alpha) \neq \{a\}$ 且 $(g = \alpha) \neq \{b\}$. 从而 $a < x_0 < b$.

(2) $\gamma = \beta$. 如果 $(g = \beta) = \{a\}$ 或 $(g = \beta) = \{b\}$. 此时 $(g < \beta) = (a,b]$ 或 $(g < \beta) = [a,b)$ 为 $\mathbf{m}_f$ 的零集. 同上得矛盾. 这样 $(g = \beta) \neq \{a\}$ 且 $(g = \beta) \neq \{b\}$. 从而 $a < x_0 < b$.

(3) $\alpha < \gamma < \beta$. 取 x_2 和 x_3 使 $g(x_2) = \alpha$ 和 $g(x_3) = \beta$. 无妨设 $x_2 < x_3$, 可要求 $x_2 < x_0 < x_3$. 自然有 $a < x_0 < b$.

练习 11 当 n 是非正整数时, $\theta(n-)=0$. 据例 1 得 $\mathbf{m}_\theta[n-1,n)=0$. 当 n 是非负整数时, $\theta(n)=1$, 据例 1 得 $\mathbf{m}_\theta(n,n+1]=0$. 因此 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 的子集 E 都是零集, 从而是 Lebesgue-Stieltjes 可测集. 因此 $\mathcal{L}_\theta=2^{\mathbb{R}}$. 因为

$$\mathbf{m}_\theta(\{0\})=\theta(0)-\theta(0-)=1-0=1,$$

所以 $\mathbf{m}_\theta(E)=\chi_E(0)$. 因此 $\mathbf{m}_\theta$ 是 $(\mathbb{R},2^{\mathbb{R}})$ 上的 Dirac 测度.

练习 12

$$\begin{aligned}
&\int_{(u,v]} h(x)dg(x)=\int_{(u,v]}(h(u)+h(x)-h(u))dg(x)\\
=&\int_{(u,v]} h(u)dg(x)+\int_{(u,v]}dg(x)\int_{(u,x]}dh(y)\\
=&\int_{(u,v]} h(u)dg(x)+\int_{(u,v]}dh(y)\int_{[y,v]}dg(x)\\
=&\int_{(u,v]} h(u)dg(x)+\int_{(u,v]}(g(v)-g(y-))dh(y)\\
=&h(u)(g(v)-g(u))+g(v)(h(v)-h(u))-\int_{(u,v]}g(y-)dh(y)\\
=&g(v)h(v)-g(u)h(u)-\int_{(u,v]}g(y-)dh(y).
\end{aligned}$$

§5.1 度 量 空 间

练习 1 当 $x\in A,y\in B,z\in C$ 时,

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)\leqslant\rho(A,B)+\rho(B,C).$$

于是 $\rho(A,C)\leqslant\rho(A,B)+\rho(B,C)$.

练习 2 d_X 是度量当且仅当 A 是单射且 d_Y 限制在子集 $\operatorname{ran}A$ 上是度量.

必要性: 设 $Ax=Ay$, 则 $d_X(x,y)=0$, 于是 $x=y$. 这说明 A 是单射. 如果 $d_Y(Ax,Ay)=0$, 同样 $d_X(x,y)=0$. 于是 $Ax=Ay$. 这说明 d_Y 在 $\operatorname{ran}A$ 满足分离性. 因此 d_Y 限制在 $\operatorname{ran}A$ 上是度量.

充分性: 设 $d_X(x,y)=0$, 则 $d_Y(Ax,Ay)=0$. 故 $Ax=Ay$, 即 $x=y$.

练习 3 命 $\tilde{d}=d/(1+d)$. 函数 $t\mapsto t/(1+t)$ 在 $t\geqslant 0$ 时严格递增, 因此

$$\begin{aligned}\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}&\leqslant\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}\\&\leqslant\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}.\end{aligned}$$

这表示 $\tilde{d}(x,z)\leqslant\tilde{d}(x,y)+\tilde{d}(y,z)$, 因此 $\tilde{d}$ 满足三角不等式. 显然 $\tilde{d}$ 满足对称性且 $\tilde{d}(x,x)=0$. 注意到 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $\tilde{d}(x,y)=0$, 这表明 d 是度量当且仅当 $\tilde{d}$ 是度量.

由 $\tilde{d}=d/(1+d)$ 且 $d=\tilde{d}/(1-\tilde{d})$ 知, $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{d}(x_n,x)=0$. 这表明 d 与 $\tilde{d}$ 诱导了相同的收敛性.

练习 4 首先 $d(f,g)\leqslant\int\limits_M 1d\mu=\mu(M)<+\infty$.

分离性: $d(f,g)=0$ 当且仅当 $|f-g|/(1+|f-g|)$ 几乎处处为零当且仅当 f 与 g 几乎处处相等当且仅当在 $L(M,\mu)$ 中 $f=g$.

对称性: $d(f,g)=d(g,f)$ 是显然的. 据练习 3 知

$$\frac{|f-h|}{1+|f-h|}\leqslant\frac{|f-g|}{1+|f-g|}+\frac{|g-h|}{1+|g-h|}.$$

上式在 M 上积分后得 $d(f,h)\leqslant d(f,g)+d(g,h)$, 这即三角不等式.

当 $\varepsilon>0$ 时, 由 $t\mapsto t/(1+t)$ 在 $t\geqslant 0$ 时的严格递增性知

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\geqslant\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Leftrightarrow|f(x)-g(x)|\geqslant\varepsilon.$$

命 $g_n=|f_n-f|/(1+|f_n-f|)$, 上式即 $(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)=(g_n\geqslant\varepsilon)$. 这表明 (f_n) 依测度收敛于 f 当且仅当 (g_n) 依测度逼近 0.

设 $\lim d(f_n,f)=0$, 由 Чебышев 不等式知 g_n 依测度逼近 0. 反之, 由有界收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_M g_n d\mu=0$, 这即 $\lim d(f_n,f)=0$.

练习 5 (1) 是显然的. (2) 命 $d_i(f,g)=|f(i)-g(i)|/(1+|f(i)-g(i)|)$. 据定理 1 知 $\lim\limits_{n\to\infty}d(f_n,f)=0$ 当且仅当每个 $\lim\limits_{n\to\infty}d_i(f_n,f)=0$ 当且仅当 (见练习 3) 每个 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n(i)-f(i)|=0$ 当且仅当 (f_n) 点态逼近 f. 此时, (f_n) 依测度逼近 f. 反之, 当 $k\in\mathbb{Z}_+$ 且 $\varepsilon>0$ 时, 取正整数 l 使 $n\geqslant l$ 时, $\mu(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)<2^{-k}$. 于是 k 不在 $(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)$ 中. 这样当 $n\geqslant l$ 时, $|f_n(k)-f(k)|<\varepsilon$. 因此 (f_n) 点态逼近 f.

练习 6 命 μ 是 2^X 上计数测度且 (f_n) 依测度逼近 f. 当 $\varepsilon > 0$ 时, 设 $n \geqslant l$ 使 $\mu(|f_n - f| \geqslant \varepsilon) < 1$. 这样 $(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)$ 是空集, 这即 $x \in X$ 时, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 从而 (f_n) 一致逼近 f. 反之结论是显然的.

练习 7 任取 $C^k[a,b]$ 的基本序列 (f_n). 当 $i = 0, 1, \cdots, k$ 时,

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n^{(i)}(x) - f_l^{(i)}(x)| \leqslant \|f_n - f_l\|.$$

这表明连续函数列 $(f_n^{(i)})_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛, 其极限 g_i 是个连续函数. 对下式

$$f_n^{(i-1)}(x) - f_n^{(i-1)}(a) = \int_a^x f_n^{(i)}(t)dt : 1 \leqslant i \leqslant k$$

取极限并注意到一致收敛性得

$$g_{i-1}(x) - g_{i-1}(a) = \int_a^x g_i(t)dt : a \leqslant x \leqslant b.$$

这表明 $g_i = g'_{i-1}$. 从而 g_0 是 k 阶连续可微函数. 命 $f = g_0$. 于是 $f \in C^k[a,b]$ 且 $(f_n^{(i)})$ 一致逼近 $f^{(i)} : i = 0, \cdots, k$. 这样 $\lim \|f_n - f\| = 0$.

练习 8 无妨设 $x \neq y$ 时, $d(x,y) \geqslant 1$. 任取 X 中基本序列 (x_n). 设 $n, l \geqslant m$ 时, $d(x_n, x_l) < 1$. 这导致 $x_n = x_l$. 于是 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_m$.

练习 9 易说明 $\|\cdot\|_p$ 满足齐次性与分离性. 次可加性:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p =& (\sum_{i \in J} \|P_i x + P_i y\|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{i \in J} (\|P_i x\| + \|P_i y\|)^p)^{\frac{1}{p}} \\ \leqslant& (\sum_{i \in J} \|P_i x\|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i \in J} \|P_i y\|^p)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p,\end{aligned}$$

其中第二个不等式源自级数形式的 Minkowski 不等式.

设 X 是完备的. 对于每个 i, 任取 X_i 的基本序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. 作 X 中序列 (x_n) 使 $P_i x_n = a_n$ 而 $j \neq i$ 时, $P_j x_n = 0$. 于是 $\|x_n - x_l\|_p = \|a_n - a_l\|$ 表明 (x_n) 是 X 中基本序列, 其极限记为 x, 则

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \|a_n - P_i x\| \leqslant \lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_p = 0.$$

这样, 每个 X_i 是完备的. 反之, 任取 X 中基本序列 (x_n), 则

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists m \geqslant 1, \forall n, l \geqslant m : \|x_n - x_l\|_p \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \\ \forall \text{有限子集} F \subseteq J : \sum_{i \in F} \|P_i x_n - P_i x_l\|^p \leqslant \varepsilon^p.\end{gathered}$$

因此 $(P_ix_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X_i 中基本序列, 其极限记为 a_i. 上式中命 $l\to\infty$ 得

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n\geqslant m,\forall\text{有限子集}F\subseteq J:\sum_{i\in F}\|P_ix_n-a_i\|^p\leqslant\varepsilon^p.$$

命 $x=(a_i)_{i\in J}$. 上面不等式关于 J 的所有有限子集 F 取上确界得

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n\geqslant m:\sum_{i\in J}\|P_ix_n-P_ix\|^p\leqslant\varepsilon^p.$$

这即 $\|x_n-x\|_p\leqslant\varepsilon$. 又 $x=x-x_n+x_n$ 表明 x 在 X 中且是 (x_n) 的极限.

练习 10 必要性: 任取 X_i 中基本序列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, 作 X 中序列 (x_n) 使 $P_ix_n=a_n$ 而 $j\neq i$ 时, $P_jx_n=0$. 等式

$$\|x_n-x_l\|_\infty=\|a_n-a_l\|$$

表明 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中基本序列, 其极限记为 x, 则

$$\|a_n-P_ix\|\leqslant\|x_n-x\|_\infty.$$

这表明 (a_n) 逼近 P_ix, 从而 X_i 完备.

充分性: 任取 X 中基本序列 (x_n), 则

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n,l\geqslant m,\forall i\in J:\|P_ix_n-P_ix_l\|\leqslant\varepsilon.$$

这样 $(P_ix_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X_i 中基本序列, 其极限记为 a_i. 在上式中命 $l\to\infty$ 得

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n\geqslant m,\forall i\in J:\|P_ix_n-a_i\|\leqslant\varepsilon.$$

记 $x=(a_i)_{i\in J}$. 上式即 $\|x_n-x\|_\infty\leqslant\varepsilon$. 这样 $x=x_n+(x-x_n)$ 表明 x 在 X 中且是 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的极限, 从而 X 完备.

练习 11 参见例 2 和例 3.

练习 12 仿数值测度的情形可得 (1).

(2) 对于可测集 E, 命 $b(E)=\sup\{\|\mu(F)\|:E\supseteq F\in\mathcal{S}\}$. 先证明 $b(E)$ 有限. 否则, E 有可测子集 F_1 使 $\|\mu(F_1)\|>1+2\|\mu(E)\|$, 从而

$$\|\mu(E\setminus F_1)\|=\|\mu(E)-\mu(F_1)\|>\|\mu(E)\|+1.$$

若 $b(F_1)=+\infty$, 命 $E_1=F_1$; 否则, $b(E\setminus F_1)=+\infty$, 命 $E_1=E\setminus F_1$. 由此得 E 的可测子集 E_1 使 $b(E_1)=+\infty$ 且 $\|\mu(E_1)\|>1$. 以 E_1 代替 E 并重复上面的过程得 E_1 的可测子集 E_2 使 $b(E_2)=+\infty$ 且 $\|\mu(E_2)\|>2$. 如此下

去得 E 的可测子集的递减序列 (E_n) 使恒有 $b(E_n)=+\infty$ 且 $\|\mu(E_n)\|>n$. 集列 (E_n) 交成可测集 E_0, 据 (1) 得以下矛盾式子

$$\|\mu(E_0)\|=\lim_{n\to\infty}\|\mu(E_n)\|=+\infty.$$

再证明 $\|\mu\|$ 有限. 否则有可测集列 (A_n) 使 $(\mu(A_n))$ 无界. 作可测集

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots,$$

则恒成立 $b(A)\geqslant\|\mu(A_n)\|$. 于是 $b(A)=+\infty$, 矛盾. 最后, $(\mathrm{vc}(M,X),\|\cdot\|)$ 作为 $(l^\infty(\mathcal{S},X),\|\cdot\|_\infty)$ 的线性子空间 (参考练习 11) 是赋范空间.

(3) 设 E 有可测划分 $\{E_k|k\geqslant 1\}$. 当 $1\leqslant k\leqslant n$ 且 $\mathcal{D}_k$ 是 E_k 的可测划分时, $\bigcup\limits_{k=1}^{n}\mathcal{D}_k\cup\{\bigcup\limits_{k>n}E_k\}$ 是 E 的可测划分. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{F\in\mathcal{D}_k}\|\mu(F)\|+\sum_{k>n}\|\mu(E_k)\|\leqslant|\mu|(E).$$

上式关于 $E_1,\cdots,E_n$ 的所有可测划分 $\mathcal{D}_1,\cdots,\mathcal{D}_n$ 取上确界得

$$\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|\leqslant|\mu|(E):n\geqslant 1.$$

命 $n\to\infty$ 得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\mu(E_k)|\leqslant|\mu|(E)$. 反向不等式源自以下分析: 任取 E 的可测划分 $\mathcal{D}$, 则 $\{F\cap E_k|F\in\mathcal{D}\}$ 是 E_k 的可测划分. 于是

$$\|\mu(F)\|=\|\sum_{k=1}^{\infty}\mu(F\cap E_k)\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|\mu(F\cap E_k)\|$$

$$\Rightarrow\sum_{F\in\mathcal{D}}\|\mu(F)\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{F\in\mathcal{D}}\|\mu(F\cap E_k)\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|\mu|(E_k).$$

(4) 任取 $\mathrm{ca}(M,X)$ 中基本序列 (μ_n), 则

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n,l\geqslant m,\forall\text{可测集 E}:|\mu_n-\mu_l|(E)\leqslant\varepsilon\Leftrightarrow$$

$$\forall\text{无交可测集列}(E_i)_{i=1}^{\infty},\forall k\geqslant 1:\sum_{i=1}^{k}\|\mu_n(E_i)-\mu_l(E_i)\|\leqslant\varepsilon.$$

可见当 E 是可测集时, $(\mu_n(E))_{n=1}^{\infty}$ 是基本序列, 其极限记为 $\mu(E)$. 现设 $\{E_i\}$ 是 E 的可测划分. 在上式中, 命 $l\to\infty$ 得

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n\geqslant m,\forall\text{无交序列}(E_i)_{i=1}^{\infty},\forall k\geqslant 1:$$

$$\sum_{i=1}^{k}\|\mu_n(E_i)-\mu(E_i)\|\leqslant\varepsilon\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\|\mu_n(E_i)-\mu(E_i)\|\leqslant\varepsilon.$$

可见 $\sum_{i=1}^{\infty}\|\mu(E_i)\|<\infty$, 级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ 收敛. 从上式得

$$\|\mu(E)-\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\|\leqslant\|\mu(E)-\mu_n(E)\|$$
$$+\|\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n(E_i)-\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\|\leqslant 2\varepsilon.$$

命 $\varepsilon\to 0$ 得 $\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$. 这样 μ 是向量值测度且

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n\geqslant m:\|\mu_n-\mu\|_{\mathrm{v}}\leqslant\varepsilon.$$

于是 $\mu=\mu_n-(\mu_n-\mu)$ 表明 μ 在 $\mathrm{ca}(M,X)$ 中且 $\lim_{n\to\infty}\|\mu_n-\mu\|_{\mathrm{v}}=0$.

练习 13 因为 $\|x_{n+1}-x_n\|=0.5\|x_n-x_{n-1}\|$, 从而 $\sum_{n\geqslant 0}\|x_n-x_{n+1}\|$ 收敛. 据 X 的完备性知 (x_n) 收敛，其极限记为 y. 现在

$$x_{n+1}+\frac{x_n}{2}=x_n+\frac{x_{n-1}}{2}=\cdots=x_1+\frac{x_0}{2},$$

命 $n\to\infty$ 得 $3y=2x_1+x_0$. 因此 $y=(a+2b)/3$.

练习 14 先证一个不等式：当 $t\geqslant 0$ 时，$(1+t)^p\leqslant 1+t^p$. 为此命 $f(t)=(1+t)^p-t^p$, 得连续函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 使 $t>0$ 时

$$f'(t)=p(1+t)^{p-1}-pt^{p-1}<0.$$

于是 f 是严格递减函数，从而 $f(t)<f(0)$. 此即 $(1+t)^p<1+t^p$.

当 $t_i>0$ 时，以 t_2/t_1 代替 t 得不等式

$$(t_1+t_2)^p\leqslant t_1^p+t_2^p.$$

上式在 $t_1=0$ 或 $t_2=0$ 时也成立.

(1) 明显 d_p 满足对称性与分离性. 现在

$$\int|f-g+g-h|^p$$
$$\leqslant\int(|f-g|^p+|g-h|^p).$$

因此 $d_p(f,h)\leqslant d_p(f,g)+d_p(g,h)$. 这特别地蕴含

$$\|f+g\|_p^p\leqslant\|f\|_p^p+\|g\|_p^p.$$

由此可见 $L^p(M,\mu)$ 是线性空间且 d 为其上一个度量.

任取 $L^p(M,\mu)$ 中基本序列 (f_n), 由 Чебышев 不等式得

$$\varepsilon^p\mu(|f_n-f_l|\geqslant\varepsilon)\leqslant d_p(f_n,f_l).$$

可见, (f_n) 是依测度基本序列, 其极限是个可测函数 f. 又

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n,l\geqslant m:\int|f_n-f_l|^p\leqslant\varepsilon.$$

据 F. Riesz 定理, (f_n) 有子列 (f_{k_n}) 几乎处处逼近 f. 在上式中, 以 k_l 代替 l 并命 $l\to\infty$, 据 Fatou 引理得

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n\geqslant m:\int|f_n-f|^p\leqslant\varepsilon.$$

可见 $\|f_n-f\|_p^p\leqslant\varepsilon$. 由 $f=f_n+(f-f_n)$ 知 f 在 $L^p(M,\mu)$ 中且是 (f_n) 的极限. 因此 $L^p(M,\mu)$ 是完备空间 (但请注意, 这不必是 Banach 空间).

(2) 可设 $M=\{0,1\}$ 而 μ 为计数测度. 命 $f(0)=0,f(1)=1$ 而 $g(0)=1,g(1)=0$. 算得 $d_p(f,0)=d_p(g,0)=1$ 而 $d_p(\dfrac{f+g}{2},0)=\sqrt{2}$. 可见 f,g 在 B 中但 $0.5(f+g)$ 不在 B 中.

练习 15 (1) 显然 $d(f,f)=0$ 且 $d(f,g)=d(g,f)$. 为证明三角不等式, 可设

$$d(f,g)+d(g,h)<1.$$

当 $a,b>0$ 使 $\mu(|f-g|\geqslant a)<a$ 且 $\mu(|g-h|\geqslant b)<b$ 时,

$$(|f-h|\geqslant a+b)\subseteq(|f-g|\geqslant a)\cup(|g-h|\geqslant b).$$

这样 $\mu(|f-h|\geqslant a+b)<a+b$. 此式对所有这种 a 和 b 取下确界得

$$d(f,h)\leqslant d(f,g)+d(g,h).$$

设 $d(f,h)=0$, 取递减正数列 (a_n) 使 $\lim a_n=0$ 且 $\mu(|f-h|\geqslant a_n)<a_n$. 因为当 $k\geqslant n$ 时 $(|f-h|\geqslant a_n)\subseteq(|f-h|\geqslant a_k)$, 所以

$$\mu(|f-h|\geqslant a_n)\leqslant\lim_{k\to\infty}a_k=0$$

$$\Rightarrow\mu(|f-h|>0)\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\mu(|f-h|\geqslant a_n)=0.$$

这表明在 $L(M,\mu)$ 中, $f=h$.

设 $\lim d(f_n,f)=0$. 设 $0<\varepsilon<1$, 取个 l 使 $n>l$ 时, $d(f_n,f)<\varepsilon$. 取有理数 a_n 使 $0<a_n<\varepsilon$ 且 $\mu(|f_n-f|\geqslant a_n)<a_n$. 这样

$$(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\subseteq(|f_n-f|\geqslant a_n).$$

由此得 $\mu(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon$. 据 §2.4 练习 28 知 (f_n) 依测度收敛于 f. 反之, 取个 l 使 $n>l$ 时, $\mu(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)<\varepsilon$. 由此得 $d(f_n,f)\leqslant\varepsilon$.

(2) $L(\mathbb{R},\mathbf{m})$ 上任何范数 $\|\cdot\|$ 不刻画依测度收敛. 为此作函数 $f(x)=x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f/n\|=0$ 而 (f/n) 不依测度逼近 0: 当 $\varepsilon>0$ 时,

$$\mathbf{m}(|f/n|\geqslant\varepsilon)=\mathbf{m}\{x:|x|\geqslant n\varepsilon\}=+\infty.$$

练习 16 按可和准则, 对任何 $\varepsilon > 0$, 取 J 的有限子集 F_0 使 J 的有限子集 F 与 F_0 不交时, $\|\sum_{i\in F} x_i\| < \varepsilon$. 当 I 的有限子集 E 与 $F_0 \cap I$ 不交时, E 也与 F_0 不交, 因此 $\|\sum_{i\in E} x_i\| < \varepsilon$. 按可和准则, $\sum_{i\in I} x_i$ 可和.

§5.2 度量拓扑

练习 1 将并为 S 的两个集合记为 S_1 与 S_2, 则 $S^\circ = S_1$. 为此先注意到 S_1 是开集, 得 $S_1 \subseteq S^\circ$. 其次, 当 $z \in S_2$ 时, 记 $z = |z|\exp(2\pi\theta\sqrt{-1})$, 则 θ 是有理数. 对任何 $r > 0$, 由 $t \mapsto |z|\exp(2\pi t\sqrt{-1})$ 的连续性, 可取无理数 t 使

$$||z|\exp(2\pi t\sqrt{-1}) - |z|\exp(2\pi\theta\sqrt{-1})| < r.$$

命 $w = |z|\exp(2\pi t\sqrt{-1})$, 则 $w \in O(z,r) \setminus S$. 因此 z 不是 S 的内点.

注意到 $\overline{S} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$ 且 $\overline{S_1} = \{z : |z| \leqslant 1\}$, 求出 $\overline{S_2}$ 即可. 命 $S_3 = \{z : 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$. 因为 $S_3 = \{z : |z| \leqslant 2\} \setminus \{z : |z| < 1\}$ 是一闭集与一开集之差, 所以 S_3 是闭集. 于是 $\overline{S_2} \subseteq S_3$.

任取 $z \in S_3$. 记 $z = r\exp(2\pi t\sqrt{-1})$, 则 $1 \leqslant r \leqslant 2$. 取逼近 r 的数列 (r_n) 使 $0 < r_n < 1$. 取逼近 t 的有理数列 (t_n). 命 $z = r_n\exp(2\pi t_n\sqrt{-1})$. 于是 (z_n) 是 S_2 中逼近 z 的点列. 这样 z 是 S_2 的接触点. 于是 $S_3 \subseteq \overline{S_2}$.

总之, $\overline{S} = \{z : |z| \leqslant 2\}$.

练习 2 (1) 首先, K 不含长度非零的区间. 其次, 在 $[0,1]$ 中以 0 和以 1 为中心的充分小的开球都形如 $[0,r)$ 和 $(1-r,1]$, 其中 $0 < r < 1$. 这样的区间不含于 K 中, 因此 0 和 1 都不是 K 的内点. 再次, 当 $0 < x < 1$ 时, 在 $[0,1]$ 中以 x 为中心的充分小的开球都形如 $(x-r, x+r)$, 其中 $0 < r < \min\{x, 1-x\}$. 这样的区间也不会含于 K 中, 因此 x 不会是 K 的内点. 最后总结知 K 在 $[0,1]$ 中的内部为空集.

(2) 因为 K 作为全空间是开集, 所以 K 相对于 K 的内部为 K.

练习 3 按定义 $\overline{\lim_{n\to\infty}} U_n = \bigcap_{n\geqslant 1}(\bigcup_{k\geqslant n} U_k)$. 注意到 $\bigcup_{k\geqslant n} U_k$ 是开集即可.

练习 4 注意到 $[0,1/2) = (-1,1/2) \cap A$ 及 $[1/2,1] \cap A = [1/2,1)$ 即可.

练习 5 提示: (1) 在 $0 < b - a < \pi/4$ 情形, 命 $c = (a+b)/2$ 且

$$r = |\exp(\sqrt{-1}c) - \exp(\sqrt{-1}a)|.$$

于是 $(a < b) = O(\exp(\sqrt{-1}c), r) \cap \mathbb{T}$, 其中 $O(\exp(\sqrt{-1}c), r)$ 是 $\mathbb{C}$ 中以 $\exp(\sqrt{-1}c)$ 为中心以 r 为半径的开圆盘, 从而 $(a < b)$ 是 $\mathbb{T}$ 中开集.

一般地可设 $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ 恒使 $c_i - c_{i-1} < \pi/8$, 于是

$$(a < b) = (c_0 < c_2) \cup (c_1 < c_3) \cup \cdots \cup (c_{n-2} < c_n).$$

(2) 对于 $z \in U$, 存在 $r > 0$ 使 $O(z, r) \cap \mathbb{T} \subseteq U$. 于是有 a, b 使

$$z \in (a < b) \subseteq O(z, r) \cap \mathbb{T}.$$

所有这种开弧 $(a < b)$ 的并为 U 中包含 z 的最大开弧 I_z, 则 $I_z : z \in U$ 是可数个相互不交的开弧 (当 I_{z_1} 和 I_{z_2} 相交时相等) 且其并为 U.

(3) 首先, $(0, 2\pi]$ 中的 Borel 集类是 $\{(a, b] | 0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi]\}$ 生成的 σ- 环而 $\mathbb{T}$ 中的 Borel 集类是 $\{(a < b) | a < b\}$ 生成的 σ- 环. 其次, f 是连续双射且 $(a, b] \subseteq (0, 2\pi]$ 时, $f(a, b] = (a < b) \cup \{\exp(\sqrt{-1}b)\}$ 是 $\mathbb{T}$ 中的 Borel 集, 从而 $(0, 2\pi]$ 中的所有 Borel 集 E 之像 $f(E)$ 是 $\mathbb{T}$ 的 Borel 集. 再次, 命 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ 使 $g(t) = \exp(\sqrt{-1}t)$, 则 g 是连续映射使 $f^{-1}(a < b) = g^{-1}(a < b) \cap (0, 2\pi]$, 这是 $(0, 2\pi]$ 中的 Borel 集. 于是 $\mathbb{T}$ 中的所有 Borel 集的原像都是 $(0, 2\pi]$ 中的 Borel 集. 总之, f 是 Borel 同构.

练习 6 提示: 命 $E_p = \mathbb{Q} + \sqrt{p}$, 其中 p 是素数.

练习 7 任取 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$, 记 $x = (x_1, \cdots, x_n)$. 对每个 i, 有个有理数 y_i 使 $|x_i - y_i| < r/n$. 命 $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$, 则

$$|x - y|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 < r^2.$$

可见 $O(x, r) \cap \mathbb{Q}^n$ 非空. 这样 x 是 $\mathbb{Q}^n$ 的接触点.

练习 8 命 e 是各项为 1 的数列, 则 $e \in l^\infty$, 但 e 不会是 l^0 的接触点. 为此任取 l^0 的点 $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$, 则

$$\|e - x\|_\infty \geqslant |1 - x_{n+1}| = 1.$$

这样 $O(e, 1) \cap l^0$ 是空集. 于是 e 不是 l^0 的接触点.

练习 9 如果 Y 可分, 则其子集 $f(X)$ 也可分. 于是 D 有可数集使 $f(D)$ 稠于 $f(X)$. 这样 D 也稠于 X, 矛盾.

练习 10 (1) 对于 $y\in l^\infty$, 命 $f_y(n)=y_n$, 在 $[n,n+1]$ 之间, f_y 是线性函数. 当 $x\leqslant 1$ 时, 命 $f_y(x)=f(1)$. 这样 $\{f_y|y\in l^\infty\}$ 是 $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ 的子集. 因为 $\|f_y-f_z\|=\|y-z\|_\infty$, 所以 $y\mapsto f_y$ 是 l^∞ 到 $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ 的等距映射. 据练习 9 知 $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R})$ 不可分.

(2) 当 $x\in l^\infty$ 时, 作函数 $Ax:(0,1]\to\mathbb{C}$ 使 $(Ax)(1/n)=x_n$ 且在区间 $[1/(n+1),1/n]$ 上 Ax 为线性函数. 于是 $\|Ax-Ay\|=\|x-y\|_\infty$. 这样 $C_b(0,1]$ 包含一个不可分的子集 $\operatorname{ran}A$, 从而 $C_b(0,1]$ 不可分.

练习 11 只证明 (1). 因为 $B=\{\ln(1+x^2)|x\in\mathbb{R}\}$, 所以对每个 $b\in B$ 有实数 x 使 $b=\ln(1+x^2)$. 取有理数列 (r_n) 逼近 x, 则 $\ln(1+r_n^2)$ 逼近 b. 这样 A 在 B 中稠密.

练习 12 (1) 如果 x 不是 S 的聚点, 则有 $r>0$ 使 $O(x,r)\setminus\{x\}$ 与 S 不交, 即 $O(x,r)\cap S\subseteq\{x\}$. 前者不空, 于是 $O(x,r)\cap S=\{x\}$.

(2) 当 $0<r<1$ 时, $O(0,r)\setminus\{0\}=(-r,0)\cup(0,r)$, 它与 $(0,1]$ 总有交点 $r/2$. 因此 0 是 (0,1] 的聚点.

练习 13 (1) 注意到 x 是 S 的聚点当且仅当 $r>0$ 时 $S\cap O(x,r)\setminus\{x\}\neq\varnothing$, 此时 $S\cap O(x,r)$ 不空, 从而 x 是 S 的接触点. 于是 $S'\subseteq\overline{S}$, 从而 $S\cup S'\subseteq\overline{S}$. 反之, 任取 S 的接触点 x, 则 $r>0$ 时 $O(x,r)\cap S\neq\varnothing$. 若 x 不在 S 中, 则左式为 $O(x,r)\cap S\setminus\{x\}\neq\varnothing$. 这样 x 是 S 的聚点. 于是 $\overline{S}\subseteq S\cup S'$.

注意到 x 不是 S 的聚点当且仅当存在 $r>0$ 使 $S\cap O(x,r)\setminus\{x\}=\varnothing$ 当且仅当存在 $r>0$ 使 $S\cap O(x,r)\subseteq\{x\}$. 此时当 $0<d(x,y)<r$ 时,

$$S\cap O(y,(r-d(x,y))\wedge d(x,y))=\varnothing.$$

于是 $O(x,r)\subseteq X\setminus S'$. 这样 $X\setminus S'$ 是开集, 从而 S' 是闭集且

$$X\setminus S'=\{x|\exists r>0:S\cap O(x,r)\subseteq\{x\}\}.$$

(2) 源自 (1).

(3) 任取 $S_1\cup S_2$ 的聚点 x. 如果 x 不是 S_1 的聚点, 则有 $r_0>0$ 使 $O(x,r_0)\cap S_1\subseteq\{x_0\}$. 当 $0<r<r_0$ 时,

$$\varnothing\neq O(x,r)\cap(S_1\cup S_2)\setminus\{x_0\}=O(x,r)\cap S_2\setminus\{x\}.$$

这样 x 是 S_2 的聚点, 从而 $(S_1\cup S_2)'\subseteq S_1'\cup S_2'$. 反向包含是显然的.

(4) 作空间 $\mathbb{R}$ 的点集 $A=\mathbb{Q}$ 和 $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 则 $A'=B'=\mathbb{R}$ 但 $A\cap B=\varnothing$. 命 $A_r=\{r\},r\in\mathbb{Q}$, 则 $A_r'=\varnothing$ 而 $(\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}}A_r)'=\mathbb{R}$.

练习 14 (1)⇒(2): 因为 S 的点 x 是 S 的接触点但非聚点, 据练习 12(1) 知 x 是 S 的孤立点.

(2)⇒(3): 任取 $x \in S$, 则有 $r > 0$ 使 $O(x,r) \cap S \setminus \{x\} = \varnothing$, 此即 $O(x,r) \cap S = \{x\}$, 从而 S 的单点子集都是开集. 这样 S 是离散空间.

(3)⇒(1): 任取 $x \in S$, 则有 $r > 0$ 使 $O(x,r) \cap S = \{x\}$, 这即 $O(x,r) \setminus \{x\}$ 与 S 不交, 从而 x 不是 S 的聚点. 于是 $S \cap S' = \varnothing$. 此时 S 的导集 $S' = \overline{S} \setminus S$. 于是 $S' \subseteq \overline{S} \setminus S^\circ = \partial S$.

练习 15 开区间 $(2^{-n-1}, 3 \cdot 2^{-n-1})$ 与 E 只交于 2^{-n} 一点, 所以 E 的点都是 E 的孤立点. 又 $O(n,1)$ 与 $\mathbb{Z}$ 只交于 n, 所以 $\mathbb{Z}$ 的点都是其孤立点.

练习 16 结论源自 $S^{(n+1)} \subseteq \overline{S^{(n)}} = S^{(n)}$.

(1) 作空间 $\mathbb{C}$ 中的可列子集 $S = \{\dfrac{p+\sqrt{-1}}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_+\}$. 任取 $x \in \mathbb{R}$, 则有有理数列 (p_n/q_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n/q_n) = x$. 于是 $x = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n+\sqrt{-1}}{q_n}$. 这样 $\mathbb{R} \subseteq S'$. 反之, 任取 S 的聚点 x, 则有 S 中的互异点组成的序列 $(\dfrac{p_n+\sqrt{-1}}{q_n})$ 逼近 x. 如果 (q_n) 有界, 则由 $(\dfrac{\sqrt{-1}}{q_n})$ 收敛知有个 k 使 $n \geqslant k$ 时, $q_n = q_k$. 同样有个 l 使 $n \geqslant l$ 时, $p_n = p_k$. 矛盾. 因此 (q_n) 无界, 取子列后可设 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$. 这样 x 是实数.

从而 $S' = \mathbb{R}$, 它与 S 无交. 于是 S 是孤立点集且其导集不可数.

(2) 当 n 是正整数时, 命 $E_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$ 及

$$S_n = \{2n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} | \forall i \leqslant n : k_i \in E_n\}.$$

它是 $(2n, 2n+1]$ 的子集且含 $2n+1$. 集列 (S_n) 的并记为 S.

任取 S 的聚点 x, 则有正整数 n 使 $i > n$ 时 $(x-1, x+1)$ 与 S_i 无交. 这样 x 是 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$ 的聚点, 从而是某个 S_i 的聚点. 由此得 $S' \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i'$, 反向包含是显然的. 归纳地可知, 任何正整数 q 都使 $S^{(q)} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n^{(q)}$.

任取 S_n 的聚点 x, 则 E_n 中有 n 个序列 $(k_{ij})_{j=1}^{\infty}$ 使序列 $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ 各项互异且极限为 x, 其中 $x_j = 2n + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{k_{ij}}$. 如果那 n 个序列都有界, 先多次取子列后可设它们都收敛, 再多次取子列后可设它们都是常值序列, 这与 (x_j) 各项互异矛盾. 于是那 n 个序列中至少一个无界. 注意到定义 x_j 的和式的对称

性, 可设 $i \geqslant p$ 时, i 对应的序列无界而 $i < p$ 时, i 对应的序列有界 (其中 $p = 1, \cdots, n$). 多次取子列后可设 $i \geqslant p$ 时, $\lim\limits_{j\to\infty} k_{ij} = +\infty$, 而 $i < p$ 时 $k_{ij} = k_i$. 于是 $x = 2n + \sum\limits_{i<p} \dfrac{1}{k_i}$. 又这种形式的 x 都是 S_n 的聚点, 可见

$$S_n' = \{2n + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{k_i} | 1 \leqslant p \leqslant n, i < p \Rightarrow k_i \in E_n\}.$$

它是 $[2n, 2n+1-1/n]$ 的子集且含 $2n+1-1/n$. 归纳地, $1 \leqslant q \leqslant n$ 时

$$S_n^{(q)} = \{2n + \sum_{i\leqslant p} \frac{1}{k_i} | 0 \leqslant p \leqslant n - q, i \leqslant p \Rightarrow k_i \in E_n\}.$$

它是 $[2n, 2n+1-q/n]$ 的子集且含 $2n+1-q/n$. 当 $q > n$ 时, $S_n^{(q)} = \varnothing$.

设 $S^{(q_1)} = S^{(q_2)}$, 则对所有 n 应有 $S_n^{(q_1)} = S_n^{(q_2)}$. 命 $n = q_1 + q_2$, 由上而结论知 $(S_n^{(q)})_{q=1}^n$ 是 $[n, n+1-1/n]$ 中的互异的闭集. 这样 $q_1 = q_2$.

于是 S 的各级导集互异. 进而 $\bigcap\limits_{q=1}^{\infty} S^{(q)} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{q=1}^{\infty} S_n^{(q)} = \varnothing$.

(3) 命 S 同 (2), 记 $T = [0,1] \cup S$, 注意到 $T^{(q)} = [0,1] \cup S^{(q)}$ 即可.

练习 17 否则, 当 β 取遍所有序数时, $S^{(\beta)}$ 是 X 的互异子集. 这样幂集 2^X 的势可任意地大, 矛盾. 最后注意到 $S^{(\beta)}$ 有孤立点时 $S^{(\beta)} \neq S^{(\beta+1)}$ 即可.

练习 18 只证明 (2). 任取 $x \in K$, 其三进位小数表示 $0.a_1a_2\cdots$ 中的每个 a_i 非 0 即 2. 若有 m 使 $i > m$ 时, $a_i = 0$, 命 $x_n = 0.a_1\cdots a_m 0\cdots 02$, 其中最后那个 2 位于第 $m+n$ 位; 否则, 命 $x_n = 0.a_1, \cdots, a_n$. 在此两种情形, (x_n) 都是 K 中的异于 x 且以 x 为极限的序列, 因此 x 是 K 的聚点.

练习 19 (1) 因为 A 是加法群, 其闭包也是:

$$\overline{A} - \overline{A} \subseteq \overline{A - A} = \overline{A}.$$

命 $c = \inf\{x \in \overline{A} | x > 0\}$, 这是 $\overline{A}$ 中元素使 $c = \inf\{x \in A | x > 0\}$.

如果 $c > 0$, 则任何 $x \in \overline{A}$ 对应一个整数 k 和数 d 使 $0 \leqslant d < c$ 且 $x = kc + d$. 这样 $d = x - kc \in \overline{A}$. 由 c 的定义知 $d = 0$, 从而 $x = kc$. 于是有整数 k 和 l 使 $a = kc$ 和 $b = lc$. 于是 $b/a = k/l$, 这是有理数. 矛盾.

从而 $c = 0$. 这样可取 A 中的序列 (c_k) 使 $c_k > 0$ 且 $\lim c_k = 0$.

任取实数 x, 命 $z_0 = \inf\{z \in A | z > x\}$. 如果 $z_0 > x$, 则有充分大的 k 使 $z_0 - c_k > x$. 这与 z_0 的定义矛盾, 从而 $z_0 = x$. 这样可取 A 中的序列 (z_k) 使 $z_k > x$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = x$. 这表明 $A' = \mathbb{R}$.

(2) 据上面结论知 $\{2k\pi+l|k,l\in\mathbb{Z}\}$ 的导集为 $\mathbb{R}$. 任取 $x\in\mathbb{R}$, 则有无界整数列 (k_n) 和 (l_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty}(2k_n\pi+l_n)=x$. 取子列后可设两个序列 (k_n) 和 (l_n) 中有一个逼近正无穷大而另一个逼近负无穷大.

$$\begin{aligned}\cos x &= \lim_{n\to\infty}\cos(2k_n\pi+l_n)\\ &= \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\cos l_n : \lim\limits_{n\to\infty} l_n=+\infty,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\cos(-l_n) : \lim\limits_{n\to\infty} l_n=-\infty.\end{cases}\end{aligned}$$

这表明 $A'=[-1,1]$. 用上面的结论或仿上面的过程可做其他小题.

练习 20 (1) 充分性: 设 x 是 E 的邻接区间 (a_1,b_1) 和 (a_2,b_2) 的公共端点且 $b_1=a_2$, 则 $(a_1,b_2)\cap E=\{x\}$. 这样 x 是 E 的孤立点.

必要性: 取 $r>0$ 使 $(x-r,x+r)\cap E=\{x\}$. 这样 $(x-r,x)$ 与 $(x,x+r)$ 是开集 $\mathbb{R}\setminus E$ 的子集. 于是 E 有两个邻接区间 I 和 J 分别包含 $(x-r,x)$ 和 $(x,x+r)$. 这样 x_0 是 I 和 J 的公共端点.

(2)+(3) 源自 (1). (4) 回顾一下 §1.2 练习 11 的结论: S 与有理数集相似当且仅当 S 无最小数也无最大数且 S 中的任何两数之间有第三个数.

必要性: 首先 S 无最小数. 否则, 设 a_0 为其最小数, 则 E 有个形如 $(-\infty,c)$ 的邻接区间使 $c<a_0$. 据 a_0 的最小性知 (c,a_0) 中无 E 的邻接区间. 这样 $[c,a_0]\subseteq E$. 这与 E 疏朗矛盾. 又 S 无最大数. 否则, 设 a_1 为其最大数, 则 E 有个邻接区间 (a_1,b_1) 使 $b_1<+\infty$, 从而 E 有个形如 $(c,+\infty)$ 的邻接区间. 同前的分析知 $c>b_1$ 且 $[b_1,c]\subseteq E$, 矛盾.

任取 S 中的大小两数 a_2 和 a_1, 它们对应邻接区间 (a_2,b_2) 和 (a_1,b_1). 因为 $b_1<a_2$ 且 (b_1,a_2) 不含于 E 中, 从而有个 c 使 $b_1<c<a_2$ 且 c 不在 E 中. 这样 E 有个邻接区间 (a_3,b_3) 使 $a_3<c<b_3$, 从而 $a_1<a_3<a_2$.

充分性: 任取 E 的两个邻接区间 (a_1,b_1) 和 (a_2,b_2) 使 $b_1\leqslant a_2$. 据 (1) 说明 $b_1<a_2$ 即可. 如果 $a_1>-\infty$ 且 $b_2<+\infty$, 则 a_1 和 a_2 之间应有 S 中的数 a_3, 这样 E 有个邻接区间 (a_3,b_3) 使 $b_1<b_3\leqslant a_2$; 如果 $a_1=-\infty$ 且 $b_2<+\infty$, 则 E 有个有限邻接区间 (a_3,b_3) 使 $a_3<a_2$, 这样 $b_1<b_3\leqslant a_2$; 如果 $a_1=-\infty$ 且 $b_2=+\infty$, 则 E 有个两个邻接区间 (a_3,b_3) 和 (a_4,b_4) 使 $b_1<a_3$ 且 $b_4\leqslant a_1$, 从而 $b_1<a_2$. 总之, $b_1<a_2$.

练习 21 取稠于 X 的可数集 D. 注意到 $|\mathbb{R}^D| = \aleph$, 构造个单射 $f: X \to \mathbb{R}^D$ 即可. 对于 $x \in X$ 及 $a \in D$, 命 $f(x)(a) = d(x,a)$. 设 $f(x_1) = f(x_2)$ 即 $d(x_1,a) = d(x_2,a)$ 对 $a \in D$ 成立. 对任何 $r > 0$, 取个 $a \in D$ 使 $d(x_1,a) < r$. 于是 $d(x_2,a) < r$. 这样

$$d(x_1,x_2) \leqslant d(x_1,a) + d(a,x_2) < 2r.$$

命 $r \to 0$ 得 $d(x_1,x_2) = 0$, 由此得 $x_1 = x_2$, 从而 f 是单射.

也可这样证明：将 D 中的收敛序列 (x_n) 全体记为 A, 这是 $D^{\mathbb{Z}_+}$ 的子集. 注意到 $|A| \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$ 且 $\lim: A \to X$ 是满射即可.

任取 X 的开集 U. 对于 $y \in U$, 取正有理数 r 使 $O(y,2r) \subseteq U$. 取 $x \in D$ 使 $d(x,y) < r$. 因为 $d(z,x) < r$ 蕴含 $d(z,y) < 2r$, 所以 $y \in O(x,r) \subseteq O(y,2r) \subseteq U$. 这表明

$$U = \bigcup\{O(x,r)|x \in D, r \in \mathbb{Q}_+, O(x,r) \subseteq U\}.$$

因此若命 $f(U) = \{(x,r) \in D \times \mathbb{Q}_+ | O(x,r) \subseteq U\}$, 则 $f: \mathcal{O} \to 2^{D \times \mathbb{Q}_+}$ 是单射. 于是 $|\mathcal{O}| \leqslant 2^{\aleph_0} = \aleph$.

练习 22 记 $Z = X \times Y$, 其中的点 (x,y) 记为 z. 在 Z 上取度量 d 使

$$d(z_1,z_2) = \max\{d(x_1,x_2), d(y_1,y_2)\}.$$

(1) 记 $W = S \times T$. 因为 $O(z,r) = O(x,r) \times O(y,r)$, 所以

$$O(z,r) \cap W = (O(x,r) \cap S) \times (O(y,r) \cap T)).$$

于是, z 是 W 的接触点当且仅当 $r > 0$ 时 $O(z,r) \cap W$ 不空当且仅当 $r > 0$ 时 $O(x,r) \cap S$ 和 $O(y,r) \cap T$ 都不空当且仅当 x 是 S 的接触点而 y 是 T 接触点. 由此得第一等式.

第二等式源自： $O(z,r) \subseteq W$ 当且仅当 $O(x,r) \subseteq S$ 且 $O(y,r) \subseteq T$.

(2) 任取 W 的聚点 z, 则 x 是 S 的接触点而 y 是 T 的接触点. 若 x 不是 S 的聚点, 则有 $r_0 > 0$ 使 $O(x,r_0) \cap S = \{x_0\}$. 当 $0 < r < r_0$ 时,

$$O(z,r) \cap W \setminus \{z\} = \{x\} \times (O(y,r) \cap T \setminus \{y\}).$$

于是 $O(y,r) \cap T \setminus \{y\}$ 不空, 这样 y 是 T 的聚点. 这表明

$$(S \times T)' \subseteq (S' \times \overline{T}) \cup (\overline{S} \times T').$$

反之, 设 x 是 S 的接触点而 y 是 T 的聚点, 则 $r > 0$ 时,

$$O(z,r) \cap W \setminus \{z\} \supseteq (O(x,r) \cap S) \times (O(y,r) \cap T \setminus \{y\}).$$

它不空，所以 z 是 W 的聚点．同样当 x 是 S 的聚点而 y 是 T 的接触点时，z 是 W 的聚点．由此得下式

$$(S\times T)'\supseteq(S'\times\overline{T})\cup(\overline{S}\times T').$$

(3) 当 $x\in X^n\setminus D$ 时，存在 i,j 使 $i\neq j$ 且 $x_i\neq x_j$．命 $r=d(x_i,x_j)/2$．当 $y\in O(x,r)$ 时，$d(x_i,y_0)<r$ 且 $d(y_j,x_j)<r$．于是

$$d(x_i,x_j)\leqslant d(x_i,y_i)+d(y_i,y_j)+d(y_j,x_j)<2r+d(y_i,y_j).$$

于是 $d(y_i,y_j)>0$，这样 $y_i\neq y_j$，从而 $O(x,r)\subseteq X^n\setminus D$．这样 $X^n\setminus D$ 是开集．因此 D 是闭集．

(4) 必要性：如果 S 与 X 的开集 U 不交，则 $S\subseteq X\setminus U$．此式两边取闭包后得 $X\subseteq X\setminus U$．这样 U 为空集．

充分性：因为 S 与开集 $X\setminus\overline{S}$ 不交，后者便是空集．由此得 $X=\overline{S}$．

练习 23 在情形 (1)，x 是 $X\setminus S$ 的内点 (也称为 S 的外点)．在情形 (2)，x 是 S 的接触点．在情形 (2.1)，x 是 S 的内点．在情形 (2.2)，x 是 S 的边界点．在情形 (2.3)，x 是 S 的聚点．在情形 (2.4)，x 是 S 的孤立点．

练习 24 必要性：取 A 的可数稠密子集 D，开球 $O(x,r):x\in D,r\in\mathbb{Q}_+$ 有可数个，将其排成序列 $(B_k)_{k=1}^{\infty}$．如果 $\{U_i\}$ 是 A 的开覆盖，则任何 $y\in A$ 对应至少一个 i 使 $y\in U_i$．取正有理数 r 使 $O(y,2r)\subseteq U_i$．取 $x\in D$ 使 $d(x,y)<r$．因为 $d(z,x)<r$ 蕴含 $d(z,y)<2r$，所以 $y\in O(x,r)\subseteq O(y,2r)\subseteq U_i$．

这表明 $\{B_k|\exists i\in I:B_k\subseteq U_i\}$ 覆盖 A，其中每个 B_k 对应的 U_i 记为 U_{i_k}，则 $\{U_{i_k}|k\}$ 是 A 的至多可列子开覆盖．

充分性：对于正有理数 r，显然 $\{O(x,r)|x\in A\}$ 是 A 的开覆盖．取 A 的一个至多可列集 D_r 使 $\{O(x,r)|x\in D_r\}$ 覆盖 A，命 $S=\bigcup\{D_r:r\in\mathbb{Q}_+\}$．这是 A 的一个至多可列稠密子集．

练习 25 可设 $s<t$．显然 $\|f\|_s\geqslant\|f\|_t$．如果 $\|\cdot\|_s$ 与 $\|\cdot\|_t$ 等价，则有常数 $c>0$ 使 $\|f\|_s\leqslant c\|f\|_t$ 恒成立．这相当于 $f\in C_b[0,+\infty)$ 时

$$\int_0^{\infty}(\exp(-sx^2)-c\exp(-tx^2))|f(x)|dx\leqslant 0.$$

因此得 $\exp(-sx^2)\leqslant c\exp(-tx^2)$．这样 $\exp(tx^2-sx^2)\leqslant c$ 总成立．命 $x\to+\infty$ 得 $+\infty\leqslant c$，矛盾．

练习 26 任取 $(x_n) \in l^\infty$ 和 $\varepsilon > 0$. 可设 (x_n) 是实值的, 命

$$J_k = \{n \in \mathbb{Z}_+ | (k-1)\varepsilon < x_n \leqslant k\varepsilon\}, k \in \mathbb{Z},$$

则集列 $(J_k)_{k=1}^\infty$ 的并为 $\mathbb{Z}_+$ 且只有有限个 J_k 非空. 当 $n \in J_k$ 时, 命 $y_n = k\varepsilon$. 由此得取有限个值的数列 $(y_n)_{n=1}^\infty$ 使 $\|x-y\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

练习 27 (1) 对于 Cantor 集 K 中的每一点 $x = (0.a_1a_2\cdots)_3$, 其中 a_n 非 0 即 2. 命 $f(x) = \sum(u_n : a_n = 2)$, 得满射 $f : K \to E$.

据 K 的紧性, 说明 f 连续即可. 对于 $\varepsilon > 0$, 取 $\mathbb{Z}_+$ 的有限子集 F_0 使 F 是与 F_0 不交的的有限子集时, $\|\sum\limits_{i\in F} u_i\| < \varepsilon$. 命 $n = \max F_0$, 据 §5.1 练习 16 知对 $\{k|k > n\}$ 的任何子集 J, 有 $\|\sum\limits_{i\in J} u_i\| \leqslant \varepsilon$. 任取 K 中满足 $|y-x| < \sum\limits_{i>n} \dfrac{2}{3^i}$ 的点 $y = (0.b_1b_2\cdots)_3$, 则 $i \leqslant n$ 时, $b_i = a_i$. 这样

$$f(x) - f(y) = \sum(u_i : i > n, a_i = 2) - \sum(u_i : i > n, b_i = 2).$$

可见 $\|f(x) - f(y)\| \leqslant 2\varepsilon$. 因此 f 连续.

当 $x = \sum\limits_{i\in J} u_i$ 时, $s - x = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}_+\setminus J} u_i \in E$.

(2) 首先注意这样一个事实: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. 任取 $y_0 = \sum\limits_{i\in J} u_i \in E$ 及 $\varepsilon > 0$. 无妨设 $u_i : i \in J$ 都非 0. 如果 J 是无限集, 则有个 $k \in J$ 使 $0 < \|u_k\| < \varepsilon$. 于是 $y = \sum\limits_{i\in J\setminus\{k\}} u_i \in E$ 满足 $0 < \|y_0 - y\| < \varepsilon$. 如果 J 是有限集, 则有 $k > \max J$ 使 $0 < \|u_k\| < \varepsilon$, 此处约定 $\max\varnothing = 0$. 这样 $y = \sum\limits_{i\in J\cup\{k\}} u_i \in E$ 满足 $0 < \|y - y_0\| < \varepsilon$. 于是 y_0 总是 E 的聚点.

(3) 注意到 E 是有限集即可.

练习 28 (1) 按定义, x 在 $E^\#$ 的补集中当且仅当存在 $r > 0$ 使 $O(x,r) \cap E$ 可数. 此时, 当 $d(y,x) < r$ 时, $O(y, r - d(y,x)) \cap E$ 是 $O(x,r) \cap E$ 的子集, 它可数. 这表明 $O(x,r) \subseteq X \setminus E^\#$, 后者因而是开集. 于是 $E^\#$ 是闭集.

(2) 显然 $E_1^\# \cup E_2^\# \subseteq (E_1 \cup E_2)^\#$. 若反向包含不成立, 则 $E_1 \cup E_2$ 有凝聚点 x 不是 E_1 的凝聚点也不是 E_2 的凝聚点. 于是有 $r_1 > 0$ 和 $r_2 > 0$ 使 $O(x, r_1) \cap E_1$ 和 $O(x, r_2) \cap E_2$ 都是可数集. 命 $r = r_1 \wedge r_2$, 则

$$O(x,r) \cap (E_1 \cup E_2) = (O(x,r) \cap E_1) \cup (O(x,r_2) \cap E_2).$$

这是可数集, 矛盾.

练习 29 (1) 必要性: 取 E 的一个聚点 x, 则 E 中有逼近 x 但各项互异的序列 (x_n). 于是 $\{x_n|n\in\mathbb{Z}_+\}$ 是 E 的可列子集.

充分性: 取 E 中的互异点组成的序列 (x_k), 据 Bolzano-Weierstrass 定理取子列后可设 (x_k) 收敛, 其极限是 E 的聚点.

(2) 下面会多次用到 §1.5 练习 7. 命

$$P=\{(x,r)\in E\times\mathbb{R}_+|O(x,r)\cap E=\{x\}\},$$

则 $\{O(x,r)|(x,r)\in P\}$ 覆盖 E. 于是 P 有可数子集 Q 使

$$\begin{aligned}&E\subseteq\bigcup\{O(x,r)|(x,r)\in Q\}\\ \Rightarrow &E=\bigcup\{O(x,r)\cap E|(x,r)\in Q\}.\end{aligned}$$

可见 $E=\{x|(x,r)\in Q\}$, 这样 E 可数.

(3) 否则, 命 $P=\{(x,r)|O(x,r)\cap E\text{可数}\}$, 则 $\{O(x,r)|(x,r)\in P\}$ 是 E 的开覆盖. 于是 P 有可数子集 Q 使 $\{O(x,r)|(x,r)\in Q\}$ 覆盖 E. 这与 E 的不可数性矛盾.

(4) 说明任何 $x\in E^{\#}$ 是 $E^{\#}$ 的聚点即可. 设 $r>0$, 命

$$E_k=\{y\in E|\frac{0.9r}{k+1}\leqslant d(x,y)<\frac{0.9r}{k}\}.$$

集列 $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ 的并为不可数集 $O(x,0.9r)\cap E\setminus\{x\}$, 从而有个最小正整数 k 使 E_k 不可数. 据 (3) 知 E_k 有个凝聚点 z, 这也是 E 的凝聚点且

$$0<\frac{0.9r}{k+1}\leqslant d(z,x)\leqslant\frac{0.9r}{k}<r.$$

因此 $O(x,r)\cap E^{\#}\setminus\{x\}$ 不空, 从而 x 是 $E^{\#}$ 的聚点.

(5) 否则, 有 $x_1\in E$ 和 $r_1>0$ 使 $B(x_1,r_1)\cap E$ 只有可列个互异点 $x_1,x_2,\cdots$. 命 $k_1=1$. 因为 x_1 是 E 的聚点, 所以使 $0<d(x_1,x_k)<r_1$ 的自然数 k 存在, 其最小者记为 k_2. 命

$$r_2=0.5\min\{d(x_{k_2},x_{k_1}),r_1-d(x_{k_2},x_{k_1})\},$$

则 $x_{k_1}\notin B(x_2,r_2)\subseteq O(x_{k_1},r_1)$. 因为 x_{k_2} 为 E 的聚点, 使 $0<d(x_{k_2},x_k)<r_2$ 的正整数 k 存在, 其中最小者记为 k_3. 命

$$r_3=0.5\min\{d(x_{k_3},x_{k_2}),r_2-d(x_{k_3},x_{k_2})\},$$

则 $x_{k_2}\notin B(x_{k_3},r_3)\subseteq O(x_{k_2},r_2)$. 如此下去得序列 (x_{k_n}) 和直径趋向 0 的闭集套 $B(x_{k_n},r_n)\cap E:n\geqslant 1$(其唯一交点记为 x) 使 $x_{k_{n+1}}$ 是第一个进入开球 $O(x_{k_n},r_n)$ 的项且 $x_{k_n}\notin B(x_{k_{n+1}},r_{n+1})\subseteq O(x_{k_n},r_n)$.

总有 $d(x,x_{k_n})<r_n$ 且有正整数 m 使 $x=x_m$. 于是总有 $k_{n+1}\leqslant m$, 命 $n\to\infty$ 得 $m=\infty$, 矛盾.

练习 30 注意到 $E = E^{\#} \cup (E \setminus E^{\#})$ 而无凝聚点的 $E \setminus E^{\#}$ 可数即可.

练习 31 取 X 的可数稠密集 $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$(其中的元素可以重复). 对于 $B \in \mathcal{U}$, 据练习 22(4) 知 $\{n | x_n \in B\}$ 不空, 其最少数记为 $f(B)$, 得单射 $\mathcal{U} \to \mathbb{N}$. 于是 $\mathcal{U}$ 可数. 但 $\mathcal{E}$ 不必可数, 如 $\mathbb{R}$ 中有 $\aleph$ 个相互不交的非空闭集 $\{x\} : x \in \mathbb{R}$.

练习 32 (按条件知) 当 r 是理数时, $f(rx) = rf(x)$. 命 $c = \sup\limits_{x \in E_\delta} |f(x)|$. 当 $n \in \mathbb{Z}_+$ 且 $x \in E_{\delta/n}$ 时, nx 在 E_δ 中. 于是 $|f(nx)| \leqslant c$, 从而 $|f(x)| \leqslant c/n$. 这样 $\overline{\lim\limits_{x\to 0}} |f(x)| \leqslant c/n$. 若 c 有限, 命 $n \to \infty$ 得 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, 这与 f 在原点不连续矛盾. 于是 c 无限.

任取 $b \in \mathbb{R}$ 及 $\varepsilon > 0$. 取 $a \in E_\delta$ 使 $|f(a)| > |b|$, 取 $s \in E_1 \cap \mathbb{Q}$ 使

$$|s - \frac{b}{f(a)}| < \frac{\varepsilon}{|f(a)|}.$$

由此得 $sa \in E_\delta$ 使 $|f(sa) - b| < \varepsilon$. 因此 $f(E_\delta)$ 稠于 $\mathbb{R}$.

任取 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 及 $\varepsilon > 0$, 取 $z \in E_\varepsilon$ 使 $|f(z) - (y - f(x))| < \varepsilon$, 得

$$\begin{aligned} &|(x + z, f(x + z)) - (x, y)| \\ =&|(z, f(x) + f(z) - y)| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

这即 $\operatorname{gr} f$ 稠于 $\mathbb{R}^2$.

练习 33 (1) 错. 如 [0,1] 中的有理数全体 E 是 Lebesgue 零集, 但 χ_E 无连续点.

(2) 错. 如 §2.2 练习 1 中构造的 E_r 是疏朗集且非 Lebesgue 零集, 它的特征函数 f 的不连续点全体包含 E_r. 从而 f 不满足 Riemann 可积的条件.

(3) 错. 反例同 (2).

(4) 错. 命 E_r 同上, 则 E_r 的所有邻接区间的端点构成一个疏朗零集 E. 因为 E 稠于 E_r, 所以 E 的特征函数 f 在 E_r 上处处不连续. 因此 f 不 Riemann 可积.

(5) 对. 因为闭的零集 E 的特征函数 f 在开集 $U = (0, 1) \setminus E$ 上恒为 0. 这样 f 的连续点集包含 U. 于是 f 有界且几乎处处连续.

练习 34 提示: (1) 取 S 的可数稠密子集 D. 对于 $x \in S$, 有 $y \in D$ 使 $d(y, x) < \varepsilon$. 可见 $y = x$. 这说明 $S = D$.

(2) 命 $\varepsilon_n = 2^{-n}$, 将 X 的 ε_n- 链全体记为 $\mathcal{P}_n$, 它按包含关系成为偏序集. 据 Zorn 引理知 $\mathcal{P}_n$ 有个极大元 S_n. 于是当 $x \in X$ 时, $d(x, S_n) < \varepsilon_n$. 于是可数集 $\bigcup\limits_{n \geqslant 1} S_n$ 稠于 X.

练习 35 作 $\mathcal{S}$ 的一个上界 $V=\bigcup\mathcal{S}$. 当 W 也是 $\mathcal{S}$ 的一个上界时, 每个 $U\in\mathcal{S}$ 满足 $U\subseteq W$. 于是 $V\subseteq W$.

作 $\mathcal{S}$ 的一个下界 $V_0=(\bigcap\mathcal{S})^{\circ}$. 当 W_0 也是 $\mathcal{S}$ 的一个下界时, 每个 $U\in\mathcal{S}$ 满足 $U\supseteq W_0$. 于是 $\bigcap\mathcal{S}\supseteq W_0$, 取内部得 $V_0\supseteq W_0$.

因此 V 是 $\mathcal{S}$ 的最小上界而 V_0 是 $\mathcal{S}$ 的最大下界.

练习 36 作 $\mathcal{S}$ 的一个上界 $V=\overline{\bigcup\mathcal{S}}$. 当 W 也是 $\mathcal{S}$ 的一个上界时, 每个 $U\in\mathcal{S}$ 满足 $U\subseteq W$. 于是 $\bigcup\mathcal{S}\subseteq W$, 取闭包得 $V\subseteq W$.

命 $V_0=\bigcap\mathcal{S}$, 它是 $\mathcal{S}$ 的一个下界. 当 W_0 也是 $\mathcal{S}$ 的一个下界时, 每个 $U\in\mathcal{S}$ 满足 $U\supseteq W_0$, 从而 $V_0\supseteq W_0$.

因此 V 是 $\mathcal{S}$ 的最小上界而 V_0 是 $\mathcal{S}$ 的最大下界.

练习 37 作 $\mathcal{S}$ 的一个上界 $V=\operatorname{span}\bigcup\mathcal{S}$. 当 W 也是 $\mathcal{S}$ 的一个上界时, 每个 $U\in\mathcal{S}$ 满足 $U\subseteq W$. 于是 $\bigcup\mathcal{S}\subseteq W$, 取线性包得 $V\subseteq W$.

作 $\mathcal{S}$ 的一个下界 $V_0=\bigcap\mathcal{S}$. 当 W_0 也是 $\mathcal{S}$ 的一个下界时, 每个 $U\in\mathcal{S}$ 满足 $U\supseteq W_0$. 于是 $V_0\supseteq W_0$.

因此 V 是 $\mathcal{S}$ 的最小上界而 V_0 是 $\mathcal{S}$ 的最大下界.

练习 38 作 $\mathcal{S}$ 的一个上界 $V=\overline{\operatorname{span}}\bigcup\mathcal{S}$. 当 W 也是 $\mathcal{S}$ 的一个上界时, 每个 $U\in\mathcal{S}$ 满足 $U\subseteq W$. 于是 $\bigcup\mathcal{S}\subseteq W$, 取闭线性包得 $V\subseteq W$.

作 $\mathcal{S}$ 的一个下界 $V_0=\bigcap\mathcal{S}$. 当 W_0 也是 $\mathcal{S}$ 的一个下界时, 每个 $U\in\mathcal{S}$ 满足 $U\supseteq W$. 于是 $V_0\supseteq W_0$.

因此 V 是 $\mathcal{S}$ 的最小上界而 V_0 是 $\mathcal{S}$ 的最大下界.

练习 39 任取 $x\in U_{ni}$, 据 §1.5 练习 16, 当 $y\in K$ 且 $|y-x|<3^{-n}$ 时, $b_n=a_n=i$. 这样 $O(x,3^{-n})\subseteq U_{ni}$. 因此 U_{ni} 是开集. 又 U_{n0} 与 U_{n1} 是全空间 K 中的互补子集, 它们又都是闭集.

§5.3 连续映射

练习 1 记 $B=\overline{f(A)}$, 因为 $f^{-1}(B)$ 是包含 A 的闭集, 所以 $X=f^{-1}(B)$. 因为 f 是满射, 所以 $B=f(X)=Y$, 这即 $f(A)$ 在 Y 中稠密.

练习 2 可设 E 和 F 都非空. 命 $f(x)=d(x,E)-d(x,F)$. 由此得连续函数 $f:X\to\mathbb{R}$. 作不交开集 $U=(f<0)$ 而 $V=(f>0)$. 注意到

$$f(x)=\begin{cases}0-d(x,F)<0: & x\in E;\\ d(x,E)-0>0: & x\in F,\end{cases}$$

U 包含 E 而 V 包含 F.

练习 3 当 $\sin x>0$ 时，$f(x)=1$; 当 $\sin x=0$ 时，$f(x)=0$; 当 $\sin x<0$ 时，$f(x)=-1$. 因此

$$f(x)=\begin{cases}1: & x\in\bigsqcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,2k\pi+\pi),\\ 0: & x=\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\},\\ -1: & x\in\bigsqcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi-\pi,2k\pi).\end{cases}$$

可见，f 的连续点集是 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi$, 这是开集.

练习 4 取 $a_i>0$ 使 $\sum\limits_{i\in J}a_i<+\infty$. 当 $x,y\in X$ 时，命

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}a_i\wedge d_i(P_ix,P_iy).$$

注意到 $(x,y)\mapsto d_i(P_ix,P_iy)$ 是 X 上伪度量, 据 §5.1 定理 1 知 $d(x,x_0)\to 0$ 当且仅当 $i\in J$ 时 $d_i(P_ix,P_ix_0)\to 0$ 当且仅当每个 X_i 中 $P_ix\to P_ix_0$.

(1) 据上面的充要条件知 P_i 连续. 任取 X 的开集 W 及 $x\in W$. 取 $r>0$ 使 $O(x,r)\subseteq W$. 当 $y_i\in X_i$ 且 $d(y_i,P_ix)<r$ 时, 取 $y\in X$ 使 $P_iy=y_i$ 且 $j\neq i$ 时，$P_jy=P_jx$. 于是

$$d(y,x)=\sum_j a_j\wedge d(P_jy,P_jx)=a_i\wedge d(y_i,P_ix)<r.$$

这样 $O(P_ix,r)\subseteq P_i(O(x,r))\subseteq P_i(W)$, 从而 $P_i(W)$ 是开集.

(2)提示: $E=\bigcap\{P_i^{-1}(F_i)|i\in J\}$ 是可列个闭集之交.

(3)提示: $U=\bigcap\{P_i^{-1}(U_i)|U_i\neq X_i\}$ 是有限个开集之并.

(4) 必要性: 在每个 X_i 中固定一点 c_i. 任取 X_i 中的基本序列 (b_n). 作 X 中的序列 (x_n) 使 $P_ix_n=b_n$ 而 $j\neq i$ 时 $P_jx_n=c_j$. 于是等式

$$d(x_n,x_l)=d_i(b_n,b_l)\wedge a_i$$

表明 (x_n) 是 X 中的基本序列, 其极限记为 x, 则当 $n\to\infty$ 时,

$$d_i(b_n,P_ix)\wedge a_i\leqslant d(x_n,x)\to 0.$$

于是 $\lim d_i(b_n,P_ix)=0$. 这样 X_i 完备.

充分性: 任取 X 中的基本序列 (x_n). 当 $n,l\to\infty$ 时,

$$d_i(P_ix_n,P_ix_l)\wedge a_i\leqslant d(x_n,x_l)\to 0.$$

于是 $(P_ix_n)_{n=1}^{\infty}$ 是 X_i 的基本序列, 其极限记为 b_i.

命 $x=(b_i)_{i\in J}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}d_i(P_ix_n,P_ix)=0$. 据 §5.1 定理 1 知 (x_n) 逼近 x, 从而 X 完备.

练习 5 提示: $(\sup \leqslant b) = [-\infty, b]^J$ 而 $(\inf \geqslant b) = [b, +\infty]^J$ 是闭集.

练习 6 注意到 $d(\pm\infty, 0) = |\arctan(\pm\infty) - \arctan 0| = \pi/2 < 2$. 因此 $B(x,2) = O(x,2) = \overline{\mathbb{R}}$. 于是 $S(x,2) = B(x,2) \setminus O(x,2) = \varnothing$.

练习 7 说明 $|d(x,y) - d(x_0,y_0)| \leqslant d(x,x_0) + d(y,y_0)$ 即可, 这源自下两式

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y),$$
$$d(x_0,y_0) \leqslant d(x_0,x) + d(x,y) + d(y,y_0).$$

练习 8 充要条件见 §5.2 练习 22(4). (1) 是显然的.

(2) $(g > h)$ 是与 D 无交的开集, 它是空集. 因此 $g \leqslant h$.

(3) 命 $f(x) = (g(x), h(x))$, 则 $h : X \to Y \times Y$ 是连续映射. 以 Δ 记 $Y \times Y$ 的对角线, 这是 $Y \times Y$ 的闭集使 $D \subseteq f^{-1}(\Delta)$. 于是 $X = f^{-1}(\Delta)$. 这说明 $x \in X$ 时, $g(x) = h(x)$.

练习 9 任取 $x \in X$. 当 $r > 0$ 时, 命 $U_r^x = \{y \in X_0 | d(y,x) < r\}$, 则 $\lim\limits_{r\to 0} \operatorname{diam} U_r^x = 0$. 据 f_0 的一致连续性知 $\lim \operatorname{diam} f_0(U_r^x) = 0$, 这样 $f_0(U_r^x) : r > 0$ 有唯一公共接触点 — 这记为 $f(x)$. 当 $x \in X_0$ 时, $f_0(x)$ 是 $f_0(U_r^x) : r > 0$ 的公共点, 所以 $f(x) = f_0(x)$. 因此 f 是 f_0 的延拓.

设 X_0 的子集 S 满足 $\operatorname{diam} S < 3\delta$ 时, $\operatorname{diam} f_0(S) < \varepsilon$. 设 $x, y \in X$ 使 $d(x,y) < \delta$. 当 $a, b \in U_\delta^x \cup U_\delta^y$ 时, 无妨设 $a \in U_\delta^x$ 而 $b \in U_\delta^y$. 这样

$$d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,y) + d(y,b) < 2\delta + d(x,y).$$

故 $\operatorname{diam}(U_\delta^x \cup U_\delta^y) < 3\delta$, 得 $\operatorname{diam} f_0(U_\delta^x \cup U_\delta^y) < \varepsilon$. 这样 $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$. 于是 f 一致连续, 其唯一性源自练习 8.

练习 10 提示: (1) 注意到全空间即是开集又是闭集并且开集与闭集互补即可.

(2) 设 c 为实数. 当 f 上半连续时, $(f < c)$ 为开集; 当 f 下半连续时, $(f > c)$ 是开集. 因此 $(f < c)$ 是 Borel 集. 据 §2.3 定理 1 知 f 是 Borel 函数.

(3) 必要性: 任取 $E \in \mathcal{E}(X)$, 命 $U_n = \{x \in X | d(x,E) < 1/n\}$, 则开集列 (U_n) 递减至 E. 于是 $E \in \mathcal{M}$.

充分性: 任取 $U \in \mathcal{O}(X)$, 命 $E_n = \{x \in X | d(x, X \setminus U) \geqslant 1/n\}$, 闭集列 (E_n) 递增至 U. 于是 $U \in \mathcal{M}$.

练习 11 (1)⇒(2): 将 A 的闭包记为 A_1, 它与 B 不交. 因此

$$\begin{aligned}&\lambda(E\cap f^{-1}(A))+\lambda(E\cap f^{-1}(B))\\ \leqslant&\lambda(E\cap f^{-1}(A_1))+\lambda(E\cap A_1^{\mathrm{c}})=\lambda(E).\end{aligned}$$

(2)⇒(1): 设 $-\infty<a<b+\infty$ 而 F 是 Y 的非空闭集. 命

$$A=\{y\in Y|d(y,F)\leqslant a\},B=\{y\in Y|d(y,F)\geqslant b\},$$

得 Y 的不交闭集 A 和 B. 命 $g(x)=d(f(x),F)$, 得函数 $g:X\to\mathbb{R}$ 使

$$\begin{aligned}&\lambda(E(g\leqslant a))+\lambda(E(g\geqslant b))\\ =&\lambda(E\cap f^{-1}(A))+\lambda(E\cap f^{-1}(B))\\ \leqslant&\lambda(E).\end{aligned}$$

据 §2.4 练习 24 知 g 是 λ- 可测函数. 这样 $f^{-1}(F)=g^{-1}\{0\}$ 是 λ- 可测集. 据 §2.3 定理 1(1) 知当 F 是 Y 的 Borel 集时, $f^{-1}(F)$ 是 λ- 可测集.

练习 12 必要性源自 $I^{-1}(V)=V$. 充分性: 当 $d(A,B)>0$ 时,

$$\lambda(E\cap A)+\lambda(E\cap B)\leqslant\lambda(E\cap\overline{A})+\lambda(E\cap\overline{A}^{\mathrm{c}})=\lambda(E).$$

注意到 $I^{-1}(A)=A$ 且 $I^{-1}(B)=B$, 所以 I 是 λ- 可测的.

练习 13 必要性: 命 $E=E_1\cup E_2$ 且 $2c=d(E_1,E_2)$. 作包含 E_1 的开集 $V=\{x\in X|d(x,E_1)<c\}$, 则 V 与 E_2 不交. 用 V 分割测量 E 得

$$\lambda(E)=\lambda(E\cap V)+\lambda(E\cap V^{\mathrm{c}}).$$

注意到 $E\cap V=E_1$ 且 $E\cap V^{\mathrm{c}}=E_2$ 即可.

充分性: 注意到 $I^{-1}(E_i)=E_i$, 由练习 11 知 I 是 λ- 可测的. 据练习 12 知 X 的所有开集是 λ- 可测的.

练习 14 (1)⇒(2). 当 $\varepsilon>0$ 时, $O_2(x_0,\varepsilon)$ 是 (X_2,d_2) 的开球, 从而是 (X,d_1) 的开集. 取 $\delta>0$ 使 $O(x_0,\delta)\subseteq O_2(x_0,\varepsilon)$. 此即 $d_1(x,x_0)<\delta$ 时, $d_2(x,x_0)<\varepsilon$.

(2)⇒(1): 任设 $O_2(x_0,\varepsilon)\subseteq U$, 取 $\delta>0$ 使 $d_1(x,x_0)<\delta$ 时, $d_2(x,x_0)<\varepsilon$. 于是 $O_1(x_0,\delta)\subseteq U$. 这样 U 是 (X,d_1) 中的开集.

(1)⇔(3) 源自 $I^{-1}(U)=U$.

练习 15 必要性：设 $\lim d_1(x_n,x)=0$. 当 $r>0$ 时，$O_2(x,r)$ 也是 (X,d_1) 的开集，可取 $s>0$ 使 $O_1(x,s)\subseteq O_2(x,r)$. 设 $n>l$ 时，$d_1(x_n,x)<s$. 于是 $d_2(x_n,x)<r$. 这样 $\lim d_2(x_n,x)=0$. 反之亦然.

充分性：设 U 是 (X,d_1) 的开集. 如果 U 不是 (X,d_2) 的开集, 则有 $x\in U$ 使 n 是正整数时，$O_2(x,1/n)$ 不完全落于 U 中. 取 $x_n\in O_2(x,1/n)\setminus U$. 于是 $\lim d_2(x_n,x)=0$. 这样 $\lim d_1(x_n,x)=0$. 取 $r>0$ 使 $O_1(x,r)\subseteq U$. 于是有 l 使 $n\geqslant l$ 时，$d(x_n,x)<r$. 因此 $x_n\in O_1(x,r)\subseteq U$. 这与 x_n 的取法矛盾. 于是 U 是 (X,d_2) 的开集. 反之亦然.

练习 16 应用练习 14 即可.

练习 17 注意到 $d(x,x_0)<\varepsilon$ 当且仅当 $\tilde{d}(x,x_0)<\varepsilon/(1+\varepsilon)$, 可知 d 与 $\tilde{d}$ 诱导了相同的收敛性. 据练习 16, 它们诱导了相同的度量拓扑.

练习 18 当 $\rho(x,x_0)\to 0$ 时，明显有 $d(x,x_0)\to 0$. 反之,

$$\rho(x,x_0)\leqslant d(x,x_0)+\sum_{i=1}^{n} d(f_i(x),f_i(x_0))\wedge\frac{1}{2^i}+\sum_{i>n}\frac{1}{2^i}.$$

先命 $d(x,x_0)\to 0$ 得 $\overline{\lim}\,\rho(x,x_0)\leqslant 2^{-n}$. 再命 $n\to\infty$ 得 $\rho(x,x_0)=0$. 据练习 16 知，(X,ρ) 和 (X,d) 有相同度量拓扑.

练习 19 取开集列 (V_n), 其交为 V. 可设 V_n 都非 X. 当 $x\in V$ 时，命 $f_n(x)=1/d(x,X\setminus V_n)$, 则 $f_n:V\to\mathbb{R}$ 是连续函数. 当 $x,y\in V$ 时，命

$$\rho(x,y)=d(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f_n(y)|\wedge 2^{-n}.$$

据练习 18, (V,ρ) 和 (V,d) 有相同度量拓扑. 下面说明 (V,ρ) 的完备性.

任取 (V,ρ) 中的基本序列 (x_k). 由 $d(x_k,x_l)\leqslant\rho(x_k,x_l)$ 知 (x_k) 也是 (X,d) 中的基本序列，它在 (X,d) 中的极限记为 x. 从不等式

$$|f_n(x_k)-f_n(x_l)|\wedge 2^{-n}\leqslant\rho(x_k,x_l)$$

知 $(f_n(x_k))_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的基本序列，它有界. 这样有常数 $c_n>0$ 使

$$d(x_k,X\setminus V_n)\geqslant c_n : k\geqslant 1.$$

命 $k\to\infty$ 得 $d(x,X\setminus V_n)\geqslant c_n$. 于是 x 不在每个闭集 $X\setminus V_n$ 中，这样 x 在每个开集 V_n 中，从而 x 在 V 中且 (V,d) 中的序列 (x_k) 逼近 x. 据练习 18 知，(V,ρ) 中的序列 (x_k) 逼近 x.

练习 20 与 arctan 复合后可设 $|h| \leqslant 2$. 命 $a = \inf h(X)$ 及

$$h_n(x) = \inf\{nd(x,z) + h(z)|z \in X\} : x \in X.$$

命 $z = x$ 可得 $h_n(x) \leqslant h(x)$. 于是 $a \leqslant h_1 \leqslant h_2 \leqslant \cdots \leqslant h$. 对下式

$$nd(z,x_1) + h(z) \leqslant nd(x_1,x_2) + nd(x_2,z) + h(z)$$

两边关于 z 取下确界得 $h_n(x_1) \leqslant nd(x_1,x_2)+h_n(x_2)$. 交换 x_1 与 x_2 的位置知 h_n 一致连续. 现证明 $\lim h_n(x) = h(x)$. 设 $d(z,x) < \delta$ 时, $h(z) > h(x)-\varepsilon$. 当 $n > (h(x)-\varepsilon+1) \div \delta$ 且 $d(z,x) \geqslant \delta$ 时, $nd(x,z)+h(z) > h(x)-\varepsilon$. 于是 $h(x)-\varepsilon < h_n(x) \leqslant h(x)$.

如果 $h_1(x_0) = a$, 取 $z_0 \in X$ 使 $d(x_0,z_0) + h(z_0) < a+\varepsilon$. 这表明 $d(x_0,z_0) < \varepsilon$ 且 $h(z_0) < a+\varepsilon$. 于是 $h(x_0) \leqslant \varliminf_{z\to x} h(z) \leqslant a$. 注意到 $a = \inf h(X)$, 从而 $h(x_0) = a$. 因此 (h_n) 满足要求.

练习 21 仿练习 20.

练习 22 可设 g 与 h 有界. 命 (g_n) 和 (h_n) 分别同练习 21 和练习 20. 函数列 $g_1-h_1, g_1-h_2, g_2-h_2, \cdots$ 递减至 $g-h$. 正部序列 $(g_1-h_1)_+, (g_1-h_2)_+, (g_2-h_2)_+, \cdots$ 递减至 0.

交错级数 $(g_1-h_1)_+ - (g_1-h_2)_+ + (g_2-h_2)_+ - \cdots$ 部分和序列 (e_n) 是连续函数列, 其极限记为 e. 因为 (e_{2n}) 递增至 e 而 (e_{2n-1}) 递减至 e, 所以 e 既下半连续又上半连续. 于是 e 是连续函数.

作连续函数 $f = h_1 + e$. 任取 $x \in X$. 当 $g(x) = h(x)$ 时,

$$f(x) = h_1(x) + (g_1(x) - h_1(x)) - (g_1(x) - h_2(x)) + \cdots.$$

其分部和序列是 $h_1(x), g_1(x), h_2(x), g_2(x), \cdots$. 故 $f(x) = g(x) = h(x)$.

当 $g(x) < h(x)$ 时, 命 $n = \min\{k|g_k(x) < h_k(x)\}$. 对于 $k > n$, 成立 $g_{k-1}(x) \geqslant g_k(x) \geqslant h_k(x)$. 如果 $g_{n-1}(x) \geqslant h_n(x)$, 则

$$f(x) = h_1(x) + \cdots - (g_{n-1}(x) - h_n(x)) = h_n(x).$$

如果 $g_{n-1}(x) < h_n(x)$, 则 $f(x) = g_{n-1}(x)$. 总之, $g \leqslant f \leqslant h$.

练习 23(Hausdorff) 可设 f 有界. 当 $x \in E$ 时, 命 $g(x) = h(x) = f(x)$; 而 $x \in X \setminus E$ 时, 命 $g(x) = \inf f(E)$ 而 $h(x) = \sup f(E)$. 由此得上半连续函数 $g: X \to \mathbb{R}$ 和下半连续函数 $h: X \to \mathbb{R}$ 使 $g \leqslant h$. 练习 22 得个连续函数 $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ 使 $g \leqslant \tilde{f} \leqslant h$. 于是 $\tilde{f}$ 是满足要求的连续延拓.

利用定理 1 可得练习 24. 仿 §1.5 练习 19 可得练习 25.

练习 26 (1) 因为 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(X)$, 说明 $\mathcal{B}$ 对补运算封闭即可. 为此命

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{B} | E^c \in \mathcal{B}\}.$$

当 E 是开集时, 闭集 E^c 是 G_δ 型集, 所以 E^c 在 $\mathcal{B}$ 中. 这样 E 在 $\mathcal{D}$ 中.

任取 $\mathcal{D}$ 中的序列 (E_n), 则 $(\bigcup\limits_n E_n)^c = \bigcap\limits_n E_n^c$ 和 $(\bigcap\limits_n E_n)^c = \bigcup\limits_n E_n^c$ 都在 $\mathcal{B}$ 中. 这样 $\mathcal{D}$ 对可数交与可数交封闭, 所以 $\mathcal{D} = \mathcal{B}$.

(2) 仿上并注意到度量空间中的开集是 F_δ 型集即可.

(3) 因为 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(X)$, 说明 $\mathcal{B}$ 对补运算封闭即可. 为此命

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{B} | E^c \in \mathcal{B}\}.$$

当 E 是开集时, 闭集 E^c 是 G_δ 型集, 所以 E^c 在 $\mathcal{B}$ 中. 这样 E 在 $\mathcal{D}$ 中.

任取 $\mathcal{D}$ 中的序列 (E_n), 则 $\bigcap\limits_n E_n$ 在 $\mathcal{B}$ 中. 归纳地命 $F_1 = E_1^c$ 及 $F_n = E_n^c \cap \bigcap\limits_{i<n} E_i$, 则 (F_n) 是 $\mathcal{B}$ 中的相互不交序列使

$$(\bigcap_{n\geqslant 1} E_n)^c = \bigsqcup_{n\geqslant 1} F_n \in \mathcal{B}.$$

这样 $\mathcal{D}$ 对可数交运算封闭. 当 (E_n) 相互不交时, $\bigsqcup\limits_n E_n$ 在 $\mathcal{B}$ 中且

$$(\bigsqcup_{n\geqslant 1} E_n)^c = \bigcap_{n\geqslant 1} E_n^c \in \mathcal{B}.$$

这样 $\mathcal{D}$ 对可数无交并运算封闭, 从而 $\mathcal{D} = \mathcal{B}$.

(4) 注意 $\mathcal{O}(A) = \mathcal{O}(X) \cap A$ 与 §2.3 性质 7(1) 即可.

练习 27 提示: 作开集 $U_n = \{x | d(x, E) < 2^{-n}\}$. 命

$$f_n(x) = \frac{d(x, X \setminus U_n)}{2^n(d(x, E_n) + d(x, X \setminus U_n))}.$$

由此得连续函数 $f_n : X \to [0, 2^{-n}]$ 使 $f_n(E) = \{2^{-n}\}$ 且 $f(X \setminus U_n) = \{0\}$. 命 $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 即可.

练习 28 用 §1.5 练习 16 的符号. 据 §5.2 练习 39, 可用 K 中既开又闭的集

$$U_n = \{y \in K | b_n = 2 - a_n\} = \{y \in K | b_n \neq a_n\}.$$

因为 $y \neq x$ 当且仅当存在 n 使 $b_n \neq a_n$, 这得 $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} U_n = K \setminus \{x\}$. 命 $V_1 = U_1$, 归纳地命 $V_n = U_n \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1})$. 由此得相互不交的既开又闭的集列 (V_n) 使其并为 $K \setminus \{x\}$.

练习 29 以 $\mathcal{E}_+$ 表示集类 $\mathcal{E}$ 中的可数个相互不交成员的并所成的集类. 以 $\mathcal{E}_\delta$ 表示 $\mathcal{E}$ 中的可数个成员之交所成的集类. 现以 $\mathcal{E}$ 表示 $[0,1]$ 中的闭集全体.

据练习 26(3), 说明 $\mathcal{B}$ 包含所有开集 U 即可. 而据练习 27 得连续函数 $f: X \to [0,1]$ 使 $U = f^{-1}[0,1)$, 说明 $[0,1)$ 在 $\mathcal{E}_{+\delta+}$ 中即可. 命 D 是构造 Cantor 集 K 时移去的开集 O 所有构成开区间的端点集. 命 $P = K \setminus (D \cup \{1\})$, 则 $[0,1) \setminus P = O \cup D$ 是 O 的所有构成区间的闭包的无交并, 它因而在 $\mathcal{E}_+$ 中. 据练习 28 知 $K \setminus \{x\}$ 是 K 中的可数个闭集的无交并且

$$P = \bigcap \{K \setminus \{x\} | x \in D \cup \{1\}\},$$

所以 P 在 $\mathcal{E}_{+\delta}$ 中. 可见 $[0,1)$ 在 $\mathcal{E}_{+\delta+}$ 中.

练习 30 任取 (广义) 实数 b, 设 $h_0(x_0) < b$. 取 $r > 0$ 使

$$\sup\{f(y) | d(y, x_0) < r\} < b.$$

当 $d(x, x_0) < r$ 且 $d(y, x) < r - d(x, x_0)$ 时, $d(y, x_0) < r$. 因此

$$h_0(x) \leqslant \sup\{f(y) | d(y, x) < r - d(x, x_0)\} < b.$$

这样 $(h_0 < b)$ 是开集. 因此 h_0 上半连续. 现对任何 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned} h_0(x) &= f(x) \vee \overline{\lim_{y \to x}} f(x) \\ &\leqslant h(x) \vee \overline{\lim_{y \to x}} h(y) = h(x). \end{aligned}$$

由此得 (1) 成立. 同样 (2) 成立. (3) 是显然的.

练习 31 任取 $y \in \mathbf{c}_0$, 则 $\|x - y\|_\infty \geqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} |x_n|$ 源自 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$ 和下式

$$\sup_n |x_n - y_n| \geqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} |x_n - y_n|.$$

由此得 $d(x, \mathbf{c}_0) \geqslant \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |x_n|$. 为证明反向不等式, 命

$$y = (x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots) \in \mathbf{c}_0,$$

则 $d(x, \mathbf{c}_0) \leqslant \|x - y\|_\infty$. 由此得 $d(x, \mathbf{c}_0) \leqslant \sup\limits_{i > n} |x_i|$. 最后命 $n \to \infty$ 即可.

练习 32 命 $h(x) = f(x) - f(0)$, 这得 $h \in L$. 任取 $g \in L$, 则

$$\|f - h\| = |f(0)| = |f(0) - g(0)| \leqslant \|f - g\|.$$

可见 $\min\{\|g - f\| : g \in L\} = |f(0)|$. 因此 $d(f, L) = |f(0)|$.

练习 33 (1) 与 (2) 是显然的. (3) 当 $\omega(x_0) < b$ 时, 取 $r > 0$ 使 $\omega O(x,r) < b$. 当 $d(x,x_0) < r$ 时, 命 $s = r - d(x,x_0)$. 于是 $O(x,s) \subseteq O(x_0,r)$. 这样.

$$\omega(x) \leqslant \omega O(x,s) \leqslant \omega(x_0,r) < b.$$

从而 $O(x_0,r) \subsetneq (\omega < b)$. 因此 $(\omega < b)$ 是 X 的开集.

(4) $(\omega = 0)$ 是可列个开集列 $(\omega < 1/n) : n \geqslant 1$ 之交.

练习 34 提示: 因为 $\mathbf{H}$ 是完备度量空间 l^2 的闭集, 所以它完备.

(1) 当每个分量 $\lim P_i y = P_i y_0$ 时, 对任何正整数 n, 有

$$\begin{aligned}\overline{\lim}\,\|y - y_0\|_2^2 &= \overline{\lim} \sum_{i=1}^{\infty} |P_i y - P_i y_0|^2 \\ &\leqslant \overline{\lim} \sum_{i=1}^{n} |P_i y - P_i y_0|^2 + \sum_{i>n} \frac{1}{i^2} = \sum_{i>n} \frac{1}{i^2}.\end{aligned}$$

在上式中命 $n \to \infty$ 得 $\lim \|y - y_0\|_2 = 0$. 反之源自不等式

$$|P_n x - P_n x_0| \leqslant \|x - x_0\|_2.$$

(2) 可设 X 是无限集, 取其可列稠密集 D. 当 $\{a,b\} \subseteq D$ 且 $\{r,s\} \subseteq \mathbb{Q}_+$ 时, 使 $\overline{O(a,r)} \subseteq O(b,s) \neq X$ 的开球对 $(O(a,r),O(b,s))$ 排成一列

$$(U_1,V_1),(U_2,V_2),\cdots.$$

对于 $x \in X$, 若 $d(x,U_n) = 0$, 则 $x \in \overline{U_n} \subseteq V_n$. 于是可命

$$f(x) = \left(\frac{d(x,U_n)}{n(d(x,U_n) + d(x,X \setminus V_n))}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

由此得映射 $f : X \to \mathbf{H}$. 因为

$$\lim_{x \to x_0} \frac{d(x,U_n)}{d(x,U_n) + d(x,X \setminus V_n)} = \frac{d(x_0,U_n)}{d(x_0,U_n) + d(x_0,X \setminus V_n)}.$$

据 (1) 知 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. 由 x_0 的任意性知 f 连续.

对任何 $\varepsilon > 0$, 取有理数 s 使 $0 < 2s < \varepsilon$. 于是有 $b \in D$ 使 $d(x_0,b) < s$. 命 $V = O(b,s)$. 取有理数 r 使 $0 < 2r < s - d(x_0,b)$. 于是有 $a \in D$ 使 $d(x_0,a) < r$. 命 $U = O(a,r)$, 则 $x_0 \in U \subsetneq \overline{U} \subsetneq V$. 因此

$$\begin{aligned}&\lim_{f(x) \to f(x_0)} \frac{d(x,U)}{d(x,U) + d(x,X \setminus V)} \\ =&\frac{d(x_0,U)}{d(x_0,U) + d(x_0,X \setminus V)} = 0,\end{aligned}$$

其中第一个等式源自 (2). 可见有个 $\delta>0$ 使 $d(f(x),f(x_0))<\delta$ 时,

$$\frac{d(x,U)}{d(x,U)+d(x,X\setminus V)}<1.$$

由此得 $d(x,X\setminus V)>0$, 从而 $x\in V$. 换言之, $d(x,x_0)<2s<\varepsilon$. 由此也证明了 f 是单射. 可见 f 是嵌入.

练习 35 否则, 设 (E_n) 是 $\mathbb{R}$ 中的相互不交的非空闭集列, 其并为开区间 (0,1). 下面找两个正整数列 (k_n) 和 (l_n) 及 E_{k_n} 中的数 a_n 和 E_{l_n} 中的数 b_n 使

(1) $k_1<l_1<k_2<l_2<\cdots<k_n<l_n\cdots$.

(2) $a_1<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_1$.

(3) $i\leqslant l_n$ 时, $E_i\cap(a_k,b_k)=\varnothing$.

命 $k_1=1$ 及 $a_1=\sup E_{k_1}$. 使 $E_l\cap(a_1,1)$ 不空的第一个正整数 l 记为 l_1, 这个交集的下确界记为 b_1. 因为 E_{k_1} 和 E_{l_1} 是不交闭集, 所以 $a_1<b_1$. 显然 $i\leqslant k_1$ 时, E_i 与 (a_1,b_1) 不交. 归纳地取 k_{n+1} 为使 $E_k\cap(a_n,b_n)$ 不空的第一个正整数 k, 这个交集的上确界记为 a_{n+1}. 自然 $a_{n+1}<b_n$; 而 l_{n+1} 为使 $A_l\cap(a_{n+1},b_n)$ 不空的第一个正整数 l, 这个交集的下确界记为 b_{n+1}. 显然 $k_{n+1}<l_{n+1}$ 且 $a_{n+1}<b_{n+1}$.

命 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, 则恒有 $a_n<a<b_n$. 这样 x 不在每个 E_i 中. 矛盾.

练习 36 当 $P: c=y_0<\cdots<y_n=d$ 取遍 $[c,d]$ 的分点组时, 命

$$g_P(x)=\sum_{i=1}^{n}|f(x,y_i)-f(x,y_{i-1})|.$$

于是 $g_P:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续函数使 $g=\sup\limits_P g_P$, 从而 g 下半连续.

练习 37 (1) 对于 X 中任何两点 x_1 和 x_2 用三角不等式得

$$\begin{aligned}d(x_1,z)f(z)&\leqslant d(x_1,x_2)f(z)+d(x_2,z)f(z)\\&\leqslant bd(x_1,x_2)+d(x_2,z)f(z).\end{aligned}$$

上式关于所有 $z\in E$ 取下确界得 $g(x_1)\leqslant bd(x_1,x_2)+g(x_2)$. 交换 x_1 和 x_2 的位置得 $g(x_2)\leqslant bd(x_2,x_1)+g(x_1)$. 因此 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant bd(x_1,x_2)$, 这得 g 的一致连续性. 由此与 $d(\cdot,E)$ 的连续性得 h 的连续性.

(2) 本段恒设 $x\in E^{\mathrm{c}}$ 且 $z\in E$. 当 $0<\varepsilon<a/2$ 时, 有 $\delta>0$ 使

$$d(z,x_0)<\delta\Rightarrow|f(z)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

当 $d(x_0, z) \geqslant \delta$ 且 $d(x, x_0) < \delta/2$ 时， $d(x, z) > \delta/2$. 于是

$$\varliminf_{x \to x_0} \inf_{d(z, x_0) \geqslant \delta} \frac{d(x, z)}{d(x, E)} \geqslant \lim_{x \to x_0} \frac{\delta}{2d(x, x_0)} = +\infty.$$

回顾一下， $u \wedge v$ 表示两个实数 u 和 v 的最小者. 当 x 充分接近 x_0 时,

$$\begin{aligned} g(x) &= \inf\left\{\frac{d(x,z)f(z)}{d(x,E)} : d(z,x_0) < \delta\right\} \\ &\quad \wedge \inf\left\{\frac{d(x,z)f(z)}{d(x,E)} : d(z,x_0) \geqslant \delta\right\} \\ &\geqslant \inf\{f(x_0) - \varepsilon : d(z,x_0) < \delta\} \\ &\quad \wedge \inf\left\{\frac{ad(x,z)}{d(x,E)} : d(z,x_0) \geqslant \delta\right\}. \end{aligned}$$

于是 $\varliminf\limits_{x \to x_0} g(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$. 命 $\varepsilon \to 0$ 得 $f(x_0) \leqslant \varliminf\limits_{x \to x_0} g(x)$.

当 $d(x, x_0) < \delta/(2+\varepsilon)$ 时，取个 $z_0 \in E$ 使 $d(x, z_0) < (1+\varepsilon)d(x, E)$. 注意到 $d(x, E) \leqslant d(x, x_0)$, 得

$$\begin{aligned} d(z, x_0) &\leqslant d(z, x) + d(x, x_0) \\ &\leqslant (1+\varepsilon)d(x, x_0) + d(x, x_0) < \delta. \end{aligned}$$

当 x 充分接近 x_0 时,

$$\begin{aligned} g(x) &= \inf\left\{\frac{d(x,z)f(z)}{d(x,E)} : d(z,x_0) < \delta\right\} \\ &\quad \wedge \inf\left\{\frac{d(x,z)f(z)}{d(x,E)} : d(z,x_0) \geqslant \delta\right\} \\ &\leqslant \inf\left\{\frac{d(x,z_0)f(z_0)}{d(x,E)} : d(z,x_0) < \delta\right\} \\ &\quad \wedge \inf\left\{\frac{bd(x,z)}{d(x,E)} : d(z,x_0) \geqslant \delta\right\} \\ &\leqslant (1+\varepsilon)(f(x_0) + \varepsilon). \end{aligned}$$

于是 $\varlimsup\limits_{x \to x_0} g(x) \leqslant (1+\varepsilon)(f(x_0)+\varepsilon)$. 命 $\varepsilon \to 0$ 得 $\varlimsup\limits_{x \to x_0} g(x) \leqslant f(x_0)$.

(3) 提示: 结论源自 (1) 和 (2) 及 f 本身的连续性.

§5.4 完备与紧

练习 1 在 $\mathbb{R}$ 上取度量 $d(x,y)=|x-y|$ 和度量

$$d_1(x,y)=2|\arctan x-\arctan y|.$$

因为 $d(x,x_0)\to 0$ 当且仅当 $d_1(x,x_0)\to 0$, 所以 $(\mathbb{R},d)$ 和 $(\mathbb{R},d_1)$ 中的开集都一样. 现在, $(n)_{n=1}^{\infty}$ 不是 $(\mathbb{R},d)$ 的基本序列, 但它是 $(\mathbb{R},d_1)$ 的基本序列:

$$\lim_{n,l\to\infty} d_1(n,l)=|\pi-\pi|=0.$$

又 $(\mathbb{R},d_1)$ 不完备. 否则设 $(n)_{n=1}^{\infty}$ 这个基本序列逼近 x, 则

$$\lim_{n\to\infty} d_1(n,x)=|\pi-2\arctan x|=0.$$

于是 $x=+\infty$, 矛盾. 熟知 $(\mathbb{R},d)$ 完备.

练习 2 只证明 (1): 对于 $\varepsilon>0$, 命 $\delta=\varepsilon/(c+1)$. 当 $d(x_1,x_2)<\delta$ 时,

$$d(f(x_1),f(x_2))\leqslant cd(x_1,x_2)<\varepsilon.$$

练习 3 设 $r>c$, 则有 (与 x 有关的)$\delta_0>0$ 使 $z\in E$ 且 $\|z-x\|<\delta$ 时,

$$d(f(z),f(x))<r\|z-x\|.$$

因此 f 连续. 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时, 命 $g(t)=d(f(x+t(z-x)),f(x))$, 则

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{s\to t}}\,|g(s)-g(t)|/|s-t|\\ \leqslant&\overline{\lim_{s\to t}}\,\frac{d(f(x+s(z-x)),f(x+t(z-x)))}{|s-t|}\\ \leqslant& c\|z-x\|.\end{aligned}$$

据 §4.1 练习 21 知 $|g(1)-g(0)|\leqslant c\|z-x\|$, 这是要证明的不等式.

另证: 命 $T=\{t|d(g(t),g(0))\leqslant rt\|z-x\|\}$, 它含 0. 命 $t_0=\sup T$. 由 g 的连续性知 t_0 在 T 中. 若 $t_0<1$, 则有 $t_1>t_0$ 使 $|g(t_1)-g(t_0)|<r(t_1-t_0)|\|z-x\|$. 于是

$$|g(t_1)-g(0)|\leqslant rt_1\|z-x\|.$$

这与 t_0 的极大性矛盾, 从而 $t_0=1$. 这样

$$d(f(z),f(x))\leqslant r\|z-x\|.$$

命 $r\to c$ 即可.

练习 4 取 X 的稠密集 $\{x_i|i\in\mathbb{Z}_+\}$. 命 $E(i)=B(x_i,2^{-2})$ 则 $(E(i))_{i=1}^{\infty}$ 是直径不过 2^{-1} 的闭集列，其并为 X.

又 $E(i)\cap B(x_j,2^{-3}):j\geqslant 1$ 是些直径不过 2^{-2} 的闭集，去了其中的空集后排成一列 $(E(i,j))_{j=1}^{\infty}$(允许重复)，这个闭集列的并为 $E(i)$.

如此下去得 X 中的闭集簇 $\{E(k_1,\cdots,k_n)|n,k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Z}_+\}$ 使

$$\begin{aligned}&\mathrm{diam}E(k_1,\cdots,k_n)\leqslant 2^{-n},\\&E(k_1,\cdots,k_n)=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}E(k_1,\cdots,k_n,i).\end{aligned}$$

于是 $(E(k_1,\cdots,k_n))_{n=1}^{\infty}$ 是完备空间 X 中直径趋向 0 的闭集套，取其交点 $f(k_1,k_2,\cdots)$，得映射 $f:\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}\to X$，先证明其局部 Lipschtiz 性质. 任取 $k,l\in\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}$ 使 $d(k,l)<1$，取 n 使 $2^{-n}\leqslant d(k,l)<2^{1-n}$. 当 $k_i\neq l_i$ 时，$d(k,l)\geqslant 2^{1-i}$，可见 $i>n$. 于是 $i\leqslant n$ 时， $k_i=l_i$. 这样

$$\begin{aligned}&\{f(k),f(l)\}\subseteq E(k_1,\cdots,k_n)\\\Rightarrow&d(f(k),f(l))\leqslant 2^{-n}\leqslant d(k,l).\end{aligned}$$

现证明 f 的满性. 对任何 $x\in X$，归纳地命 $k_1=\min\{i|x\in E(i)\}$ 及

$$k_{n+1}=\min\{i|x\in E(k_1,\cdots,k_n,i)\}.$$

这样 x 是闭集套 $(E(k_1,\cdots,k_n))_{n=1}^{\infty}$ 的交点. 按定义， $f(k_1,k_2,\cdots)=x$.

练习 5 先说明 K 中的每个单点集 $\{x\}$ 都是空间 K 的疏朗集. 将 x 写成三进位小数 $0.a_1a_2\cdots$，其中每个 a_n 非 0 即 2. 如果无限多项 a_i 非 0，命 $x_n=0.a_1\cdots a_n$. 这样 (x_n) 是 K 中的异于 x 但逼近 x 的序列；如果有限多项 a_0 非 0. 可设 $i>l$ 时， $a_i=0$. 命

$$x_n=(0.a_1\cdots a_l)+\frac{2}{3^{n+l}}.$$

于是 (x_n) 是 K 中的异于 x 但逼近 x 的序列. 若 $\{x\}$ 非疏朗，即 $\{x\}$ 是 K 的开集，则有 $r>0$ 使 $(x-r,x+r)\cap K=\{x\}$. 设 $n\geqslant m$ 时， $|x_n-x|<r$，则

$$\{x_n|n\geqslant l\}\subseteq(x-r,x+r)\cap K=\{x\}.$$

矛盾. 因为 K 完备，它不能表示成可数个疏朗集之并. 这样 K 不可数.

练习 6 不矛盾. 因为 $\mathbb{Z}$ 的单点集都是 $\mathbb{Z}$ 的既开又闭的集，所以 $\mathbb{Z}$ 无非空疏朗集. 这样 $\mathbb{Z}$ 自然不会是可列个疏朗集之并.

练习 7 取疏朗集列 $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ 使其并为 S. 因为

$$\overline{(X\setminus S_n)^\circ}=X\setminus(\overline{S_n})^\circ=X,$$

所以 $(X\setminus S_n)^\circ : n\geqslant 1$ 是 X 中稠密的开集列, 其交集是 X 的稠密集 (见 Baire 纲定理) 且是 $X\setminus S$ 的子集, 所以 $X\setminus S$ 在 X 中稠密.

练习 8 设 $d(x_1,x_2)<\delta$ 时, $d(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$. 取 A 的有限 δ- 网 E, 则 $f(E)$ 是 $f(A)$ 的有限 ε- 网.

练习 9 据 §5.3 练习 19, V 上有个等价度量 ρ 使 (V,ρ) 完备. 据 Baire 纲定理知 (V,ρ) 是 Baire 空间和第二纲的, 而这两个性质只与拓扑有关, 因此 (V,d) 是 Baire 空间和第二纲的.

练习 10 写 $E=\{e_n|n\in\mathbb{Z}_+\}$, 作有限维线性子空间 $X_n=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和它们的并 $Y=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}X_n$, 则 $Y=\operatorname{span}E$. 注意到 X_n 是 X 的闭集但无内点 (参见 §5.2 范数拓扑下的 (7)), 它是疏朗集. 因此 Y 是第一纲的, 据 Baire 纲定理知 $Y\neq X$.

练习 11 (1)⇒(2): 作连续函数 $f_n=f\wedge n$, 则 (f_n) 逐点递增至 f. 这样 (f_n) 一致逼近 f. 于是有 n 使 $f-f_n<1$. 由此得 $f<n+1$.

(2)⇒(3): 若 f 无最大值, 命 $b=\sup f(X)$ 及 $g(x)=1/(f(x)-b)$, 则 g 是 X 上的连续函数使 $\sup g(X)=+\infty$, 矛盾.

设 (3) 成立, 说明 X 中的闭集套 (E_n) 有公共交点即可. 据强级数判断法, 连续函数项级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1}d(x,E_n)\wedge 2^{-n}$ 一致收敛于一个连续函数 $f(x)$. 当 $x\in E_n$ 时, $f(x)\leqslant\sum\limits_{i>n}2^{-i}=2^{-n}$. 这表明 $\inf f(X)=0$. 取 f 的最小值点 x_0, 则 $f(x_0)=0$. 于是每个正整数 n 使 $d(x_0,E_n)=0$. 这说明 x_0 是所有 E_n 的公共点.

练习 13 S 是列紧集当且仅当 $\overline{S}$ 是列紧集当且仅当 $\overline{S}$ 是紧集.

练习 14 提示: 说明 $C[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密即可.

练习 15 取 Y 的 1/4- 网 $\{y_1,\cdots,y_m\}$. 将 y_1 适当重复后可设 $m=2^{k_1}$, 于是 Y 是直径不过 1/2 的紧集 $Y_{1i}=\overline{O(y_i,1/4)}:i=1,\cdots,2^{k_1}$ 之并. 同样, Y_{1i} 是直径不过 $1/2^2$ 的紧集 $Y_{2j}:2^{k_2}(i-1)<j\leqslant 2^{k_2}i$ 之并. 如此下去, 可得正整数列 (k_n) 和直径不过 $1/2^n$ 的非空紧集 $Y_{ni}:1\leqslant i\leqslant 2^{l_n}$ 使每个 Y_{ni} 是 $Y_{(n+1)j}:2^{k_{n+1}}(i-1)<j\leqslant 2^{k_{n+1}}i$ 之并, 其中 $l_n=k_1+\cdots+k_n$.

作 Cantor 集时第 l_n 次剩下 2^{l_n} 个相互不交的长度为 $1/3^{l_n}$ 的闭区间 — 从左至右依次记为 $I_{1i},i=1,\cdots 2^{l_n}$. 显然

$$I_{(n+1)j}\subseteq I_{ni}:2^{k_{n+1}}(i-1)<j\leqslant 2^{k_{n+1}}i,i=1,\cdots,2^{l_n}.$$

现构造连续映射 $f:K\to Y$. 对于 $x\in K$ 及每个正整数 n, 有唯一 i_n 使 I_{ni_n} 包含 x. 这样 x 是闭区间套 (I_{ni_n}) 的唯一交点. 注意到 (Y_{ni_n}) 是 Y 中的直径逼近 0 的闭集套, 它们有唯一公共交点 $f(x)$. 当 $x'\in K$ 满足 $|x'-x|<1/3^{l_n}$ 时, 有个 i_n 使 x' 与 x 同在 I_{ni_n} 中. 这样 $f(x')$ 与 $f(x)$ 同在 Y_{ni_n} 中. 于是 $d(f(x'),f(x))\leqslant 1/2^n$.

任取 $y\in Y$, 归纳地命 $i_1=\min\{j|y\in Y_{1j}\}$ 及

$$i_n=\min\{j|y\in Y_{nj}\subseteq Y_{(n-1)i_{n-1}}\}.$$

这样 (I_{ni_n}) 的公共交点 x 满足 $f(x)=y$. 因此 f 是满射.

练习 16 (1) 任取 $y\in\forall_S W$. 当 $x\in S$ 时, (x,y) 在开集 W 中. 取 Y 的开集 V_x 与 X 的开集 U_x 使 $(x,y)\in U_x\times V_x\subseteq W$. 由此得 S 的开覆盖 $U_x:x\in S$. 取其有限子覆盖 $U_x:x\in F$. 命 $V=\bigcap\{V_x:x\in F\}$. 这是包含 y 的开集. 当 $y'\in V$ 而 $x'\in S$ 时, 取 $x\in F$ 使 $x'\in U_x$. 于是 (x',y') 在 W 中. 这表明 $y'\in V\subseteq\forall_S W$. 因此 $\forall_S W$ 是开集.

注意到 $\exists_S E=(\forall_X E^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ 与 (1) 得 (2). 而 (3) 即 (2). 由此并交换 X 和 Y 的位置且交换 S 和 T 的位置得 (4) 、 (5) 和 (6).

练习 17 作 [-1,1] 上连续函数列 (f_n) 如下

$$f_n(x)=\{\pm 1,2^{-n}\leqslant\pm x\leqslant 1;2^n x,-2^{-n}\leqslant x\leqslant 2^{-n}\}.$$

设 $n<l$, $|x|\geqslant 2^{-n}$ 时 $f_n(x)-f_l(x)=0$; $|x|\leqslant 2^{-n}$ 时 $|f_n(x)-f_l(x)|<2$. 于是 $\|f_n-f_l\|_1<2^{2-n}$. 这样 f_n 是 L^1- 基本序列. 但

$$|f_l(1/2^l)-f_n(1/2^l)|=1-2^{n-l},$$

所以 $\|f_{2n}-f_n\|=1-2^{-n}$. 这样

$$\varlimsup_{n,l\to\infty}\|f_l-f_n\|\geqslant\lim_{n\to\infty}(1-2^{-n})=0.$$

于是 (f_n) 是 $C[-1,1]$ 中的非基本序列.

练习 18 对于 $f \in C[0,1]$ 与 $\varepsilon > 0$, 因为 f 一致连续, 可取正整数 n 使 $|x-z| < 1/n$ 时, $|f(x)-f(z)| < \varepsilon$. 命 $t_i = i/n$,

$$g(x) = f(t_0)\chi_{\{0\}}(x) + \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\chi_{(t_{i-1},t_i]}(x).$$

注意到 $\chi_{(s,t]} = \chi_{[0,t]} - \chi_{[0,s]}$, 所以 g 在 A 中.

显然 $g(0) = f(0)$. 当 $0 < x \leqslant 1$ 时, 有唯一 i 使 $t_{i-1} < x \leqslant t_i$, 从而 $g(x) = f(t_i)$. 这样 $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$. 总之, $\|g - f\| \leqslant \varepsilon$. 这样 A 在 $C[0,1]$ 中稠密. 但请注意 A 不是 $C[0,1]$ 的子集.

练习 19 命 $r = 1/4$ 及 $B_n = \{x \in X : \|x\| \leqslant r^n\}$. 命 $S_1 = S$, 取 $2S_1$ 的有限 r- 网 $D_1 \subseteq 2S_1$. 作预紧集 $S_2 = \bigcup\{(2S_1 - z) \cap B_1 | z \in D_1\}$. 取 $2S_2$ 的有限 r^2- 网 D_2. 作预紧集 $S_3 = \bigcup\{(2S_2 - z) \cap B_2 | z \in D_2\}$. 如此下去得预紧集序列 (S_n) 和 $2S_n$ 的有限 r^n- 网 $D_n \subseteq 2S_n$ 使

$$S_{n+1} = \bigcup\{(2S_n - z) \cap B_n | z \in D_n\}.$$

命 $D = \bigcup\limits_n D_n$, 当 $n > 2$ 且 $z \in D_n$ 时, $\|z\| \leqslant 2r^{n-1}$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\in D_n} \|z\| = 0$. 当 $x \in S$ 时, 取 $z_1 \in D_1$ 使 $\|2x - z_1\| \leqslant r$. 由此知 $2x - x_1$ 在 S_2 中, 取 $z_2 \in D_2$ 使 $\|2(2x - x_1) - x_2\| < r^2$. 如此下去得序列 (z_n) 使 $z_n \in D_n$ 且恒有 $\|x - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{z_i}{2^i}\| \leqslant \frac{r^n}{2^n}$. 可见 $x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{z_i}{2^i} + \frac{z_n}{2^n}) \in \overline{\operatorname{cov}}\, D$.

练习 20 (1) 无妨设 a 和 b 都非 0. 取非负整数 n, l 和整数 a_1, b_1 使 $a = p^n a_1$ 而 $b = p^l b_1$. 注意到 $ab = p^{n+l} a_1 b_1$ 且 p 不整除 $a_1 b_1$ 即可.

(2) 如果 x 还有表达式 b_1/a_1, 对式子 $a_1 b = a b_1$ 应用 (1) 得

$$\operatorname{ord}_p a_1 + \operatorname{ord}_p b = \operatorname{ord}_p a + \operatorname{ord}_p b_1.$$

两边相减即可. (3a)~(3c) 与 (4a)~(4d) 都易证明.

(5) 源自 (4a)~(4d). (6) 只证明必要性: $d_p(z,x) < r$ 时,

$$d_p(z,y) \leqslant \max\{\mathrm{d}_p(z,x), d_p(x,y)\} < r.$$

于是 $O_p(x,r) \subseteq O_p(y,r)$; 反向包含类似可得.

练习 21 (1) 式子 $d_p(x,z) \leqslant \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}$ 两边作为 $\mathbb{Q}_p^3$ 上连续函数在稠密集 $\mathbb{Q}^3$ 使这式子成立，据 §5.3 定理 2 知这式子总成立.

(2) 注意到 $d(x_n, x_l) \leqslant \max\{d_p(x_i, x_{i+1}) | n \leqslant i < l\}$, 序列 (x_n) 是基本序列当且仅当 $\lim\limits_{i\to\infty} d(x_i, x_{i+1}) = 0$.

(3) 记 $A(x,y) = x + y$. 由此得加法运算 $A : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. 因为

$$|A(x,y) - A(x_1,y_1)|_p \leqslant |x - x_1|_p + |y - y_1|_p,$$

所以 A 一致连续，这样 A 有唯一一致连续延拓

$$A_p : \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p.$$

将 $A_p(x,y)$ 仍记为 $x+y$. 记 $M(x,y) = xy$, 由此得乘法运算 $M : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. 记 $B_r = \{x \in \mathbb{Q} : |x|_p \leqslant r\}$. 当 $x_i, y_i \in B_r$ 时，

$$|M(x_1,y_1) - M(x_2,y_2)|_p \leqslant r|x_1 - x_2|_p + r|y_1 - y|_2.$$

所以限制 $M : B_r \times B_r \to \mathbb{Q}$ 一致连续，它有唯一致连续延拓

$$M_r : \tilde{B}_r \times \tilde{B}_r \to \mathbb{Q}_p.$$

其中 $\tilde{B}_r = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leqslant r\}$. 将 $M_r(x,y)$ 仍记为 xy. 当 $r < s$ 时，限制 $M_s : \tilde{B}_r \times \tilde{B}_r \to \mathbb{Q}_p$ 也是 $M : B_r \times B_r \to \mathbb{Q}$ 的连续延拓，所以当 $x, y \in \tilde{B}_r$ 时， $M_r(x,y) = M_s(x,y)$. 这样 xy 的定义与 r 的取法无关.

交换律： $x + y = y + x$. 注意到这式子两边作为 $\mathbb{Q}_p^2$ 至 $\mathbb{Q}_p$ 的连续映射限制在稠密集 $\mathbb{Q}^2$ 上相等，据 §5.3 定理 2 这式子总成立.

结合律： $(x + y) + z = x + (y + z)$. 注意到这式子两边作为 $\mathbb{Q}_p^3$ 至 $\mathbb{Q}_p$ 连续映射限制在稠密集 $\mathbb{Q}^3$ 上相等，据 §5.3 定理 2 知这式子总成立.

零元律： $x + 0 = x$. 注意到这式子两边作为 $\mathbb{Q}_p$ 至 $\mathbb{Q}_p$ 的连续映射限制在稠密集 $\mathbb{Q}$ 上时相等，据 §5.3 定理 2 知这式子总成立. 同样可证明以下

负元律：每个 x 对应个 $-x$ 使 $x + (-x) = 0$.

分配律： $a(x + y) = ax + ay$.

分配律： $(a + b)x = ax + bx$.

单位律： $1x = x$.

结合律： $(ab)x = a(bx)$.

(4) 对于 $x \in \mathbb{Q}_p$, 命 $|x|_p = d_p(x, 0)$. 注意到 (4a)~(4e) 这些式子两边作为 $\mathbb{Q}_p^2$ 上连续函数限制在稠密集 $\mathbb{Q}^2$ 上相等，据 §5.3 定理 2 知这些式子总成立. 现在 $|x|_p = 0$ 当且仅当 $d_p(x, 0) = 0$ 当且仅当 $x = 0$, (4f) 成立.

(5) 当 x 是非零 p 进数时，有一列有理数 (x_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-x|_p=0$. 据 (4d) 和 (4f) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|_p=|x|_p\neq 0$, 可设 x_n 都非零. 于是

$$\overline{\lim_{n,l\to\infty}}|x_n^{-1}-x_l^{-1}|_p=\overline{\lim_{n,l\to\infty}}\frac{|x_n-x_l|_p}{|x_n|_p|x_l|_p}=0.$$

这表明 (x_n^{-1}) 是 $(\mathbb{Q},d_p)$ 中的基本序列，其极限记为 x^{-1}. 在下式

$$x_n^{-1}x_n=x_nx_n^{-1}=1$$

中求极限得 $x^{-1}x=xx^{-1}=1$. 这样 x 可逆，从而 $\mathbb{Q}_p$ 为域.

(6) 命 $y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛当且仅当 (y_n) 是基本序列当且仅当 (据 (2) 知)$\lim d_p(y_{n-1},y_n)=0$ 当且仅当 $\lim|x_n|_p=0$.

(7) 取互素整数 a 和 b 使 $a\geqslant 1$ 且 $x=b/a$. 由 $p^{-\operatorname{ord}_p x}\leqslant 1$ 知

$$\operatorname{ord}_p b-\operatorname{ord}_p a=\operatorname{ord}_p x\geqslant 0.$$

因为 a 和 b 互素，所以 p 不整除 a. 可见， p^i 与 a 互素. 取整数 m 和 n 使 $ma+np^i=1$, 则由 $bm=axm$ 知

$$|bm-x|_p=|x|_p|n|_p|p^i|_p\leqslant p^{-i}.$$

据剩余除法得整数对 l 和 k 使 $0\leqslant k<p^i$ 且 $bm=lp^i+k$, 则

$$\begin{aligned}|k-x|_p&=|bm-x-lp^i|_p\\&\leqslant\max\{|bm-x|_p,|lp^i|_p\}\leqslant p^{-i}.\end{aligned}$$

练习 22 因为 X 无孤立点，所以 X 中有两点 [0] 和 [1] 使

$$r_1:=d([0],[1])/3>0.$$

因为 [0] 非孤立点，所以 X 中有两点 [00] 和 [01] 使

$$s:=d([00],[01])/3>0, B([00],s)\cup B([01],s)\subseteq O([0],r_1).$$

因为 [1] 非孤立点，所以 X 中有两点 [10] 和 [11] 使

$$t:=d([10],[11])/3>0, B([10],t)\cup B([01],t)\subseteq O([0],r_1).$$

命 $r_2=s\wedge t\wedge 1/2$. 如此下去得到极限为 0 的正数列 (r_n), 以及对任何非 0 即 1 的数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 得到 X 中的点列 $([a_1\cdots a_n])_{n=1}^{\infty}$ 使

$$d([a_1\cdots a_n0],[a_1\cdots a_n1])>2r_{n+1},$$

$$B([a_1\cdots a_n0],r_{n+1})\cup B([a_1\cdots a_n1],r_{n+1})\subseteq O([a_1\cdots a_n],r_n).$$

据闭集套定理, $(B([a_1\cdots a_n],r_n))_{n=1}^{\infty}$ 有唯一交点 $[a_1\cdots a_n\cdots]$.

如果 $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ 是不同于 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的 0-1 数列, 则有 k 使 $i<k$ 时 $a_i=b_i$ 而 $a_k\neq b_k$. 于是 $B([a_1\cdots a_k],r_k)$ 和 $B([b_1\cdots b_k],r_k)$ 无交点. 这样

$$[a_1\cdots a_n\cdots]\neq[b_1\cdots b_n\cdots].$$

可见 $(a_1,\cdots,a_n,\cdots)\mapsto[a_1\cdots a_n\cdots]$ 是 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 到 X 的单射, 这样 X 的势不小于 $2^{\aleph_0}$ 即 $\aleph$.

练习 23 因为 E 是无孤立点的完备度量空间. 据练习 22, $|E|\geqslant\aleph$. 显然 $|E|\leqslant\aleph$.

练习 24 据 Cantor-Bendixson 定理知 E 包含一个完全集. 据练习 23 知 E 有连续势.

练习 25 当 $x>1$ 时, 命 $f(x)=f(1)$. 当 $x<0$ 时, 命 $f(x)=f(0)$. 这将 f 连续延拓到了 $\mathbb{R}$ 上. 命 $U=\{v\in\mathbb{R}:|v|>0\}$. 作连续函数 $g:[0,1]\times U\to\mathbb{R}$ 如下

$$g(x,v)=\left|\frac{f(x+v)-f(x)}{v}-f'(x)\right|.$$

任取正整数 n 及 $x\in[0,1]$, 存在正整数 k 使 $0<|v|<2^{-k}$ 时, $g(x,v)<2^{-n}$. 因此若命开集 $U_k=\{v\in\mathbb{R}:0<|v|<2^{-k}\}$, 则

$$[0,1]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x|\forall v\in U_k:g(x,v)<2^{-n}\}.$$

上式右端大括号界定的集合记为 D_n^k. 命 $E_{kl}=\{v\in\mathbb{R}|2^{-k-l}\leqslant|v|\leqslant 2^{-k-1/l}\}$, 这是紧集. 将 $[0,1]\times E_{kl}$ 视为 $[0,1]\times U_k$ 的子空间. 命 $\pi:[0,1]\times U_k\to[0,1]$ 是投影, 则

$$\begin{aligned}(D_n^k)^{\mathrm{c}}&=\pi(([0,1]\times U_k)\cap(g\geqslant 2^{-n}))\\&=\bigcup_{l\geqslant l}\pi(([0,1]\times E_{kl})\cap(g\geqslant 2^{-n})).\end{aligned}$$

据练习 16 知上面并符号 $\cup$ 之后的集是 $[0,1]$ 中的闭集, 从而是紧集. 可见, D_n^k 是 G_δ- 型集. 因为 $(D_n^k)_{k=1}^{\infty}$ 递增至 $[0,1]$, 有 k_n 使 $|D_n^{k_n}|_1\geqslant 1-2^{-n}\delta$. 命 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n^{k_n}$, 这是 G_δ- 型集使 $|E^{\mathrm{c}}|<\delta$. 设 $2^{-n}<\varepsilon$, 命 $\eta=2^{-k_n}$ 即可.

练习 26 提示: 首先 E_1 是紧集. 作映射 $f:E_1^n\to E_n$ 如下,

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x_1+\cdots+x_n,$$

则 f 是连续满射, 从而 E_n 是紧集. 余下部分参考 §5.2 练习 16(4) 的解.

练习 27 闭集 $E_n \setminus E_n^\circ$ 不含内点，它是疏朗集. 记 $U = \bigcup_n E_n^\circ$, 则

$$X \setminus \overline{U} \subseteq \bigcup_n (E_n \setminus E_n^\circ)$$

且上式左边为开集而右边为第一纲集，所以 $X \setminus \overline{U}$ 是空集. 于是 $X = \overline{U}$.

练习 28 固定 $c \in X$. 对于 $x \in X$ 及 $y \in X$, 命 $\varphi_x(y) = d(y,x) - d(y,c)$. 因为 $|\varphi_x(y)| \leqslant d(x,c)$, 故 φ_x 在 Banach 空间 $l^\infty(X)$ 中. 现在

$$|\varphi_x(y) - \varphi_{x'}(y)| = |d(y,x) - d(y,x')| \leqslant d(x,x').$$

取 $y = x$, 则上面的不等式成为等式. 因此 $\|\varphi_x - \varphi_{x'}\| = d(x,x')$. 命 $Y = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_x | x \in X\}$, 则 $x \mapsto \varphi_x$ 是 X 至 Banach 空间 Y 的等距嵌入. 当 X 可分时， Y 也可分.

练习 29 因为 U_i 是 U 的相对开集，所以 $U \setminus U_i = U \cap \overline{U \setminus U_i}$. 这样

$$U_i = U \setminus \overline{U \setminus U_i} \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} (U \setminus \overline{U \setminus U_i}).$$

因为 $\overline{U} = \overline{U_i} \cup \overline{U \setminus U_i}$, 由此得 $\overline{U} \setminus \overline{U \setminus U_i} \subseteq \overline{U_i}$. 从而 $\overline{U}^\circ \setminus \overline{U \setminus U_i} \subseteq \overline{U_i}^\circ$. 命 $V = \overline{U}^\circ \setminus \overline{\overline{U}^\circ \cap U}$, 这是含于 $\overline{U}^\circ$ 中的开集. 于是

$$\begin{aligned}
& V \cap \overline{\overline{U}^\circ \cap U} = \varnothing \Rightarrow V \cap (\overline{U}^\circ \cap U) = \varnothing \\
\Rightarrow & V \cap U = \varnothing \Rightarrow V \cap \overline{U} = \varnothing \Rightarrow V = \varnothing \\
\Rightarrow & \overline{U}^\circ \subseteq \overline{\overline{U}^\circ \cap U} = \overline{\overline{U}^\circ \cap \bigcup_{i \in I} (U \setminus \overline{U \setminus U_i})} \\
& \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} (\overline{U}^\circ \setminus \overline{U \setminus U_i})} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} \overline{U_i}^\circ} \subseteq \overline{U}^\circ,
\end{aligned}$$

这得等式 $\overline{U}^\circ = \overline{\bigcup\{\overline{U_i}^\circ | i \in I\}}$. 由此得 (1).

为证明 (2), 据 Zorn 引理，取极大相互不交开集簇 $\{V_j | j \in J\}$ 使每个 $U \cap V_j$ 为 X 的第一纲集. 作开集 $V = \bigcup_{j \in J} V_j$. 取 X 中的一簇疏朗集 S_{jn} : $j \in J, n \in \mathbb{Z}_+$ 使 $U \cap V_j = \bigcup\{S_{jn} | n\}$. 命 $S_n = \bigcup\{S_{jn} | j \in J\}$.

因为 $V_j \cap S_n = S_{jn}$, 这是 S_n 的相对开集，又是 X 的疏朗集. 据 (1) 知 S_n 是疏朗集. 这样 $U \cap V = \bigcup\{S_n | n\}$ 是第一纲集.

说明 V^c 是 X 的疏朗集即可. 否则, 它包含一个非空开集 W. 据 $\{V_j | j \in J\}$ 的极大性知 $U \cap W$ 是 X 的第二纲集. 特别地，有个 i 使 $U_i \cap W$ 不空. 上面已得知 $U_i = U \setminus \overline{U \setminus U_i}$. 作开集 $G = W \setminus \overline{U \setminus U_i}$, 则

$$U \cap G = (U \cap W) \setminus \overline{U \setminus U_i} \subseteq U_i,$$

$$V \cap G = (V \cap W) \setminus \overline{U \setminus U_i} = \varnothing.$$

这样 $U \cap G$ 是 X 的第一纲集且 G 与诸 V_j 不交. 这与 $\{V_j|j \in J\}$ 的极大性矛盾.

练习 30 任取 X 中的闭集 E, 则 E 也是紧集. 于是 $(f^{-1})^{-1}(E) = f(E)$ 是 Y 中的紧集因而是闭集, 这样 f^{-1} 连续.

练习 31 当 $a \in D$ 时, 作 X 的开集 $U_a = X \setminus \{a\}$. 因为 a 非孤立点, 所以 U_a 在 X 中稠密. 据 Baire 纲定理, $X \setminus D = \bigcap\limits_{a \in D} X \setminus \{a\}$ 是 X 的稠密 G_δ-型集. 又 $(X \setminus D) \cap D = \varnothing$, 再据 Baire 纲定理 D 非 G_δ- 型集.

练习 32 按条件知 f_0 是 f_n 的第 n 阶导函数. 将 f_0 的零点集记为 E, 这是闭集. 任取 [0,1] 的子区间 $[a,b]$. 作闭集 $E_n = [a,b] \cap f_n^{-1}\{0\}$. 按条件得 $[a,b] = \bigcup\{E_n|n \geqslant 0\}$. 据 Baire 纲定理知某个 E_n 包含一个长度非零的开区间 I. 这样 $f_n(I) = \{0\}$, 从而 $f_0(I) = \{0\}$. 这说明 $E \cap [a,b]$ 不空, 从而 E 在 $[0,1]$ 中稠密. 这样 $E = [0,1]$.

练习 33 作 X 的闭集 $E_n = \bigcap\limits_{f \in \mathcal{G}} (|f| \leqslant n)$. 对每个 $x \in X$, 有个 n 使 $f \in \mathcal{G}$ 时 $|f(x)| \leqslant n$. 这样 $E_n : n \geqslant 1$ 的并为 X. 从而有个 E_n 不疏朗. 命 $U = E_n^\circ$ 即可.

练习 34 提示: 考虑紧集 $A \times B$ 上连续函数 $(x,y) \mapsto d(x,y)$.

练习 35 只证明充分性: 取 A 的预紧的 ε- 网 S, 取 S 的有限 ε- 网 E, 则 E 为 A 的有限 2ε- 网.

练习 36 只证明充分性: 任取 $x_0 \in X$ 和 X 中逼近 x_0 的序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$, 作 X 中的紧集 $A = \{x_n|n \geqslant 0\}$ 和 Y 中紧集 $B = f(A)$. 命 $g : B \to A$ 是限制 $(f : A \to B)$ 的逆映射. 当 E 是 A 的闭集时, 它是紧集, 于是 $g^{-1}(E) = f(E)$ 是 B 的紧集, 自然也是 B 的闭集. 这样 g 连续. 据练习 30 知 g 是同胚, 从而 $f : A \to B$ 连续. 这样 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. 由 x_0 的任意性知 f 连续.

练习 37 当 E 是 Y 的闭集时, $x \in f^{-1}(E)$ 当且仅当有个 $y \in E$ 使 $f(x) = y$ 当且仅当有个 $y \in Y$ 使 $(x,y) \in (\mathrm{gr}\, f) \cap (X \times E)$. 于是

$$f^{-1}(E) = \exists^Y(\mathrm{gr}\, f \cap (X \times E)),$$

其中符号 $\exists^Y$ 见于练习 16. 又据此练习知 $f^{-1}(E)$ 是 X 的闭集, 从而 f 连续.

练习 38 设线性无关的单位向量 $x_1, \cdots, x_n$ 已取好使 $i \neq j$ 时 $\|x_i - x_j\| \geqslant 1$, 命 $L = \operatorname{span}_{i \leqslant n} x_i$. 取个 $z \in X$ 使 $d(z, L) = 1$, 取 L 中的序列 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ 使 $\lim_{k\to\infty} \|z - y_k\| = 1$. 可见 $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ 是有界序列, 取子列后可设它收敛于 $y_0 \in L$. 命 $x_{n+1} = z - y_0$, 则 $\|x_{n+1}\| = 1$ 且

$$d(x_{n+1}, L) = d(z, L) = 1.$$

从而当 $i < n + 1$ 时, $\|x_i - x_{n+1}\| \geqslant 1$.

练习 39 提示: 取 X 的疏朗集 E, 则 $E \times Y$ 是 Y 的疏朗集:

$$\overline{E \times Y}^{\circ} = \overline{E}^{\circ} \times Y = \varnothing.$$

练习 40 提示: 必要性: 命 $E = \overline{S}$, 则 $E^{\circ} = \varnothing$. 于是 $\partial E = E$. 充分性:

$$(\partial E)^{\circ} \subseteq \partial E \cap E^{\circ} = \varnothing.$$

练习 41 (1)$\Rightarrow$(3): 作开集 $V = (E \setminus A_1) \cup B_1$. 于是

$$E = (V \setminus B_1) \cup (E \cap (A_1 \cup B_1)).$$

可见命 $A_3 = B_1$ 及 $B_3 = E \cap (A_1 \cup B_1)$ 即可.

(3)$\Rightarrow$(1): 注意到 $V = (E \setminus B_3) \cup (V \cap (A_3 \cup B_3)$ 即可. 类似到 (2)$\Leftrightarrow$(4).

(3)$\Rightarrow$(4): 命 $F = \overline{V}$ 而 $A_4 = A_3 \cup \partial V$ 且 $B_4 = B_3$ 即可.

(4)$\Rightarrow$(3): 命 $V = F^{\circ}$ 而 $A_3 = A_4$ 且 $B_3 = (\partial F \setminus A_4) \cup B_4$ 即可.

练习 42 据练习 41(3) 得 $E^{\mathrm{c}} = (V^{\mathrm{c}} \setminus B_3) \cup (A_3 \cap B_3^{\mathrm{c}})$. 从而 E^{c} 满足练习 41 中的条件 (4).

练习 43 将满足练习 41 中的条件的子集全体记为 $\mathcal{S}$, 它包含 X 的全体开集. 说明 $\mathcal{S}$ 是 σ- 代数即可. 据练习 42 知 $\mathcal{S}$ 对补运算封闭.

任取 $\mathcal{S}$ 中的序列 (E_n), 取第一纲集 A_n 和 B_n 使 $(E_n \setminus A_n) \cup B_n$ 为开集 V_n. 可设 A_n 是 E_n 的子集. 命 $B = (B_1 \cap V_2) \cup (B_2 \cap V_1)$, 这是第一纲集使

$$V_1 \cap V_2 = ((E_1 \cap E_2) \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup B.$$

因此 $E_1 \cap E_2$ 满足练习 41 中的条件. 当 E_n 相互不交时,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = (\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n) \setminus \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

可见 $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 满足练习 41 中的条件.

练习 44 将开区间 [0,1] 按 §2.2 练习 1 的方法得个疏朗闭集 E 使 $|E|_1 = r$. 任取开集 $[0,1]\setminus E$ 的每个构成区间 $J_k = (a_k, b_k)$, 在 $[a_k, b_k]$ 中按此方法得个疏朗闭集 E_k 使 $|E_k|_1 = r|J_k|_1$. 这些疏朗集的 Lebesgue 测度之和为 $r(1-r)$. 将 $J_k \setminus E_k$ 的每个构成区间 J_{kl} 按此方法得疏朗闭集 E_{kl} 使 $|E_{kl}| = r|J_{kl}|$. 这些疏朗集的 Lebesgue 测度之和为 $r(1-r-r(1-r)) = r(1-r)^2$. 如此下去得些此互不交的开区间 $J_{k_1\cdots k_n}$ 和它的疏朗闭子集 $E_{k_1\cdots k_n}$ 使 $|E_\bullet|_1 = r|J_\bullet|_1$ 且 $J_\bullet \setminus E_\bullet$ 的全体构成区间为 $J_{\bullet k} : k = 1, 2, \cdots$. 命

$$F = E \cup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\{E_{k_1\cdots k_n} | k_1, \cdots, k_n \geqslant 1\}.$$

这是 $(0,1)$ 中的第一纲集, 其 Lebesgue 测度为

$$r + \sum_{n=1}^{\infty} r(1-r)^n = 1.$$

命 $G = \bigsqcup\{F + n | n \in \mathbb{Z}\}$, 这是第一纲集且 $\mathbb{R} \setminus G$ 的 Lebesgue 测度为 0.

练习 45 取 X 的可数子集 $\{x_n\}$ 使 $X = \overline{\operatorname{span}}_{n\geqslant 1}\, x_n$. 因为

$$\operatorname{span}\{x_n | n \geqslant 1\} = \operatorname{span}\{x_n \div (n\|x_n\| + n) | n \geqslant 1\},$$

以 $x_n \div (n\|x_n\| + n)$ 代替 x_n 后可设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 命 $X_n = \operatorname{span}\limits_{i\leqslant n} x_i$ 即可.

练习 46 据例 1 知 $\mathbb{Q}$ 不是实直线上 G_δ 型集而据 §5.3 练习 33 知 $\mathbb{Q}$ 不会是 f 的连续点集.

练习 47 作可测集 $G_a = E \cap (a, a+e]$, 则 $G_a : a \in \mathbb{Z}^n$ 覆盖 E. 取 b 使 $\mathbf{m}(G_b) > 0$. 以 G_b 代替 E 后可设 $E \subseteq (b, b+e]$, 据 Lebesgue 测度的平移不变性, 可设 $b = 0$. 取 E 中的紧集 A 使 $\mathbf{m}(A) > 0$. 因为 A 有可数个孤立点, 去了这些孤立点后仍有 $\mathbf{m}(A) > 0$. 这样 A 是完全集从而 A 的势为 $\aleph$. 因此 E 的势为 $\aleph$.

在 E 上定义等价关系: $x \sim y$ 表示 $x - y$ 是有理点. 每个等价类 $[x]$ 都是可数集. 这样 E 中有 $\aleph$ 个等价类. 设 $f : \tilde{E} \to E$ 是个选取函数: 当 $x \in E$ 时, $f([x]) \in [x]$. 命 $E_f = \{f([x]) | x \in E\}$.

将 $[-e, e]$ 中的有理点全体记为 D, 这是可列集. 如果 $r, s \in D$ 使 $r + E_f$ 与 $s + E_f$ 有交点, 则有 $x, y \in E$ 使 $r + f([x]) = s + f([y])$. 等式 $f([x]) - f([y]) = s - r$ 表明 $f([x])$ 与 $f([y])$ 等价. 一个等价类中只取一个代表元, 所以 $f([x]) = f([y])$. 于是 $r = s$. 因此 $r \in D$ 时, $r + E_f$ 相互不交且 $r + E_f \subseteq [a-e, a+2e]$.

任取 $x \in E$, 记 $r = x - f([x])$, 则 $r \in D$ 且 $x = r + f([x])$. 由此得不等式

$$E \subseteq \bigsqcup\{r + E_f | r \in D\} \subsetneq [a-e, a+2e].$$

如果 E_f 是 Lebesgue 可测集, 据单调性、平移不变性以及可列可加性得

$$\mathbf{m}(E) \leqslant \sum_{r \in D} \mathbf{m}(E_f) \leqslant 3^n.$$

这同时得 $\mathbf{m}(E_f) > 0$ 及 $\mathbf{m}(E_f) = 0$. 矛盾.

不同的选取函数 f 对应不同的非 Lebesgue 可测集 E_f. 因为 f 在每个等价类 $[x]$ 上可取 $\aleph_0$ 个不同的值, 这样的 f 有 $\aleph_0^{\aleph}$ 个, 即 $2^{\aleph}$ 个.

练习 48 命 $(f_n : K \to \{0,1\})$ 是 §1.5 练习 16 得到的连续函数列.

作映射 $f : K \to E = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 使 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots)$, 则 f 可逆且连续. 因为 K 与 E 都是紧 Hausdorff 空间, 所以 f 是同胚.

因为 $E, E^2, \cdots, E^{\mathbb{Z}_+}$ 相互同胚, 所以 $K, K^2, \cdots, K^{\mathbb{Z}_+}$ 相互同胚.

§5.5 函数空间

练习 1 充分性: 对任何 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 使 $d(x,z) < \delta$ 且 $n \geqslant 1$ 时, $|f_n(x) - f_n(z)| < \varepsilon$. 取 X 的有限 δ- 网 E, 取 m 使 $n \geqslant m$ 且 $x \in E$ 时, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

任取 $z \in X$, 取 $x \in E$ 使 $d(x,z) < \delta$. 于是 $f_n(z) - f(z)$ 是三项 $f_n(z) - f_n(x)$, $f_n(x) - f(x)$ 与 $f(x) - f(z)$ 之和. 这样 $|f_n(z) - f_l(z)| < 3\varepsilon$. 换言之, $n \geqslant m$ 时, $\|f_n - f_l\| < 3\varepsilon$, 这即 (f_n) 一致收敛于 f.

必要性: 因为 f 连续, 它一致连续. 对于 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta_0 > 0$ 值 $d(x,z) < \delta_0$ 时, $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$. 取 m 使 $n \geqslant m$ 且 $x \in X$ 时, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 当 $i < m$ 时, 取 $\delta_i > 0$ 使 $d(x,z) < \delta_i$ 时, $|f_i(x) - f_i(z)| < \varepsilon$.

命 $\delta = \min\{\delta_0, \cdots, \delta_m\}$, 则 $d(x,z) < \delta$ 时, $|f_n(x) - f_n(z)| < 3\varepsilon$.

因为 $(f_n(x))$ 是收敛数列, 所以它有界.

练习 2 必要性: 设 $\{x_i | i \in J\}$ 是 A 的有限 $\varepsilon/2$ 网. 设 $y_i \in E_i \in \mathcal{F}$ 使 $\|x_i - y_i\| < \varepsilon/2$. 取 $E \in \mathcal{F}$ 使 E_i 都是 E 的子集. 这样 E 的有限子集 $\{y_i | i \in J\}$ 是 A 的 ε- 网. 因此 $d(x, E) < \varepsilon$.

充分性: 命 $c = \sup\limits_{x \in A} \|x\|$ 及 $S = \{y \in E | \exists x \in A : \|x - y\| < \varepsilon\}$. 当 $y \in S$ 时, $\|y\| < c + \varepsilon$. 这样 S 是有限维线性空间 E 的有界集. 取其有限 ε- 网 B. 对任何 $x \in A$, 取 $y \in E$ 使 $\|x - y\| < \varepsilon$. 取 $z \in B$ 使 $\|y - z\| < \varepsilon$, 这样 $\|x - z\| < 2\varepsilon$. 于是 B 是 A 的有限 2ε- 网.

练习 3 命 $E_n = \mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$, 则 $l^0 = \bigcup\{E_n | n \geqslant 1\}$.

(1) 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, 任取 $x \in l^p$ 及 $y \in E_n$, 则

$$\|x - y\|_p^p = \sum_{i \leqslant n} |x_i - y_i|^p + \sum_{i > n} |x_i|^p.$$

可见 $d(x, E_n) = (\sum_{i>n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. 注意到 l^0 在 l^p 中稠密即可.

(2) 在 $\mathbf{c}_0$ 情形, 注意到 $d(x, E_n) = \sup_{i>n} |x_i|$ 且 l^0 稠于 $\mathbf{c}_0$ 即可.

(3) 在 $\mathbf{c}$ 情形, 命 $F_n = \mathrm{span}\{e, e_1, \cdots, e_n\}$. 当 $x \in \mathbf{c}$ 且 $y \in E_n$ 时, 设 $x_0 = \lim x_n$ 而 $y_0 = \lim y_n$. 当 $i > n$ 时, $y_i = y_0$. 于是

$$\|x - y\|_\infty = \max\{\sup_{i \leqslant n} \|x_i - y_i|, \sup_{i > n} \|x_i - y_0|\}.$$

可见在 $y_i = x_i : i \leqslant n$ 且 $y_0 = x_0$ 时, 上式最小. 这样

$$d(x, F_n) = \sup_{i>n} |x_i - x_0| = \sup_{i>n} \lim_{j \to \infty} |x_i - x_j|.$$

最后注意到 $\bigcup\{F_n | n \geqslant 1\}$ 在 $\mathbf{c}$ 中稠密即可.

练习 4 必要性: 命 $e_x(f) = f(x)$, 则 $d(e_x(f), e_x(g)) \leqslant d(f, g)$. 由此得 Lipschtiz 映射 $e_x : C(X, Y) \to Y$ 使 $e_x(E) = \{f(x) | f \in E\}$. 这样后者是列紧的. 取 E 的有限 $\varepsilon/3$- 网 F. 取 $\delta > 0$ 使

$$\forall g \in F : d(x, z) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(z)| < \varepsilon/3.$$

对于任何 $f \in E$, 取 g 使 $\|f - g\| < \varepsilon/3$. 设 $d(x, z) < \delta$, 则

$$\begin{aligned} |f(x) - f(z)| &\leqslant |f(x) - g(x)| \\ &+ |g(x) - g(z)| + |g(z) - f(z)| \\ &\leqslant 2\|f - g\| + |g(x) - g(z)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

从而 E 等度连续.

充分性: 取 X 的 δ- 网 $\{x_1, \cdots, x_n\}$. 命 $\pi(f) = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$, 则 $\pi(E)$ 是 Y^n 中的列紧集. 取 E 的有限子集 F 使 $f \in E$ 时, 存在 $g \in F$ 使 $d(\pi(f), \pi(g)) < \varepsilon$. 对任何 $x \in X$, 取 i 使 $d(x, x_i) < \delta$. 于是

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leqslant d(f(x), f(x_i)) \\ &+ d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

这表明 $d(f, g) < 3\varepsilon$. 因此 F 是 E 的有限 3ε 网. 于是 E 是预紧集. 据 Hausdorff 定理知 E 是一致收敛的列紧集.

练习 5 任取 $f \in U$, 记 $r = 2 - \max \operatorname{re} f([0,1])$. 当 $\|g-f\| < r$ 时,

$$\operatorname{re} g = \operatorname{re}(g-f) + \operatorname{re} f < r + \max \operatorname{re} f = 2.$$

因此 $O(f,r) \subseteq U$. 这样 U 是开集.

练习 6 作半范数 $p : l^\infty(X) \to \mathbb{R}$ 使 $p(f) = \sup\limits_{x\in X} \overline{\lim\limits_{z\to x}} |f(z) - f(x)|$. 因为 $p(f) \leqslant 2\|f\|$, 所以 p 连续且 $\ker p = C_b(X)$, 从而 $C_b(X)$ 完备.

当 X 是紧度量空间时, 取 X 的一个稠密集 D. 对于满足 $a \in D$, 命 $f_a(x) = d(x,a)$. 命 $A = \{1, f_{a_1} f_{a_2} \cdots f_{a_n} | a_i \in D, n \geqslant 1\}$, 这是至多可列集. 命 $B = \operatorname{span} A$, 这是包含常数函数的可分的自伴子代数. 据 Stone-Weierstrass 定理, 说明 B 能分离 X 中的点即可. 对于 X 中的互异两点 x 与 y, 取 $a \in D$ 使 $d(x,a) < d(x,y)/2$. 于是 $d(x,y) \leqslant d(x,a) + d(a,y)$ 表明 $d(a,y) > d(x,y)/2$. 这样 $f_a(x) \neq f_a(y)$.

练习 7 命 $q(g) = \overline{\lim\limits_{|x|\to\infty}} |g(x)|$. 由此得连续半范数 $q : C_b(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ 使 $\ker q = C_0(\mathbb{R}^n)$. 因此 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 是 $C_b(\mathbb{R}^n)$ 的闭集, 它完备.

练习 8 说明 $A(\Omega)$ 是 $C_b(\overline{\Omega})$ 的闭集即可. 任取 $A(\Omega)$ 中的收敛基本序列, 其极限 f_n 据复分析知 f 在 Ω 内全纯, 从而 f 在 $A(\Omega)$ 中.

练习 9 将 $f \in L^p(X)$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus X$ 上补充定义为零后, 可将 $L^p(X)$ 视为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的子空间. 说明 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 可分即可.

命 $X_k = \{x : |x| \leqslant k\}$, 其特征函数记为 g_k. 据本节例 1, $L^p(X_k)$ 可分. 任取 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $fg_k \in L^p(X_k)$. 据控制收敛定理,

$$\lim_{k\to\infty} \|f - fg_k\|_p = (\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f - fg_k|^p)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

这表明 $\bigcup\limits_{k\geqslant 1} L^p(X_k)$ 稠于 $L^p(\mathbb{R}^n)$. 前者可分, 从而后者可分.

练习 10 可设 $I = [0, 2\pi]$. 对于 $f \in L^p(I)$ 和 $\varepsilon > 0$, 据练习 8 可取 $g \in C(I)$ 使 $\|g - f\|_p < \varepsilon$. 当 $0 \leqslant x \leqslant 1/n$ 时, 命

$$h(x) = g(2\pi) + n(g(1/n) - g(2\pi))x.$$

当 $1/n \leqslant x \leqslant 2\pi$ 时, 命 $h_n(x) = g(x)$. 由此得 $h \in C_{2\pi}$ 使

$$\int\limits_0^{2\pi} |h - g|^p \leqslant 2^p \max |g|^p([0,2\pi])/n.$$

可取 n 使 $\|h - g\|_p < \varepsilon$. 以 h 代替 g 后可设 $g \in C_{2\pi}$ 使 $\|g - f\|_p < \varepsilon$.

据 Weierstrass 第二逼近定理得三角多项式 h 使 $|g - h| < \varepsilon(2\pi)^{\frac{-1}{p}}$. 于是 $\|g - h\|_p < \varepsilon$. 这样 $\|g - f\|_p < 2\varepsilon$.

练习 11 提示: 命 $(Uf)(t)=f(\exp\sqrt{-1}t)$, 说明 $U: L^p(T)\to L^p(I)$ 为等距同胚并用练习 10 的结论.

练习 12 提示: (1) 因为 $\mathbb{C}^M$ 按内致一致收敛是完备的而且内闭一致收敛保持全纯性与调和性, 所以 $\mathcal{O}(M)$ 和 $\mathcal{H}(M)$ 是 $\mathbb{C}^M$ 的闭子集, 因而完备.

(2) 当 $0<s<d(z,\partial M)$ 时,

$$\int\limits_{B(z,s)} f(w)\mathbf{m}(dw)=\int\limits_0^s rdr\int\limits_0^{2\pi} f(z+r\exp(\sqrt{-1}\theta))d\theta=\pi s^2 f(z).$$

以上第二等式源自调和函数的均值公式. 于是

$$|f(z)|\leqslant\Big(\int\limits_{B(z,s)}|f(w)|^p\mathbf{m}(dw)\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_{B(z,s)}\frac{\mathbf{m}(dw)}{(\pi s^2)^q}\Big)^{1/q}.$$

可见 $|f(z)|\leqslant\|f\|_p/(\pi s^2)^{1/p}$. 命 $s\to d(z,\mathbb{C}\setminus M)$ 得要证明之不等式.

练习 13 任取 $A^p(M)$ 中的基本序列 (f_n). 连续函数 $z\mapsto d(z,\partial M)$ 在 M 中的每个紧子集 K 上能取到最小值 $r_K>0$. 对于 $z\in K$, 由练习 12 得

$$|f_m(z)-f_n(z)|\leqslant\|f_n-f_m\|_p/(\pi r_K^2)^{\frac{1}{p}}.$$

这表明 (f_n) 内闭一致收敛, 其极限 f 是全纯函数. 现在

$$\forall\varepsilon>0\exists m\geqslant 1,\forall n,l\geqslant m:\int\limits_M|f_n(z)-f_l(z)|^p\mathbf{m}(dz)\leqslant\varepsilon^p.$$

在上式中命 $l\to\infty$ 并用 Fatou 引理得 $\|f_n-f\|_p\leqslant\varepsilon$.

于是 $f=(f-f_n)+f_n$ 在 $A^p(M)$ 中并为 (f_n) 在 $A^p(M)$ 的极限.

练习 14 任取 M 中的紧集 K, 命 $\gamma=\min\limits_{z\in K}d(z,\partial M)$, 据练习 12 知

$$|f(z)|\leqslant\|f\|_p(\pi\gamma^2)^{\frac{-1}{p}},z\in K.$$

于是 E 内闭一致有界. 据复分析中的凝聚原理, E 是内闭一致收敛下的列紧集.

练习 15 (1) 源自不等式 $|f(x)-f(y)|\leqslant H_\alpha(f)|x-y|^\alpha$.

(2) 易说明 $H_\alpha(f)$ 是半范数, 它的连续性源自不等式 $H_\alpha\leqslant\|\cdot\|_{0,\alpha}$.

任取 $C^{0,\alpha}[a,b]$ 中的基本序列 (f_n). 因为 $\|\cdot\|\leqslant\|\cdot\|_{0,\alpha}$, 所以 (f_n) 也是 $C[a,b]$ 中的基本序列, 其极限记为 f(因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$). 现在

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n,l\geqslant m: H_\alpha(f_n-f_l)\leqslant\varepsilon,$$

即 $|f_n(x)-f_l(x)-(f_n(y)-f_l(y))|\leqslant\varepsilon|x-y|^\alpha$. 命 $l\to\infty$ 得

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n\geqslant m\forall x,y:$$
$$|f_n(x)-f(x)-(f_n(y)-f(y))|\leqslant\varepsilon|x-y|^\alpha.$$

这样 $\lim\limits_{n\to\infty}H_\alpha(f_n-f)=0$. 于是

$$H_\alpha(f)\leqslant H_\alpha(f-f_n)+H_\alpha(f_n)<+\infty.$$

这样 f 在 $C^{0,\alpha}[a,b]$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{0,\alpha}=0$.

(3) 任取 $C^{0,\alpha}[a,b]$ 中的有界集 E, 命 $c=\sup\{\|f\|_{0,\alpha}:f\in E\}$. 因为 $\|f\|\leqslant\|f\|_{0,\alpha}$, 所以 E 是 $C[a,b]$ 中的有界集. 又 $f\in E$ 时,

$$|f(x)-f(z)|\leqslant c|x-z|^\alpha,$$

所以 E 是等度连续的, 据 Arzelà-Ascoli 定理知 E 是 $C[a,b]$ 中的列紧集.

(4) 任取 $C^k[a,b]$ 中的基本序列 (f_n), 由

$$\|f_n^{(i)}-f_l^{(i)}\|\leqslant\|f_n-f_l\|_k$$

知 $(f^{(i)})_{n=1}^\infty$ 一致收敛, 其极限记为 g_i. 现在

$$f_n^{(i)}(x)=f_n^{(i-1)}(a)+\int_a^x f_n^{(i)}(t)dt:a\leqslant x\leqslant b,$$

取极限得

$$g_i(x)=g_{i-1}(a)+\int_a^x g_i(t)dt:a\leqslant x\leqslant b.$$

这表明 g_0 直至 k 阶连续可微且 $g_0^{(i)}=g_i$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-g\|_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^k\|f_n^{(i)}-g_i\|=0.$$

练习 16 命 $r_0=d(f,E)$. 当 $r>r_0$ 时, 命 $E_r=\{g\in E:\|g-f\|_p\leqslant r\}$. 这是 E 的非空闭集并且 E 对 f 的最佳逼近 (若存在) 是 $E_r:r>r_0$ 的公共交点. 因为 $L^p(M,\mu)$ 中的距离是平移不变的, 以 $E-f$ 代替 E 且以 $f-f$ 代替 f 后, 可设 $f=0$. 当 $g,h\in E_r$ 时, $g+h\in 2E$. 因此 $\|g+h\|_p\geqslant 2r_0$.

若 $1<p\leqslant 2$, 据 Clarkson 不等式得

$$(\|g-h\|_p^q+(2r_0)^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant(\|g-h\|_p^q+\|g+h\|_p^q)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant 2^{\frac{1}{q}}(\|g\|_p^p+\|h\|_p^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant 2^{\frac{1}{q}}(2r^p)^{\frac{1}{p}}=2r.$$

因此 $\|g-h\|_p^q \leqslant (2r)^q-(2r_0)^q$. 由此得 $\operatorname{diam} E_r \leqslant ((2r)^q-(2r_0)^q)^{\frac{1}{q}}$. 于是 $\lim\limits_{r\to r_0} \operatorname{diam} E_r = 0$. 据 Cantor 闭集套定理知 $\psi(f)$ 唯一存在. 现在

$$
\begin{aligned}
& d_p(f,E) \leqslant \|\frac{\psi(f)+\psi(f_0)}{2}-f\|_p \\
\Rightarrow & (d_p(\psi(f),\psi(f_0))^q + 2^q d_p(f,E)^q)^{1/q} \\
\leqslant & (\|\psi(f)-f-(\psi(f_0)-f)\|_p^q \\
& + \|\psi(f)-f+\psi(f_0)-f\|_p^q)^{1/q} \\
\leqslant & 2^{1/q}(\|\psi(f)-f\|_p^p + \|\psi(f_0)-f\|_p^p)^{1/p} \\
= & 2^{1/q}(d_p(f,E)^p + d_p(\psi(f_0),f)^p)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

注意到 $f \mapsto d_p(f,E)$ 是 f 的一致连续函数, 有

$$
\begin{aligned}
& (\overline{\lim_{f\to f_0}} \|\psi(f)-\psi(f_0)\|_p^q + 2^q d_p(f_0,E)^q)^{1/q} \\
\leqslant & 2^{1/q}(2d_p(f_0,E)^p)^{1/p} = 2d_p(f_0,E).
\end{aligned}
$$

从而 $\lim\limits_{f\to f_0} \|\psi(f)-\psi(f_0)\|_p = 0$.

若 $2<p<+\infty$, 据 Clarkson 不等式得

$$
\begin{aligned}
& (\|g-h\|_p^p + (2r_0)^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\|g-h\|_q^p + \|g+h\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \\
\leqslant & 2^{\frac{1}{q}}(\|g\|_p^p + \|h\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^{\frac{1}{q}}(2r^p)^{\frac{1}{p}} = 2r.
\end{aligned}
$$

因此 $\|g-h\|_p^p \leqslant (2r)^p-(2r_0)^p$. 由此得 $\operatorname{diam} E_r \leqslant ((2r)^p-(2r_0)^p)^{\frac{1}{p}}$. 于是 $\lim\limits_{r\to r_0} \operatorname{diam} E_r = 0$. 据 Cantor 闭集套定理知 $\psi(f)$ 唯一存在. 现在

$$
\begin{aligned}
& d_p(f,E) \leqslant \|\frac{\psi(f)+\psi(f_0)}{2}-f\|_p \\
\Rightarrow & (d_p(\psi(f),\psi(f_0))^p + 2^p d_p(f,E)^p)^{1/p} \\
\leqslant & (\|\psi(f)-f-(\psi(f_0)-f)\|_p^p \\
& + \|\psi(f)-f+\psi(f_0)-f\|_p^p)^{1/p} \\
\leqslant & 2^{1/q}(\|\psi(f)-f\|_p^p + \|\psi(f_0)-f\|_p^p)^{1/p} \\
= & 2^{1/q}(d_p(f,E)^p + d_p(\psi(f_0),f)^p)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

注意到 $f \mapsto d_p(f,E)$ 是 f 的一致连续函数, 有

$$
\begin{aligned}
& (\overline{\lim_{f\to f_0}}\, d_p(\psi(f),\psi(f_0))^p + 2^p d_p(f_0,E)^p)^{1/p} \\
\leqslant & 2^{1/q}(2d_p(f_0,E)^p)^{1/p} = 2d_p(f_0,E).
\end{aligned}
$$

从而 $\lim\limits_{f\to f_0} d_p(\psi(f),\psi(f_0))=0$.

练习 17 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|f_n+f|^p\doteq|2f|^p$, 据 Fatou 引理得以下第一不等式

$$\begin{aligned}\|2f\|_p &\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n+f\|_p\\ &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n+f\|_p\leqslant 2\|f\|_p.\end{aligned}$$

由此得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n+f\|_p=2\|f\|_p$. 据 Clarkson 不等式得

$$(\|f_n+f\|_p^q+\|f_n-f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^{\frac{1}{q}}(\|f_n\|_p^p+\|f\|_p^p)^{\frac{1}{p}},$$

在上式两边取极限得

$$(\|2f\|_p^q+\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n-f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant 2^{\frac{1}{q}}\|f\|_p.$$

由此得 $\lim\|f_n-f\|_p=0$.

练习 18 据 Hölder 不等式知 f_n' 在任何有限区间上可积. 据 §4.2 定理 1 知

$$\begin{aligned}&f_n(x)=\int_0^x f'(t)dt : x>0\\ \Rightarrow\ &|f_n(x)|\leqslant(\int_0^x|f'(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}(\int_0^x 1^2dt)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{x}\|f_n'\|_2.\end{aligned}$$

于是当 $0<x\leqslant 1$ 时, $|f_n(x)|\leqslant\|f_n'\|_2$; 而 $x\geqslant 1$ 时, 由已知条件知 $|f_n(x)|\leqslant 1$. 从而 (f_n) 一致有界. 与上面相同的方法可得

$$|f_n(x)-f_n(y)|\leqslant\sqrt{|x-y|}\|f_n'\|_2.$$

上式表明 (f_n) 等度连续.

练习 19 只证明充分性: 作紧集 $[1,1+r]$ 的子集 E_n 使其元素 t 有如下特征:

$$|f(x)-f(x+t)|\leqslant 2^{-n}:\forall x\in\mathbb{R}.$$

由此得闭集套 (E_n), 取其一个交点 t_0. 上式对所有 n 成立, 于是

$$|f(x)-f(x+t)|=0:\forall x\in\mathbb{R}.$$

这表明 t 是 f 的一个周期.

练习 20 因为 $\overline{\mathbb{R}}$ 是紧的且 $\overline{\mathbb{Z}_+}$ 是 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的闭集, 所以 $\overline{\mathbb{Z}_+}$ 是紧的. 如果数列 (x_n) 收敛, 命 $f(n)=x_n$ 及 $f(+\infty)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 当 $n\in\mathbb{Z}_+$ 时, n 是 $\overline{\mathbb{Z}_+}$ 中的孤立点, 所以 f 在 n 连续. 按 f 的定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=f(+\infty)$. 这样 f 是满足要求的连续函数. 反之 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim f(n)=f(+\infty)$.

§5.6 不动点原理

练习 1 命 $g(x)=d(x,f(x))$, 则 $g:X\to\mathbb{R}$ 是连续函数且 $g>0$. 于是它的最小值 $c>0$. 这样 $d(x,f(x))\geqslant c$.

练习 2 对于 $f\in C([a,b],\mathbb{R})$, 命 $(Af)(x)=f(x)-F(x,f(x))/M$. 这得 $[a,b]$ 上连续函数 Af. 当 $g\in C([a,b],\mathbb{R})$ 时, 据中值定理得

$$\begin{aligned}(Af)(x)-(Ag)(x)&=f(x)-g(x)-(F(x,f(x))-F(x,g(x)))/M\\&=(1-F_y(x,\xi)/M)(f(x)-g(x)),\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之间. 于是由条件得

$$|(Af)(x)-(Ag)(x)|\leqslant(1-m/M)|f(x)-g(x)|.$$

从而 $\|Af-Ag\|\leqslant(1-m/M)\|f-g\|$. 据压缩映射原理知 $A:C([a,b],\mathbb{R})\to C([a,b],\mathbb{R})$ 有唯一不动点 f, 这正是方程 $F(x,f(x))=0$ 的唯一解.

练习 3 注意到压缩映射是 Lipschtiz 映射即可.

练习 4 考察 $\mathbb{R}^n$ 的子集凸紧集 $E=\{x|x_1\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0;\sum\limits_{i\leqslant n}x_i=1\}$. 当 $x\in E$ 时, 记 $t(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}(Tx)_i)$, 其中 $(Tx)_i$ 表示 Tx 的第 i 个分量, 则 $t:E\to(0,+\infty)$ 是连续函数. 命 $f(x)=Tx/t(x)$. 由此得连续映射 $f:E\to E$. 据 Schauder 不动点定理知 f 有个不动点 x. 对此 x 有 $Tx=t(x)x$.

练习 5 作 $C[a,b]$ 的有界凸闭集 $E=\{f\in C[a,b]:|f|\leqslant r\}$. 当 $f\in E$ 且 $x\in[a,b]$ 时, 命

$$(Af)(x)=\int_a^b F(x,y,f(y))dy.$$

对于 $\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使 $|(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)|<\delta$ 时,

$$|F(x_1,y_1,z_1)-F(x_2,y_2,z_2)|<\varepsilon.$$

这样当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,

$$|(Af)(x_1)-(Af)(x_2)|<\varepsilon(b-a).$$

于是 $\{Af:[a,b]\to\mathbb{R}|f\in E\}$ 是等度连续函数簇. 又 $A(E)\subseteq E$ 源自下式

$$|(Af)(x)|\leqslant\int_a^b r/(b-a)dy=r.$$

设 $\|f-g\|<\delta$, 则 $\|Af-Ag\|\leqslant\varepsilon(b-a)$ 源自下式

$$|\int_a^b(F(x,y,f(y))-F(x,y,g(y))dy|\leqslant\varepsilon(b-a).$$

总之, $A:E\to E$ 是连续映射且 $A(E)$ 是列紧集. 据 Schauder 不动点定理知, A 有不动点 f, 这个不动点即满足要求.

练习 6 需要在 §3.2 练习 2-3 之后讨论此题. 命 A 同 §3.2 练习 3, 而 $Bx=\dfrac{Ax}{c}+b$, 则 $B:l^2\to l^2$ 是压缩算子:

$$\|Bx-By\|_2\leqslant\frac{\|Ax-Ay\|}{c}\leqslant\frac{\pi}{c}\|x-y\|_2.$$

据压缩映射原理 B 有唯一不动点 x, 此为所求的唯一解.

练习 7 (1) 是明显的. (2) 当 $x\in E,y\in F$ 时, $d(x,G)\leqslant d(x,y)+d(y,G)$. 注意到 $d(y,G)\leqslant d(F,G)$, 上式关于 $y\in F$ 取下确界得

$$d(x,G)\leqslant d(x,F)+d(F,G)\leqslant d(E,F)+d(F,G).$$

同样当 $z\in G$ 时, $d(z,E)\leqslant d(E,F)+d(F,G)$. 由此得三角不等式

$$d(E,G)\leqslant d(E,F)+d(F,G).$$

(3) 现设 $d(E,F)=0$, 则 $x\in E$ 且 $y\in F$ 时 $d(x,F)=d(y,E)=0$, 所以 $x\in\overline{F}$ 且 $y\in\overline{E}$. 由此得 $E\subseteq\overline{F}$ 且 $F\subseteq\overline{E}$.

(4) 当 $x\in\bigcup\{E_i|i\in J\}$ 且 $y\in\bigcup\{F_i|I\in J\}$ 时, 设 $x\in E_j$, 则

$$\begin{aligned}&d(x,\bigcup\{F_i|i\in J\})\leqslant d(x,F_j)\\ \leqslant&d(E_j,F_j)\leqslant\sup\{d(E_i,F_i)|i\in J\}.\end{aligned}$$

同样得 $d(y,\bigcup\{E_i|i\in J\})\leqslant\sup\{d(E_i,F_i)|i\in J\}$.

练习 8 (2) 充分性源自等式 $d(f(x),f(y))=d(f_*(\{x\}),f_*(\{y\}))$.

必要性: 设 $0\leqslant c<1$ 恒使 $d(f(x),f(y))\leqslant cd(x,y)$, 则 $d(f(x),f_*(F))\leqslant cd(x,f_*(F))$. 可见 $d(f_*(E),f_*(F))\leqslant cd(E,F)$.

(3) 必要性: 任取 $(\text{cpt}\,X,d)$ 中的基本序列 (E_n), 这即

$$\forall\varepsilon>0\exists k\forall i,k\geqslant k:d(E_i,E_j)<\varepsilon.$$

这即 $x\in E_i$ 且 $y\in E_j$ 时, $d(x,E_j)<\varepsilon$ 且 $d(y,E_i)<\varepsilon$.

命 $S=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}E_n$. 作紧集 $S_1=\bigcup\limits_{i\leqslant k}E_k$ 并取其有限 ε- 网 S_0. 当 $x\in E_i$ 且 $i>m$ 时, 有 $y\in E_k$ 使 $d(x,y)<\varepsilon$. 取 $z\in S_0$ 使 $d(y,z)<\varepsilon$, 则 $d(x,z)<2\varepsilon$. 可见 S_0 是 S 的有限 2ε- 网. 这样 S 完全有界而其闭包 $\overline{S}$ 是紧集. 命 $F_n=\bigcup\{E_i|i\geqslant n\}$. 由此得紧空间 $\overline{S}$ 中的闭集套 $(\overline{F_n})$, 其交集 E 是 $\overline{S}$ 中的非空紧集. 请注意, E 由集套 (F_n) 的公共接触点组成.

当 $n\geqslant k$ 时, 任取 $x\in E$ 和 $z\in E_n$. 有 $i\geqslant k$ 和 $y\in E_i$ 使 $d(x,y)<\varepsilon$. 又 $d(y,E_n)<\varepsilon$, 从而 $d(x,E_n)<2\varepsilon$. 当 $l\geqslant k$ 时, 命

$$G_l=\bigcup_{j\geqslant l}\{y\in E_j|d(z,y)<\varepsilon\}.$$

由此得 $(F_l)_{l\geqslant k}$ 的子套 $(G_l)_{l\geqslant k}$, 它们的公共接触点 x_0(即 $(\overline{G_l})_{l\geqslant k}$ 的公共点) 都 E 中且 $d(z,x_0)\leqslant\varepsilon$. 总之, $d(E_n,E)<2\varepsilon$. 可见 $\lim\limits_{n\to\infty}d(E_n,E)=0$.

充分性: 任取 X 中的基本序列 (x_n). 据 (1) 知 $(\{x_n\})$ 是 $\operatorname{cpt}X$ 中的基本序列, 于是有非空紧集 E 使 $\lim\limits_{n\to\infty}d(\{x_n\},E)=0$. 由必要性的证明知 E 的点 x 都是集套 $(\{x_k|k\geqslant n\})_{n\geqslant 1}$ 的公共接触点, 于是 (x_n) 有子列 (x_{k_n}) 逼近 x. 这样 (x_n) 收敛于 x. 由此可见 E 是单点集.

此时命 $g(E)=\bigcup\limits_{i\leqslant n}f_i(E)$, 由此得映射 $g:\operatorname{cpt}X\to\operatorname{cpt}X$. 由练习 7 知

$$d(g(E),g(F))\leqslant\max\{d(f_i(E),f_i(F))|i=1,\cdots,n\}.$$

由 (2) 知 g 是压缩映射, 于是由压缩映射原理得唯一 $E\in\operatorname{cpt}X$ 使 $g(E)=E$.

练习 9 命 $U=\{x|f(x)\subseteq V\}$, 要证明 U 是 X 的开集. 现在

$$\begin{aligned}X\setminus U&=\{x|\exists y\in f(x)\setminus V\}\\&=\{x|\exists y\in Y:(x,y)\in f\cap X\times(Y\setminus V)\}\\&=\exists^Y(f\cap(X\times(Y\setminus V))).\end{aligned}$$

据 §5.4 练习 16 知 $X\setminus U$ 是 X 中的闭集.

练习 10 对于实数 r, 命 $G=\{x\in X|d(x,f(x))>r\}$. 说明 G 是开集即可. 任取 $x_0\in G$, 命 $s=\min\{d(x_0,f(x_0))-r)/3,1\}$. 则有 t 使 $0<t<s$ 且 $d(x,x_0)<t$ 时, $f(x)\subseteq\{y|d(y,f(x_0))<s\}$. 当 $y\in f(x)$ 时, 有个 $y_0\in f(x_0)$ 使 $d(y,y_0)<s$. 对 x,y,y_0,x_0 用于是

$$d(x,y)\geqslant d(x_0,y_0)-d(x_0,x)-d(y,y_0)>r.$$

这样 $d(x,f(x))>r$, 从而 G 是开集.

练习 11 只证明 (1) 的必要性：对任何 $\varepsilon > 0$, 取 S 的有限 ε- 网 E. 于是 S 被有限个直径不过 2ϵ 的子集 $O(x,\varepsilon) : x \in E$ 覆盖. 可见, $\alpha(S) \leqslant 2\varepsilon$. 命 $\varepsilon \to 0$ 即可.

练习 12 总有 $\alpha(S) \leqslant \alpha(S_n)$, 从而 $\alpha(S) = 0$. 这样 S 完备且预紧, 它是紧集.

练习 13 归纳地作凸集 $E_1 = \overline{\mathrm{cov}}\, f(E)$ 及 $E_n = \overline{\mathrm{cov}}\, f(E_{n-1})$. 由此得闭集套 (E_n) 使 $\alpha(E_n) \leqslant c\alpha(E_{n-1})$. 归纳地知 $\alpha(E_n) \leqslant c^n\alpha(E)$. 这样 (E_n) 之交 K 是非空凸紧集且 $f(K) \subseteq K$. 于是 f 在 K 中有不动点.

练习 14 (1) 命 $p(f) = |\int\limits_a^b f(x)dx|$, 则 $p(f) \leqslant (b-a)\|f\|$. 于是 p 是 $C[a,b]$ 上连续半范数, 其核 E 为闭集. 因为 $f \equiv 1$ 不在 E 中, 所以 E 不稠于 $C[a,b]$.

(2) 命 $\varphi(f) = |f(a)^2 - f(b)|$, 则 $\varphi : C[a,b] \to \mathbb{R}$ 是连续函数. 这样 $E = \varphi^{-1}\{0\}$ 是闭集的逆像, 它是闭集.

(3) 命 $\varphi(f) = f(a)$, 则 $\varphi : C[a,b] \to \mathbb{C}$ 连续且 $E = \varphi^{-1}\{z|\, \mathrm{re}\, z > 0\}$. 因此 E 是凸开集的逆像, 它是凸开集.

命 $F = \{f \in C[a,b]|\, \mathrm{re}\, f(a) \geqslant 0\}$, 则 $F = \varphi^{-1}\{z|\, \mathrm{re}\, z \geqslant 0\}$ 是闭集的逆像, 它是包含 E 的闭集. 因此 $\overline{E} \subseteq F$. 反之, 任取 $f \in F$. 命 $f_n = f + 1/n$, 则 $\mathrm{re}\, f_n(a) = \mathrm{re}\, f(a) + 1/n > 0$. 于是 (f_n) 是 E 中一致逼近 f 的序列. 这样 $F \subseteq \overline{E}$. 总之, $\overline{E} = F$.

(4) 命 $e(f) = f(b)$, 由此得连续线性泛函 $e : C[a,b] \to \mathbb{C}$ 使 $E = e^{-1}\{1\}$, 这是凸闭集在连续线性泛函下的原像. 因此 E 是凸闭集.

(6) 说明 $A : C[a,b] \to C[a,b]$ 是压缩映射即可, 其中 $f \in C[a,b]$ 时,

$$Af(x) = c\int\limits_a^b \sin f(t)dt + 1 : a \leqslant x \leqslant b.$$

(7) 命 $h(t) = c\sin t + 1$. 说明 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为压缩映射即可.

$$|h(t_1) - h(t_2)| = |c||\sin t_1 - \sin t_2| \leqslant |c||t_1 - t_2|.$$

(8) 说明 $A : C[a,b] \to C[a,b]$ 是压缩映射即可, 其中

$$Ah(x) = \int\limits_a^b K(x,y)h(y)dy + 1.$$

当 $h_1, h_2 \in C[a,b]$ 且 $x \in [a,b]$ 时,

$$(Ah_1)(x) - (Ah_2)(x) = \int\limits_a^b K(x,y)(h_1(y) - h_2(y))dy,$$

所以 $\|Ah_1 - Ah_2\| \leqslant c(b-a)\|h_1 - h_2\|$.

(9) 据 Schauder 不动点定理，说明连续映射 $A: C[a,b] \to C[a,b]$ 有相对紧的值域即可，其中 $(Ag)(x) = c\int_a^b \sin g(y)dy + f(x)$. 据 Arzelà-Ascoli 定理，说明 ran A 有界且等度连续即可，而这两点源自下两式

$$\|Ag - f\| \leqslant |c|(b-a),$$
$$|(Ag)(x_1) - (Ag)(x_2)| = |f(x_1) - f(x_2)|.$$

(10) 据 Schauder 不动点定理和 Bolzano-Weierstrass 定理，说明连续映射 $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的值域有界即可，其中

$$A(x,y) = (10^{27} + \sin f(x,y), \cos f(x,y)).$$

因为 $|A(x,y) - (10^{27}, 0)| \leqslant 1$, 所以 ran A 是有界集.

练习 15 当 $n = 1$ 且 f 是简单函数 $\sum c_j \chi_{E_j}$ 时，

$$G(t, f(t)) = \sum f(t, c_j)\chi_{E_j}(t).$$

这是 t 的可测函数. 一般地，取点态逼近 f 的简单函数列 $(f_i)_{i=1}^{\infty}$, 则

$$G(t, f(t), \cdots, f_n(t)) = \lim_{i\to\infty} G(t, f_i(t)).$$

这也是 t 的可测函数. 设 $n-1$ 时结论成立. 在 n 时，命

$$g(t,x) = G(t, f_1(t), \cdots, f_{n-1}(t), x).$$

这是 x 的连续函数和 t 的可测函数. 于是结论源自下式:

$$G(t, f_1(t), \cdots, f_n(t)) = g(t, f_n(t)).$$

练习 16 提示: $\operatorname{gr} f = \{(x,y)|d(x,y) = d(x,S)\}$ 是闭集，用练习 9.

练习 17 提示: $\operatorname{gr} g = \{(x,y)|f(x,y) = y\}$ 是 $X \times E$ 的闭集，用练习 9.

练习 18 记 $G_i = \{x \in E | f_i(x) = x\}$, 这是凸紧集. 当 $x \in G_i$ 时，

$$f_i(f_j(x)) = f_j(f_i(x)) = f_j(x).$$

因此 $f_j(x)$ 是 f_i 的不动点，这表明 $f_j(G_i) \subseteq G_i$.

任取 J 的有限子集 F. 无妨记 $F = \{1, \cdots, n\}$. 当 $n = 1$ 时，显然 $G_i : i \in F$ 有公共交点. 设 $n = k$ 时， $G_i : i \in F$ 有公共交点. 当 $n = k+1$ 时， $G_i : i = 1, \cdots, k$ 之交为一个凸紧集 G, 则

$$f_{k+1}(G) \subseteq \bigcap_{i \leqslant k} f_{k+1}(G_i) \subseteq \bigcap_{j \neq i} G_i = G.$$

这样 f_{k+1} 在 G 上有不动点 x, 它也是 $f_1, \cdots, f_k$ 的不动点.

因此 $G_i : i \in J$ 有限交，它的公共交点就是 $f_i : i \in J$ 的公共不动点.

练习 19 连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 全体记为 X, 它按上确界范数成为 Banach 空间. 作函数 $Af:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 使 $a\leqslant t\leqslant b$ 时,

$$(Af)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}G(s,f(s))ds.$$

因为 $|(Af)(t)|\leqslant\int_a^b g(s)ds$, 所以 $\operatorname{ran}A$ 是 X 中的有界集. 当 $t_1<t_2$ 时,

$$|(Af)(t_1)-(Af)(t_2)|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}g(s)ds.$$

据积分的绝对连续性知 $\operatorname{ran}A$ 是等度连续的. 现在

$$|(Af)(t)-(Af_0)(t)|\leqslant\int_a^b|G(t,f(t))-G(t,f_0(t))|dt.$$

当在 X 中 $f_k\to f_0$ 时, $G(t,f_k(t))\to G(t,f_0(t))$. 据控制收敛定理知在 X 中 $Af_k\to Af_0$. 这样 $A:X\to X$ 是连续映射且 $\operatorname{ran}A$ 是相对紧集. 据 Schauder 不动点定理得个 f 使 $Af=f$.

练习 20 因为 X_n 是紧集, 它可被有限个直径不过 r 的闭集 $E_{ni}:i\leqslant l_n$ 覆盖. 这样 X 被可数个直径不过 r 的紧集 $X_n\cap E_{ni}:i\leqslant l_n,n\geqslant 1$ 所覆盖. 将它们重写成 $F_n:n\geqslant 1$, 命

$$E_n=F_n\setminus\bigcup\{F_i|i<n\}=F_n\cap O_n,$$

其中 O_n 是个开集. 显然 (E_n) 无交并为 X 且每个 E_n 的直径不过 r.

因为度量空间中的开集为 F_σ- 型集, 取可列个闭集 G_{ni} 使 $O_n=\bigcup G_{ni}$. 于是 $E_n=\bigcup\limits_i F_n\cap G_{ni}$, 从而 E_n 是 σ- 紧集.

练习 21 据练习 20, X 有可数个直径不过 1 的 σ- 紧集组成的划分 $\mathcal{D}_1$. 再据练习 20, 每个 $E\in\mathcal{D}_1$ 有可数个直径不过 $1/2$ 的 σ- 紧集组成的划分 $\{E_i|i\in J_E\}$. 命 $\mathcal{D}_2=\{E_i|i\in J_E,E\in\mathcal{D}_1\}$. 由此得 X 的划分 $\mathcal{D}_2$, 它是 $\mathcal{D}_1$ 的细分且其成员的直径不过 $1/2$. 如此下去, 得 X 的一串划分 $\mathcal{D}_n$ 使 $\mathcal{D}_{n+1}$ 是 $\mathcal{D}_n$ 的细分且 $\mathcal{D}_n$ 中的成员的直径不过 $1/n$. 命

$$\gamma_n(y)=\sum(\chi_{f(E)}(y):E\in\mathcal{D}_n).$$

这表示 $\mathcal{D}_n$ 中有几个成员含方程 $f(x)=y$ 的解. 于是 $\gamma_n(y)\leqslant\gamma(y)$. 因为 $f(E)$ 是 Y 中的 σ- 紧集, 它是 Borel 集, 从而 γ_n 是 Y 上 Borel 函数.

如果 $\gamma(y)=0,1$, 则所有 $\gamma_n(y)=0,1$. 否则, 任设 $2\leqslant l\leqslant\gamma(y)$. 取方程 $f(x)=y$ 的 l 个互异解 $x_1,\cdots,x_l$. 命 $r=\min\{d(x_i,x_j)|i\neq j\}$. 当 $n\geqslant 1/r$ 时, $\mathcal{D}_n$ 中有 l 个互异成员 $E_1,\cdots,E_l$ 分别包含 $x_1,\cdots,x_l$. 于是 $\gamma_n(y)\geqslant l$, 从而 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\gamma_n(y)\geqslant l$. 命 $l\to\gamma(y)$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n(y)=\gamma(y)$. 因此 γ 是 Borel 函数.

练习 22 记 C 是 f 的临界点全体，作开集 $X_0 = X \setminus C$. 因为 C 和 X_0 都是 σ- 紧集，据练习 21 可作非负 Borel 函数 $\gamma_i : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ 使

$$\gamma_0(y) = |\{x \in C | f(x) = y\}|_0,$$
$$\gamma_1(y) = |\{x \in X_0 | f(x) = y\}|_0.$$

当 $x \in X_0$ 时， Jacobi 阵 $(Jf)(x)$ 可逆. 据反函数定理，有个开集 U 使 $x \in U \subseteq X_0$ 且限制 $(f : U \to f(U))$ 是 C^1- 同胚. 取可列个这样的开集 $U_k : k \geqslant 1$ 覆盖 X_0, 命

$$E_k = U_k \setminus \bigcup_{i<k} U_i = \bigcap_{i<k} (U_k \cap (\mathbb{R}^n \setminus U_i)).$$

因为 U_k 是 σ- 紧集，所以 E_k 也是 σ- 紧集. 这样 $f(E_k)$ 是 σ- 紧集使

$$\gamma_1(y) = \sum_{k\geqslant 1} \#\{x \in E_k | f(x) = y\} = \sum_{k\geqslant 1} \gamma_{f(E_k)}(y).$$

因为 $f : U_k \to f(U_k)$ 是 C^1- 同胚且 E_k 是 U_k 的 Borel 子集，所以

$$\int_Y \chi_{f(E_k)}(y) g(y) dy = \int_{f(E_k)} g(y) dy = \int_{E_k} gf(x) |\det Jf(x)| dx.$$

上式关于 k 求和得

$$\int_Y \gamma_1(y) g(y) dy = \int_{X_0} gf(x) |\det J(x)| dx.$$

注意到 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ 且

$$0 \leqslant \int_Y \gamma_0(y) g(y) dy = \int_{f(C)} \gamma_0(y) g(y) dy$$
$$\leqslant \int_C \gamma_0(f(x)) g(f(x)) J(x) d = 0,$$

结合上面两组式子可得要证明的等式.

练习 23 先设 g 是开区间 $(u, +\infty)$ 的特征函数,则复合函数 gf 是 $f^{-1}(u, +\infty)$ 的特征函数. 作为 $[a, b]$ 的开集， $f^{-1}(u, +\infty)$ 由其构成区间记为 $E_i : i \in J$ 组成. 将 E_i 的端点记为 a_i 和 b_i, 限制 $f : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ 的示性函数记为 γ_i, 则

$$\gamma_i(y) \doteq \{x \in E_i | f(x) = y\}.$$

当 $y > u$ 时，如果 $f(x) = y$, 则 x 必在某个 E_i 中. 于是

$$\gamma(y) = |\bigcup_{i\in J} \{x \in E_i | f(x) = y\}|_0 \doteq \sum_{i\in J} \gamma_i(y) : y > u.$$

因 gf 是 $\bigcup\limits_{i\in J} E_i$ 的特征函数，它与 $\sum\limits_{i\in J}\chi_{[a_i,b_i]}$ 几乎处处相等，据 §4.1 定理 4 得

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\gamma(y)g(y)=\int\limits_{(u,+\infty)}\gamma(y)dy=\sum_{i\in J}\int\limits_{(u,v)}\gamma_i(y)dy$$

$$=\sum_{i\in J}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\gamma_i(y)dy=\sum_{i\in J}\int\limits_{a_i}^{b_i}|df|=\int\limits_a^b gf(x)|df(x)|.$$

注意到 $(u,v]=(u,+\infty)\setminus(v,+\infty)$，要证明的等式在 g 为 $\chi_{(u,v]}$ 的特征函数时成立. 当 E 是 $\mathbb{R}$ 中 Borel 集时，命 $\mu(E)=\int\limits_{\mathbb{R}}\chi_E(y)\gamma(y)dy$ 且 $\nu(E)=\int\limits_a^b\chi_E(f(x))|df(x)|$. 这得 $\mathcal{B}_1$ 上两个测度 μ 和 ν 使它们在 $\mathcal{R}_1$ 上的限制是相等的有限测度. 据测度延拓的唯一性知 $\mu=\nu$. 换言之，当 E 是 $\mathbb{R}$ 中 Borel 集时，

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\chi_E(y)\gamma(y)dy=\int\limits_a^b\chi_E(f(x))|df(x)|.$$

于是当 g 是 Borel 简单函数时要证明的等式成立. 一般情形用简单函数逼近并且单调收敛定理.

练习 24 由 φ 的定义知它下半连续. 任取实数 b, 有

$$(\varphi<b)=\{x\in X|\forall y\in Y:f(x,y)<b\}=\forall^Y(f<b).$$

据 §5.4 练习 16 知 $(\varphi<b)$ 是开集，因此 φ 上半连续. 这样 φ 是连续函数. 类似地可证明 ψ 是连续函数.

§6.1 有界线性算子

练习 1 因为 Az 的第 i 个分量 $(Az)_i$ 是 $\sum\limits_j a_{ij}z_j$, 所以

$$|(Az)_i|\leqslant\sum_j|a_{ij}||z_j|\leqslant\sum_j|a_{ij}|\|z\|.$$

可见，若命 $c=\max\limits_{i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$, 则 $\|Az\|\leqslant c\|z\|$. 固定 i, 命 $z_j=|a_{ij}|/a_{ij}:j=1,2,\cdots,n$(临时约定 $0/0=0$), 则 $\|z\|\leqslant 1$. 于是

$$\|A\|\geqslant\|Az\|\geqslant\Big|\sum_{j=1}^n a_{ij}z_j\Big|=\sum_{j=1}^n|a_{ij}|.$$

这样 $\|A\|\geqslant c$. 因此 $\|A\|=\max\limits_{i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$.

练习 2 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n\pm1}|^p\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$, 所以 $\|S_\pm\|\leqslant 1$. 因为 $S_+e_2=e_1$ 而 $S_-e_2=e_3$, 所以 $\|S_\pm\|\geqslant\|S_\pm e_2\|_p=1$. 于是 $\|S_\pm\|=1$.

练习 3 首先, Tf 绝对连续, 故 Tf 在 $C[0,1]$ 中. 由于

$$|\int_0^x f(t)dt|\leqslant\int_0^1|f(t)|dt=\|f\|_1,$$

因此 $\|Tf\|\leqslant\|f\|_1$, 这表明 $\|T\|\leqslant 1$. 另一方面取 $f=1$, 则 $\|f\|_1=1$ 且 $(Tf)(x)=x$, 因此 $\|Tf\|=1$. 故 $\|T\|\geqslant 1$. 于是 $\|T\|=1$.

练习 4 首先 $Tf(x)=\int_0^1\chi_{[0,x]}(t)f(t)dt$. 于是

$$\begin{aligned}&\int_0^1|Tf(x)|dx\leqslant\int_0^1\int_0^1\chi_{[0,x]}(t)|f(t)|dtdx\\=&\int_0^1\int_0^1\chi_{[t,1]}(x)|f(t)|dxdt=\int_0^1(1-t)|f(t)|dt\leqslant\|f\|_1.\end{aligned}$$

因此 $\|T\|\leqslant 1$. 命 $f_n=n\chi_{[0,1/n]}$, 则 $\|f_n\|_1=1$ 且

$$\|Tf_n\|_1=\int_0^{1/n}n(1-t)dt=n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}).$$

命 $n\to\infty$ 得 $\|T\|\geqslant 1$. 于是 $\|T\|=1$.

练习 5 只证明必要性: L 是自然射影 $\pi:X\to X/L$ 的核空间.

练习 6 因为 $\|T_px\|_p\leqslant\|x\|_p$, 所以 $\|T_p\|\leqslant 1$. 又 $T_pe_1=e_1$ 且 e_1 和 Te_1 的 l^p- 范数为 1, 从而 $\|T_p\|=1$.

练习 7 当 l 是非负整数时, 命 $f_l(z)=z^l$, 则 $Mf_l=f_{n+l}$. 用极坐标得

$$\|f_l\|_2^2=\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}r^{2l}d\theta=\frac{\pi}{l+1}.$$

所以 $\|M\|\geqslant\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{\|f_{n+l}\|_2}{\|f_l\|_2}=1$. 又 $\|M\|\leqslant 1$ 源自下式

$$\int_{\mathbb{D}}|z^nf(z)|^2\mathbf{m}(dz)\leqslant\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\mathbf{m}(dz).$$

练习 8 作变量代换 $s \mapsto xt$ 得 $Bf(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 可见 Bf 连续. 因为

$$|Bf(x)| \leqslant \int_0^1 |f(xt)|dt \leqslant \|f\|,$$

所以 $\|Bf\| \leqslant \|f\|$. 这样 $\|B\| \leqslant 1$. 命 $f_0 = 1$, 则 $\|f\| = 1$ 且 $(Bf_0)(x) = 1$, 从而 $\|B\| \geqslant 1$. 于是 $\|B\| = 1$.

练习 9 常数函数 f 使 $Af = 0$, 因此 A 非下有界. 命 $e_n(z) = z^n$, 则

$$\|e_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{D}} |z|^{2n}\mathbf{m}(dz) = \int_0^1 r^{2n}rdr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{n+1}.$$

因此 $\{e_n|n \geqslant 1\}$ 有界, 但 $\{Ae_n|n \geqslant 1\}$ 是无界集:

$$\|e_n'\|_2^2 = \|ne_{n-1}\|_2^2 = n\pi.$$

练习 10 取 X 的单位闭球 B 中的可数稠密集 $\{y_n\}$. 当 $a = (a_n) \in l^1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n y_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_1.$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ 绝对可和, 其和记为 Ta. 这得线性算子 $T : l^1 \to X$ 使 $\|Ta\| \leqslant c\|a\|_1$. 说明 B 中的点 x 关于 T 都有原像即可.

可设 x 不是 (y_n) 的线性组合. 取 k_1 使 $\|x - y_{k_1}\| < 1/2$, 则有 $k_2 > k_1$ 使 $\|2(x - y_{k_1}) - y_{k_2}\| < 1/2$, 此即

$$\|x - y_{k_1} - y_{k_2}/2\| < 1/2^2.$$

如此下去得正整数列 (k_n) 恒使 $\|x - \sum\limits_{i \leqslant n} y_{k_i}/2^{i-1}\| < 1/2^n$. 命 $a_{k_n} = 1/2^{n-1}$, 其它 $a_l = 0$, 则 $Ta = x$.

练习 11 只需证明 (3). $A_1 \times A_2$ 连续且其逆算子也连续:

$$(A_1 \times A_2)^{-1} = A_1^{-1} \times A_2^{-1}.$$

练习 12 取拓扑同构 $T : Y \to Y \times Y$. 归纳地构造拓扑同构 $T_n : Y \to Y^n$ 使 $T_n = (I_{n-2} \times T)T_{n-1}$, 其中 $I_{n-2} : Y^{n-2} \to Y^{n-2}$ 是恒等算子. 于是 $I \times T_n : X \times Y \to X \times Y^n$ 是拓扑同构.

练习 13 命 $Ax=(0,x)$, 则 $A:\mathbf{c}_0\to\mathbf{c}_0$ 是保范算子恒使 $AL_{n-1}=L_n$. 说明 $\dim\mathbf{c}_0/L_n=n$ 即可. 命 $K_n=\{x\in\mathbf{c}_0|x_i=0,i>n\}$, 这是 $\mathbf{c}_0$ 的 n 维线性子空间使 $\mathbf{c}_0=K_n\oplus L_n$. 于是 $\mathbf{c}_0/L_n\cong K_n$.

练习 14 取 p'/p 的共轭数 r, 据 Hölder 不等式得

$$\int|f|^p1\leqslant(\int(|f|^p)^{\frac{p'}{p}})^{\frac{p}{p'}}(\int 1^r)^{\frac{1}{r}}.$$

这表明 $\|f\|_p\leqslant\mu(M)^{1/r}\|f\|_{p'}$.

练习 15 命 $A(x,y)=(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots)$, 得等距同构 $A:l^p\times l^p\to l^p$.

练习 16 命 $K_n=\{x\in X|x_i=0,i>n\}$ 而 $L_n=\{x\in X|x_i=0,i\leqslant n\}$, 则 $x\mapsto(0,\cdots,0,x)$ 使 X 与 L_n 等距同构. 这样 $X=K_n\oplus L_n$ 与 $\mathbb{C}^n\times X$ 拓扑同构.

练习 17 因为 A 诱导了同构 $\tilde{A}:X/\ker A\to\operatorname{ran}A$, 这算子连续. 于是等式 $Ax=\tilde{A}\pi x$ 表明 A 连续.

练习 18 作幂等阵 $P_t=\begin{pmatrix}1&t\\0&0\end{pmatrix}$, 它对应的幂等算子 $P_t:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 使 $\|P\|\geqslant t$. 因为 $|P_tx|=|x_1+tx_2|$, 命 $x_1=0$ 而 $x_2=1$ 即知 $|P_tx|=t$. 从而 $\|P_t\|\geqslant t$.

练习 19 自然投影 $\pi:Z\to Z/Y$ 将 X 映为有限维线性子空间 $\pi(X)$, 这样 $\pi(X)$ 是 Z/Y 中闭线性子空间使 $X+Y=\pi^{-1}\pi(X)$, 因此 $X+Y$ 是闭集.

练习 21 提示: $L^p(M,\mu)$ 中的点实际上是某个 p 方可积函数的等价类.

练习 22 (1) 自反性: $P=PP$ 表明 $P\leqslant P$. 反称性: 设 $P\leqslant Q$ 且 $Q\leqslant P$, 则 $P=PQ=Q$. 传递性: 设 $P_1\leqslant P_2$ 且 $P_2\leqslant P_3$, 则 $P_1\leqslant P_3$ 源自下式:

$$P_1=P_1P_2=P_1P_2P_3=P_1P_3,$$
$$P_1=P_2P_1=P_3P_2P_1=P_3P_1.$$

(2) 首先, PQ 和 $P+Q-PQ$ 是幂等算子. 这源自下式:

$$(PQ)^2=PQPQ=PPQQ=PQ,$$
$$(P+Q-PQ)^2=PP+PQ-PPQ$$
$$+QP+QQ-QPQ-PQP-PQQ+PQPQ$$
$$=P+Q-PQ.$$

其次设 R 是投影算子使 $R \leqslant P$ 且 $R \leqslant Q$, 则

$$R(PQ) = RPQ = RQ = R,$$
$$(PQ)R = PQR = PR = R.$$

因此 $R \leqslant PQ$. 又 $R = PQ$ 时上式成立, 从而 PQ 是 $\{P, Q\}$ 的最大下界.

最后设 R 是投影算子使 $P \leqslant R$ 且 $Q \leqslant R$, 则

$$(P+Q-PQ)R = PR + QR - PQR = P + Q - PQ,$$
$$R(P+Q-PQ) = RP + RQ - RPQ = P + Q - PQ.$$

因此 $P+Q-PQ \leqslant R$. 又 $R = P+Q-PQ$ 时上式成立, 从而 $P+Q-PQ$ 是 $\{P, Q\}$ 的最小上界.

§6.2 连续线性泛函

练习 1 据 §5.5 练习 12 知有与 z 有关的常数 c 恒使 $|e_z(f)| \leqslant c\|f\|_p$, 从而 e_z 是连续线性泛函.

练习 2 (1) 源自式子 $A(X) \subseteq \mathbb{K}y$.

(2) 必要性: 无妨设 $A(X)$ 是 n 维的, 取其一个线性基 $e_1, \cdots, e_n$. 当 $y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$ 时, 命 $g_i(y) = a_i$, 这得线性泛函 $g_i : A(X) \to \mathbb{K}$ 使 $y = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(y) e_i$. 作 X 上线性泛函 $f_i = g_i A$.

如果 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i g_i = 0$, 从而 $a_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i g_i(e_j) = 0$. 可见 $f_1, \cdots, f_n$ 是线性无关的线性泛函组使

$$Ax = \sum g_i(Ax) e_i = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i.$$

充分性源自包含式 $A(X) \subseteq \operatorname{span}\{y_1, \cdots, y_n\}$.

(3) $\|y \otimes f\| = \sup\limits_{\|x\|<1} |f(x)|\|y\| = \|f\|\|y\|$.

(4) 因为 $BAx = B\sum f_i(x) y_i = \sum f_i(x) By_i$, 所以 $BA = \sum By_i \otimes f_i$, 这自然是有限秩算子. 因为 $ADw = \sum f_i(Dw) y_i$, 所以 $AD = \sum y_i \otimes f_i D$, 这也是有限秩算子.

练习 3 三个条件依次记为 (1)~(3). (2)⇒(1) 源自 $\|A\| \leqslant \sum\limits_i \|f_i\|\|y_i\|$.

(1)⇒(2): 练习 2(2) 中 g_i 连续而 $f_i = g_i A$ 连续.

(3)⇒(1). A 诱导了个单线性算子 $A_0 : X/\ker A \to Y$ 使 $\operatorname{ran} A_0$ 是有限维的. 这样 $X/\ker A$ 也是有限维的, 从而 A_0 连续. 现在 $A = A_0 \pi$ 连续.

练习 4 只证明充分性：命 $Y = \operatorname{span}\{x_i | i \in J\}$. 任取 $y \in Y$. 如果 $s_i : i \in J$ 与 $t_i : i \in J$ 是只有有限项非零的数组使

$$y = \sum_{i \in J} s_i x_i = \sum_{i \in J} t_i x_i,$$

则 $\sum\limits_{i \in J} (s_i - t_i) x_i = 0$. 由条件得 $\sum\limits_{i \in J} (s_i - t_i) c_i = 0$. 命 $g(y) = \sum\limits_{i \in J} s_i c_i$, 得定义合理的线性泛函 $g : Y \to \mathbb{K}$ 使 $\|g\| \leqslant c$. 将 g 保范延拓到 X 上得 f 即可.

练习 5 (1) 命 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n} x_n$, 则 $\|f\| = 1$ 且 f 的范数不可达.

(2) 设 y 是 f 按 Riesz 表示定理对应的 l^q 中元素，于是 $\|f\| = \|y\|_q$. 命 $x_n = |y_n|^q / |y|$, 则 $\|x\|_p = \|y\|_q^{\frac{q}{p}}$ 且 $f(x) = \|y\|_q \|x\|_p$.

练习 6 命 $p(x) = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \operatorname{re} x_n$, 得次线性泛函 $p : l^\infty \to \mathbb{R}$. 当 $y \in \mathbf{c}$ 时，命 $g(y) = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$. 于是 $g : \mathbf{c} \to \mathbb{C}$ 是线性泛函使 $\operatorname{re} g \leqslant p$. 据 Hahn-Banach 定理， g 有线性延拓 $f : l^\infty \to \mathbb{C}$ 使 $x \in l^\infty$ 时， $\operatorname{re} f(x) \leqslant \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \operatorname{re} x_n$. 此式中以 $-x$ 代替 x 可得 $\operatorname{re} f(x) \geqslant \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} \operatorname{re} x_n$.

练习 7 只证明充分性：命 $Y = \{(f_1(x), \cdots, f_n(x)) | x \in X\}$, 这是 $\mathbb{K}^n$ 的线性子空间. 据线性代数可得 $\mathbb{K}^n$ 的线性子空间 Z 使 $\mathbb{K}^n$ 有直和分解 $Y \oplus Z$. 如果

$$(f_1(x), \cdots, f_n(x)) = (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_1)),$$

则诸 $f_i(x - x_1) = 0$, 于是 $f(x - x_1) = 0$. 这样 $f(x) = f(x_1)$. 因此若命

$$g(f_1(x), \cdots, f_n(x)) = f(x),$$

则得个定义合理的线性泛函 $g : Y \to \mathbb{K}$. 取 g 的一个线性延拓 $h : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ 使 $z \in Z$ 时， $h(z) = 0$. 因为 $(f_1(x), \cdots, f_n(x)) = \sum f_i(x) e_i$, 所以

$$f(x) = h(\sum f_i(x) e_i) = \sum f_i(x) h(e_i).$$

这即 $f = \sum h(e_i) f_i$. 因此 f 是 $f_1, \cdots, f_n$ 的线性组合.

练习 8 充分性：如果有个线性组合 $\sum a_i f_i = 0$, 则

$$\sum a_i f_i(x_j) = 0 : j = 1, \cdots, n.$$

于是 $a_j = 0 : j = 1, \cdots, n$. 这样 $f_1, \cdots, f_n$ 线性无关.

必要性：因为 f_i 不被 $\{f_j | j \neq i\}$ 线性组合，据练习 7 知 $f_j : j \neq i$ 有个公共零点 x_i 使 $f_i(x_i) \neq 0$. 命 $e_i = x_i / f(x_i)$ 即可.

练习 9 命 $Ax = (f_1(x), f_2(x), \cdots)$, 由此得线性算子 $A : X \to l^3$. 命 $Y = \operatorname{ran} A$. 现定义 Y 上线性泛 函

[illegible]

练习 12 必要性: 命 $f(x)=F(x,0)$ 与 $g(y)=F(0,y)$, 得线性泛函 $f: X \to \mathbb{K}$ 和线性泛函 $g: Y \to \mathbb{K}$ 使 $F(x,y)=f(x)+g(y)$. 注意到

$$|f(x)| \leqslant \|F\|\|(x,0)\| = \|F\|\|x\|,$$

知 $f \in X^*$; 同样 $g \in Y^*$. 现设 $\|x_0\|<1$ 与 $\|y_0\|<1$ 使

$$\|f\| < f(x)+\varepsilon; \|g\| < g(y)+\varepsilon.$$

注意到 $\|(x_0,y_0)\|<1$, 有

$$\begin{aligned}\|f\|+\|g\| &< f(x_0)+g(y_0)+2\varepsilon \\ &\leqslant F(x_0,y_0)+2\varepsilon \leqslant \|F\|+2\varepsilon.\end{aligned}$$

这样 $\|f\|+\|g\| \leqslant \|F\|$.

充分性: 显然 $F: X \times Y \to \mathbb{K}$ 是线性泛函. 因为

$$\|F(x,y)\| \leqslant \|f(x)\|+\|g(y)\| \leqslant \|f\|\|x\|+\|g\|\|y\|,$$

所以 $\|F\| \leqslant \|f\|+\|g\|$. 这样 $F \in (X \times Y)^*$ 且 $\|F\|=\|f\|+\|g\|$.

练习 13 命 $X=\mathbb{C}\times L^1[0,1]$, 它按以下范数成为可分 Banach 空间

$$\|(a,g)\| = |a|+\|g\|_1.$$

命 $Tf=(f(0),f')$, 得线性算子 $T: A[0,1] \to X$ 使

$$\|Tf\| = |f(0)|+\int_0^1 |f'(t)|dt = \|f\|_{\mathrm{v}}.$$

上面第二等式源自 §4.2 定理 1. 任取 $(a,g)\in X$, 命

$$f(x) = a+\int_0^x g(t)dt : 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

得绝对连续函数 f 使 $Tf=(a,g)$. 因此 T 是满射.

总之, T 是等距同构. 这样 $A[0,1]$ 是可分 Banach 空间.

练习 14 充分性: 取 p 的共轭指数 q. 因为 $[a,b]$ 中有限个相互不交开区间

$$(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$$

的所有端点必是某个分点组的部分分点, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(b_i)-f(a_i)| &= \sum_{i=1}^n \frac{|f(b_i)-f(a_i)|}{(b_i-a_i)^{1/q}}(b_i-a_i)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n \frac{|f(b_i)-f(a_i)|^p}{(b_i-a_i)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c\left(\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

这说明 f 绝对连续. 将 $[a,b]$ 上阶梯函数 $g=\sum\limits_i c_i\chi_{(a_i,b_i]}$(下标中的区间相互不交) 全体记为 L, 它是 $L^q[a,b]$ 的稠密线性子空间. 注意到

$$\begin{aligned}|\int_a^b f'(t)g(t)dt| &\leqslant \sum_{i=1}^n |\int_{a_i}^{b_i} c_i f'(t)dt| \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{|f(b_i)-f(a_i)|}{(b_i-a_i)^{1-1/p}}|c_i|(b_i-a_i)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant c(\sum_{i=1}^n |c_i|^q(b_i-a_i))^{\frac{1}{q}}=c\|g\|_q,\end{aligned}$$

于是 $g\mapsto\int_a^b f'(t)g(t)dt$ 定义了 L 上的一个连续线性泛函, 将它可保范延拓至 $L^q[a,b]$ 上后, 据 F. Riesz 表示定理得 $h\in L^p[a,b]$ 使

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt=\int_a^b h(t)g(t)dt : g\in L.$$

命 $g=\chi_{[a,x]}$, 得

$$f(x)-f(a)=\int_a^x h(t)dt.$$

这表明 f 是 p 方可积函数 h 的不定积分 (且 $f'\doteq h$).

必要性: 将 $f(x_k)-f(x_{k-1})$ 表示成 h 在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的积分并用 Hölder 不等式即可.

练习 15 任取 $x\in\overline{Y}$, 则有 $y\in Y$ 使 $d(x,y)=d(x,Y)=0$, 这样 $x=y$ 在 Y 中, 从而 Y 是闭集.

练习 16 必要性: 取 x 使 $f(x)=\|f\|$. 设 y 是 $\ker f$ 对 x 的最佳逼近, 则

$$\begin{aligned}&f(x-y)=f(x)-f(y)=\|f\|,\\ &\|x-y\|=d(x,\ker f)=|f(x)|/\|f\|=1.\end{aligned}$$

其中第二组等式源自定理 1. 可见, 命 $x_0=x-y$ 即可.

充分性: 可设 $\|f\|=1$. 当 $x\in X$ 时, 记 $y=x-f(x)x_0$, 则

$$\begin{aligned}&f(y)=f(x)-f(x)f(x_0)=0,\\ &\|x-y\|=|f(x)x_0|=d(x,\ker f).\end{aligned}$$

这样 y 是 $\ker f$ 对 x 的最佳逼近.

练习 17 可设 X 是实空间. 取单位向量 x_1 与模 1 泛函 f_1 使 $f_1(x_1)=1$. 设已取好单位向量 $x_i : i \leqslant n$ 和线性无关的模 1 泛函 $f_i : i \leqslant n$ 使 $f_i(x_i)=1$ 且 $i \neq j$ 时 $\|x_i - x_j\| > 1$. 命 $e_1, \cdots, e_n$ 同练习 8 而

$$y = -(e_1 + e_2 + \cdots + e_n).$$

因为 $X^* \neq \operatorname{span}\{f_1, \cdots, f_n\}$, 据练习 7 知有个非零向量 x 是 $f_1, \cdots, f_n$ 的公共零点. 取常数 c 使 $\|y\| < \|y + cx\|$. 取 $y + cx$ 的规范化 x_{n+1} 并取模 1 泛函 $f_{n+1} \in X^*$ 使 $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$, 则 $f_1, \cdots, f_n, f_{n+1}$ 线性无关. 否则, f_{n+1} 是 $f_1, \cdots, f_n$ 的线性组合. 于是

$$|f_{n+1}(y+cx)| = |f_{n+1}(y)| < \|y + cx\|.$$

矛盾. 当 $1 \leqslant i \leqslant n$ 时, $f_i(x_i) = 1$ 且 $f_i(y) = -1$. 这导致 $f_i(x_{n+1}) < 0$. 于是 $f_i(x_{n+1} - x_i) > 1$, 从而 $\|x_{n+1} - x_i\| > 1$. 如此下去即可.

练习 18 只证明 (4). 任取正整数 k 并作 Descartes 积 $E = \{1, \cdots, k\}^n$. 将 E 中元素 j 写成 $(j_1, \cdots, j_n)$ 的形式, 命 $s^j = s_1^{j_1} \cdots s_n^{j_n}$, 则

$$\sum_{j \in E} (f_i(s^j) - f_i(s_i s^j)) = \sum_{j \in E : j_i = 1} f_i(s^j) - \sum_{j \in E : j_i = k} f_i(s_i s^j).$$

上式右端有 $2k^{n-1}$ 个函数. 命 $f = \sum\limits_{i=1}^{n} (f_i - \rho_{s_i} f_i)$ 及 $c = \max\limits_i \|f_i\|$, 则

$$\sum_{j \in E} f(s^j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in E} (f_i(s^j) - f_i(s_i s^j)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} 2k^{n-1} c.$$

注意到 E 有 k^n 个元素, 得 $k^n \inf f(G) \leqslant 2nk^{n-1}c$. 这样 $\inf f(G) \leqslant 2n/k$. 命 $k \to \infty$ 知 $\inf f(G) \leqslant 0$.

练习 19(E. Hewitt, K. Ross) 命 $L = \operatorname{span}\{f - \rho_s(f) | f \in l^\infty G, s \in G\}$. 当 $h \in L$ 时, 它形如 $\sum\limits_{i=1}^{n} (f_i - \rho_{s_i} f_i)$, 据练习 18(4) 得

$$\|e - h\|_\infty = 1 - \inf h(G) \geqslant 1.$$

这样 $d(e, L) \geqslant 1$. 又 $d(e, L) \leqslant 1$. 取范数为 1 的线性泛函 $\varphi : l^\infty G \to \mathbb{C}$ 使 $\varphi(e) = 1$ 且 $\varphi(L) = 0$; 后者即 $\varphi = \varphi\rho_s, s \in G$. 为证明 (2), 可设 $0 \leqslant f \leqslant 1$, 于是 $|e - f| \leqslant e$, 从而 $\varphi(e - f) \leqslant 1$. 此即 $\varphi(f) \geqslant 0$.

练习 20 G 中每个元素 x 能唯一写为一个约化字 $a^ib^ja^{i_1}b^{j_1}\cdots$, 使 $i=n$ 的 x 全体记为 E_n. 于是 G 有划分 $\{E_n|n\in\mathbb{Z}\}$ 使 $aE_{n-1}=E_n$ 且 $bE_n\subseteq E_0$. 将 E_n 的特征函数记为 f_n, 则 $\rho_a(f_n)=f_{n-1}$ 且 $\rho_b(\sum\limits_{n\neq 0}f_n)\leqslant f_0$.

如果有满足练习 19 条件 (1) 和 (2) 的线性泛函 $\varphi: l^\infty G\to\mathbb{C}$, 则 $n\in\mathbb{Z}$ 时, $\varphi(f_n)=\varphi(f_{n-1})$. 这样 $\varphi(f_n)$ 是与 n 无关的一个非负常数 c. 现在

$$\begin{aligned} nc &= \sum_{i=1}^n \varphi(f_i)=\varphi(\sum_{i=1}^n f_i)\\ &\leqslant \varphi(e)=1 : n\geqslant 1. \end{aligned}$$

这表明 $c\leqslant 0$. 又 $\varphi(\sum\limits_{n\neq 0}f_n)\leqslant\varphi(f_0)$ 及下式

$$\varphi(f_0)+\varphi(\sum_{n\neq 0}f_n)=\varphi(e)=1$$

表明 $c=\varphi(f_0)\geqslant 1/2$, 矛盾.

练习 21 提示: 命 $G=\mathbb{T}$ 而 φ 同练习 19. 命 $\nu(E)=\varphi(\chi_E)$.

练习 22 提示: 命 ν 同练习 21 而 $\mu(E)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\nu(\exp(2\pi\sqrt{-1}(E\cap(n-1,n]))$.

练习 24 记 $Ay=(g_i(y))_{i\in J}$, 则 g_i 是 Y 上线性泛函且

$$|g_i(y)|\leqslant\|Ay\|\leqslant\|A\|\|y\|.$$

取 g_i 在 X 上的保范延拓 f_i, 则 $\|f_i\|\leqslant\|A\|$. 于是

$$\sup\{|f_i(x)|: i\in J\}\leqslant\|A\|\|x\|.$$

这样命 $Bx=(f_i(x))_{i\in J}$ 即可.

练习 25 命 $Af=f|_L$, 得线性算子 $A: X^*\to L^*$. 因为 f 是 $f|_L$ 在 X 上唯一保范延拓, 所以 $\|Af\|=\|f\|$. 又 L 上连续线性泛函 g 在 X 上都有唯一保范延拓 f, 所以 $Af=g$. 从而 A 是等距同构.

练习 26 必要性: 取非零数 a 和 b 使 $af=bg$, 则 $f(x)=0$ 当且仅当 $g(x)=0$. 这表明 $\ker f=\ker g$.

充分性: 取向量 u 使 $f(u)\neq 0$, 以 $u/f(u)$ 代替 u 后可设 $f(u)=1$. 任取 $x\in X$, 则 $f(x-f(x)u)=0$. 于是 $g(x-f(x)u)=0$. 这即 $g(x)=g(u)f(x)$.

练习 27 (1) 以 $\mathbf{P}(M)$ 记 M 的由有限个可测集组成的可测划分全体.

任取 $\mathrm{ba}(M,\mathcal{S})$ 中基本序列 (μ_n), 则

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n,l\geqslant m,\forall\mathcal{D}\in\mathbf{P}(M):\sum_{E\in\mathcal{D}}|\mu_n(E)-\mu_l(E)|\leqslant\varepsilon.$$

这样对每个可测集 E, 序列 $(\mu_n(E))_{n\geqslant 1}$ 收敛, 其极限记为 $\mu(E)$. 由此得集函数 $\mu:\mathcal{S}\to\mathbb{C}$. 易说明它的有限可加性, 因此 μ 是容度. 上式中命 $l\to\infty$ 得

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n\geqslant m,\forall\mathcal{D}\in\mathbf{P}(M):\sum_{E\in\mathcal{D}}|\mu_n(E)-\mu(E)|\leqslant\varepsilon.$$

故 $\|\mu_n-\mu\|\leqslant\varepsilon$. 因此 $\mu=\mu-\mu_n+\mu_n$ 在 $\mathrm{ba}(M,\mathcal{S})$ 中且是 (μ_n) 的极限.

(2) 只证明必要性: 对于可测集 E, 命 $\mu(E)=\varphi(\chi_E)$, 得容度 $\mu:\mathcal{S}\to\mathbb{C}$. 当 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是 M 的可测划分时, 命 $a_i=|\varphi(\chi_{E_i})|\div\varphi(\chi_{E_i})$, 得

$$\sum_i|\mu(E_i)|=\sum_i\varphi(a_i\chi_{E_i})\leqslant\|\varphi\|\|\sum_i a_i\chi_{E_i}\|\leqslant\|\varphi\|.$$

这样 μ 是有界的. 现设 f 是简单函数 $\sum\limits_i c_i\chi_{E_i}$, 则

$$\varphi(f)=\sum_i c_i\mu(E_i)=\int_M fd\mu.$$

一般地, 取一致逼近 f 的简单函数列 (f_n), 据 §4.4 练习 18 知

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_nd\mu=\int_M fd\mu.$$

明显有 $\lim\varphi(f_n)=\varphi(f)$.

练习 28 提示: 命 $L=\mathrm{span}\,M$, 说明 $L^\perp=M^\perp$ 并用定理 3 即可.

练习 29 §6.1 练习 6: $T_p^*=T_q$, 其中 q 为 p 的共轭数. 这是因为

$$\langle T_px,y\rangle=\sum_n\frac{x_ny_n}{n}=\langle x,T_qy\rangle.$$

§6.1 练习 8. 对于 $f\in C[0,1]$ 与 $g\in V_0[0,1]$, 记 $\langle f,g\rangle=\int_0^1 fdg$. 命

$$G(t)=\int_0^t ds\int_{[s,1]}\frac{dg(x)}{x}:0\leqslant t\leqslant 1.$$

现设 g 是递增的并任取非负 $f\in C[0,1]$, 据 Tonelli 定理得

$$\int_{[0,1]}dg(x)\int_{[0,x]}\frac{f(t)}{x}dt=\int_{[0,1]}f(t)dt\int_{[t,1]}\frac{dg(x)}{x}.$$

注意到 $dG(t)=\int_{[t,1]}\dfrac{dg(x)}{x}dt$, 上式化为 $\langle Bf,g\rangle=\langle f,G\rangle$. 可见, $B^*g=G$.

练习 30 设 $J_X : X \to X^{**}$ 是典则嵌入. 当 $f \in Y^*$ 及 $y \in Y$ 时,

$$(J_Y^* J_{Y^*} f)(y) = (\hat{f} J_Y)(y) = f(y).$$

可见 $J_Y^* J_{Y^*} = I : Y^* \to Y^*$.

对于有界线性算子 $A : X \to Y^*$, 命 $\pi(A) = A^* J_Y$, 得有界线性算子 $\pi : B(X, Y^*) \to B(Y, X^*)$ 使 $\|\pi\| \leqslant 1$. 同样命 $\tau(B) = B^* J_X$, 得有界线性算子 $\tau : B(Y, X^*) \to B(X, Y^*)$ 使 $\|\tau\| \leqslant 1$. 现在

$$\begin{aligned}\tau\pi(A) &= (A^* J_Y)^* J_X = J_Y^* A^{**} J_X \\ &= J_Y^* J_{Y^*} A = A.\end{aligned}$$

由此得 $\tau\pi = I$, 同样 $\pi\tau = I$. 这样 π 和 τ 是互逆同构. 现在

$$\|A\| \leqslant \|\tau\| \|\pi(A)\| \leqslant \|\pi(A)\| \leqslant \|A\|.$$

由此得 $\|\pi(A)\| = \|A\|$. 因此 π 是等距同构, 其逆也是等距同构.

练习 31 命 $p(f) = \overline{\lim\limits_{|x| \to \infty}} \operatorname{re} f(x)$, 得次线性泛函 $p : l^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. 使 $f(\infty)$ 存在的有界函数 f 全体 L 是 $l^\infty(\mathbb{R})$ 的线性子空间. 命 $\psi(f) = f(\infty)$, 得线性泛函 $\psi : L \to \mathbb{C}$ 使 $\operatorname{re}\psi(f) \leqslant p(f)$. 据 Hahn-Banach 定理, 可取 ψ 的线性延拓 $\varphi : L \to \mathbb{C}$ 使 $\operatorname{re}\varphi(f) \leqslant p(f)$. 这即

$$\operatorname{re}\varphi(f) \leqslant \overline{\lim_{|x| \to \infty}} \operatorname{re} f(x) \leqslant \|f\|, f \in l^\infty(\mathbb{R}).$$

再据 Hahn-Banach 定理得, $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|$. 在上式中以 $-f$ 代替 f 得

$$\operatorname{re}\varphi(f) \geqslant \underline{\lim_{|x| \to \infty}} \operatorname{re} f(x), f \in l^\infty(\mathbb{R}).$$

可见, φ 是连续线性泛函恒使 $\underline{\lim\limits_{|x| \to \infty}} \operatorname{re} f(x) \leqslant \varphi(f) \leqslant \overline{\lim\limits_{x \to \infty}} f(x)$.

当 $f(\infty)$ 存在时, 由上两式得 $\operatorname{re}\varphi(f) = \operatorname{re} f(\infty)$. 可见, L 上两个复线性泛函 $f \mapsto \varphi(f)$ 和 $f \mapsto f(\infty)$ 的实部相等, 从而它们相等.

§6.3 收敛与自反性

练习 1 无妨设 (x_n) 弱逼近 $\mathbf{0}$. 要证明 $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\|_1 = 0$. 否则, 取子列后可设 x_n 都非零且使 $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\|_1 > 0$. 对任何 $y \in l^\infty$,

$$\lim \langle \frac{x_n}{\|x_n\|_1}, y \rangle = \lim \frac{\langle x_n, y \rangle}{\|x_n\|_1} = 0.$$

因此可设 x_n 都是单位向量，将其记成 $(x_{n1}, x_{n2}, \cdots)$. 对每个 i,

$$\lim_{n\to\infty} x_{ni} = \langle x_{ni}, e_i\rangle = 0. \tag{1}$$

记 $q_0 = 0$. 要找两列严格递增的正整数列 (p_n) 与 (q_n) 使

$$(2): \sum(|x_{p_n i}| : q_0 < i \leqslant q_{n-1}) < 1/3;$$

$$(3): \sum(|x_{p_n i}| : q_{n-1} < i \leqslant q_n) > 2/3.$$

命 $p_1 = 1$. 因为 $\|x_{p_1}\|_1 = 1$, 可取 $q_1 > 1$ 使 (3) 成立. 据 (1), 可取 $p_2 > p_1$ 使 (2) 成立. 取 $q_2 > q_1$ 使 (3) 成立. 据 (1), 可取 $p_3 > p_2$ 使 (2) 成立. 如次下去即可.

对任何正整数 i, 有唯一 n 使 $i \in J_n = \{q_{n-1}+1, \cdots, q_n\}$. 取模 1 数 y_i 使 $x_{p_n i} y_i = |x_{p_n i}|$. 作有界数列 $y = (y_1, y_2, \cdots)$. 于是

$$|\langle x_{p_n}, y\rangle| \geqslant \Big|\sum_{i\in J_n} x_{p_n i} y_i\Big| - \sum_{i\notin J_n} |x_{p_n i} y_i| > 2/3 - 1/3 = 1/3.$$

这与 $\lim\langle x_{p_n}, y\rangle = 0$ 矛盾. 因此 (x_n) 强收敛于 0.

这个练习中的方法称为滑背法，序列 $(|\sum\limits_{i\in J_k} x_{p_n i} y_i|)_{k=1}^{\infty}$ 与 n 有关，它在第 n 项有个“脊背”. 这个“脊背”对 $\langle x_{p_n}, y\rangle$ 的贡献最大.

练习 2 设 $A = \sum y_i \otimes f_i$ 时，则 $A^* = \sum f_i \otimes \widehat{y_i}$ 源自下式:

$$g \circ (y \otimes f) = g(y) f = f \hat{y}(g) : y \in Y, f \in X^*, g \in Y^*.$$

练习 3 设 $1 < p < +\infty$ 而 q 与 p 共轭. 当 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$ 时，命 $A_n x = x_1 e_n$, 得线性算子 $A_n : l^p \to l^p$ 使 $\|A_n\| = 1$. 任取 $y \in l^q$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} x_1 y_n = 0.$$

这样 (A_n) 弱算子逼近 0. 又 $\|A_n e_1\|_p = 1$ 表明 (A_n) 不强算子收敛.

练习 4 (1) 设 q 是 p 的共轭数. 对于 $f \in L^p, g \in L^q$, 记 $\langle f, g\rangle = \int\limits_M f g d\mu$. 命 $(Jf)(\varphi) = \varphi(f)$, 得典则映射 $J : L^p \to (L^p)^{**}$. 命

$$(Af)(g) = (Bg)(f) = \langle f, g\rangle.$$

据 Riesz 表示定理知 $A : L^p \to (L^q)^*$ 和 $B : L^q \to (L^p)^*$ 是等距同构. 又

$$(B^* J f)(g) = (Jf)(Bg) = (Bg)(f) = (Af)(g),$$

因此 $B^* J = A$. 这样 J 也是等距同构，从而 L^p 是自反空间.

(2) 因为 l^∞ 不可分，据 Banach 定理知 $(l^\infty)^*$ 不可分. 这样典则嵌入 $l^1 \to (l^1)^{**}$ 不是满射，从而 l^1 不自反. 据 Pettis 定理知 l^∞ 不自反.

(3) 否则，考虑 $C[0,1]$ 中序列 (f_n)，其中 $f_n(t) = t^n$. 现在

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_0^1 (t^m - t^n) dg(t) = 0, g \in V_0[0,1].$$

这源自控制收敛定理. 这表明 (f_n) 是弱 Cauchy 序列，它弱收敛，其弱极限记为 f. 作 $C[a,b]$ 上连续线性泛函 $e_t : g \mapsto g(t)$，则

$$f(t) = e_t(f) = \lim e_t(f_n) = \lim f_n(t).$$

故 f 在 $[0,1)$ 上为 0 但 $f(1) = 1$. 显然 f 不连续. 矛盾.

练习 5 必要性：取 X 的线性基 $e_1, \cdots, e_n$. 对于 $f \in X^*$，命

$$Af = (f(e_1), \cdots, f(e_n)).$$

因为线性算子由它在基上的值唯一确定，所以 $A : X^* \to \mathbb{K}^n$ 是线性单算子. 这样 X^* 是有限维的且 $\dim X^* \leqslant \dim X$.

充分性：对 X^* 用必要性的结论知 X^{**} 是有限维的且 $\dim X^{**} \leqslant \dim X^*$. 典则嵌入 $X \to X^{**}$ 是单线性算子，由此得 $\dim X \leqslant \dim X^{**}$. 这样 X 是有限维的且 $\dim X = \dim X^*$.

练习 6 命 P_n 是次数不过 n 的实多项式全体而 $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上实值连续函数全体按上确界范数所成的 Banach 空间. 记 $e_k(x) = x^k$. 当 $f = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$ 时，命 $\varphi(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$，得线性泛函 $\varphi : P_n \to \mathbb{R}$，它连续. 将 φ 在 $C[a,b]$ 上保范延拓后据 Riesz 表示定理得 $g \in V_0[a,b]$ 恒使 $\int x^k dg(x) = \varphi(e_k) = b_k$.

练习 7 只证明充分性：命 $C[a,b]$ 和 e_i 同练习 6 的证明过程. 当 $f = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i$ 时，命 $\varphi(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$，得线性泛函 $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ 使 $|\varphi(f)| \leqslant c\|f\|$. 于是 φ 连续. 因为 $\mathbb{R}[x]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密，所以 φ 在 $C[a,b]$ 上有唯一保范延拓. 据 Riesz 表示定理知有唯一 $g \in V_0[a,b]$ 使 $\varphi(h) = \int_a^b h dg$. 特别地，

$$\int_{[a,b]} x^k dg(x) = \varphi(e_k) = b_k.$$

练习 8 对于实 $f \in C[a,b]$, 由 $f \pm \|f\|e \geqslant 0$ 得 $\varphi(f \pm \|f\|e) \geqslant 0$. 于是

$$-\|f\|\varphi(e) \leqslant \varphi(f) \leqslant \|f\|\varphi(e).$$

这样 $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|\varphi(e)$. 对一般 $f \in C[a,b]$, 记 $c = \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{|\varphi(f)}{\varphi(f)+\delta}$, 则

$$\begin{aligned}|\varphi(f)| &= c\varphi(f) = \varphi(cf)\\ &\leqslant \|cf\|\varphi(e) = \varphi(e)\|f\|.\end{aligned}$$

这样 $\|\varphi\| \leqslant \varphi(e)$. 注意到 $\|e\| = 1$, 知 $\|\varphi\| = \varphi(e)$.

练习 9 先证明 $\Delta^k b_n = \sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i b_{n+i}$. 它在 $k=0$ 时成立. 设它在 $k=m$ 时成立. 在 $k=m+1$ 时,

$$\begin{aligned}
&\Delta^{m+1}b_n = \Delta^m b_n - \Delta^m b_{n+1}\\
&= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^j b_{n+j} - \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^j b_{n+1+j}\\
&= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(-1)^j b_{n+j} + \sum_{j=1}^{m+1}\binom{m}{j-1}(-1)^j b_{n+j}\\
&= b_0 + \sum_{j=1}^{m}\left(\binom{m}{j}+\binom{m}{j-1}\right)(-1)^j b_{n+j} + (-1)^{m+1}b_{n+m+1}\\
&= b_0 + \sum_{j=1}^{m}\binom{m+1}{j}(-1)^j b_{n+j} + (-1)^{m+1}b_{n+m+1}\\
&= \sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}(-1)^j b_{n+j}.
\end{aligned}$$

尽管 (2) 蕴含 (1), 但我们还是独立地证明 (1). 充分性: 据上面结论知,

$$\Delta^k b_n = \int_0^1 \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^n(-x)^j dg(x) = \int_0^1 x^n(1-x)^k dg(x) \geqslant 0.$$

必要性: 当 k 和 l 是非负整数时, 命

$$c_{n,l}^k = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\binom{n}{i}\Delta^{n-i}b_{i+l}.$$

现对 k 用归纳法证明 $\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,l}^k = b_{k+l}$. 结论在 $k=0$ 时成立:

$$
\begin{aligned}
c_{n,l}^0 &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j b_{i+l+j} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (-1)^j b_{l+i+j} \\
&= b_l + \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \binom{n}{m} (-1)^j b_{l+m} \\
&= b_l + \sum_{m=1}^{n} (-1+1)^m \binom{n}{m} b_{l+m} = b_l.
\end{aligned}
$$

设结论在 $k \leqslant m$ 时成立. 在 $k = m+1$ 时,

$$
\begin{aligned}
c_{n+1,l}^{m+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{i}{n+1}\right)^{m+1} \binom{n+1}{i} \Delta^{n+1-i} b_{i+l} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i+1}{n+1}\right)^{m+1} \frac{n+1}{i+1} \binom{n}{i} \Delta^{n-i} b_{i+1+l} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} + \frac{n-i}{n(n+1)}\right)^{m} \binom{n}{i} \Delta^{n-i} b_{i+1+l} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \binom{m}{j} \left(\frac{i}{n}\right)^{m-j} \left(\frac{n-i}{n(n+1)}\right)^{j} \binom{n}{i} \Delta^{n-i} b_{i+1+l}.
\end{aligned}
$$

上式 $j=0$ 后的项是 $c_{n,1+l}^m$, 于是

$$
0 \leqslant c_{n+1,l}^{m+1} - c_{n,1+l}^{m} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{j} c_{n,l+1}^{m-j}.
$$

利用归纳假设取极取得

$$
\lim_{n\to\infty} c_{n+1,l}^{m+1} = \lim_{n\to\infty} c_{n,1+l}^{m} = b_{m+1+l}.
$$

命 $e_{i,j}(x) = x^i(1-x)^j$. 作正线性泛函 $\varphi_n : C[0,1] \to \mathbb{C}$ 使

$$
\varphi_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} \Delta^{n-i} b_i.
$$

据练习 8 知 $\|\varphi_n\| = \varphi_n(e_{0,0}) = c_{n,0}^0 = b_0$. 再据上面结论知

$$
\lim_{n\to\infty} \varphi_n(e_{k,0}) = \lim_{n\to\infty} c_{n,0}^k = b_k.
$$

据 Weierstass 定理知 $\text{span}\{e_{k,0}|k \geqslant 0\}$ 稠于 $C[0,1]$. 据定理 2 知 (φ_n) 弱 * 收敛, 其极限记为 φ. 据 Riesz 表示定理, 取 $g \in V_0[0,1]$ 使

$$\varphi(h) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) = \int h dg : h \in C[0,1].$$

现在以 $e_{k,0}$ 代替上式中的 h 即可.

(2) 必要性: 命 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|\Delta^{n-i}b_i|}{\Delta^{n-i}b_i} \binom{n}{i} x^k(1-x)^{n-k}$, 则

$$|f(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i(1-x)^{n-i} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |\Delta^{n-i}b_i| = \int_0^1 f(x)dg(x) \leqslant \bigvee g.$$

充分性: 设 f 是多项式而 $B_n f$ 是其 Bernstein 多项式. 先证明一个结论: $\deg B_n f \leqslant \deg f$. 在 $\deg f = 0$ 时, $B_n f = f$, 结论成立. 设 $\deg f < m$ 时结论成立. 现设 $\deg f = m$, 则 $B_n f$ 的导函数为

$$\begin{aligned}(B_n f)'(x) =& n \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \binom{n-1}{i-1} x^{i-1}(1-x)^{n-i} \\ & - n \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) \binom{n-1}{i} x^i(1-x)^{n-i-1} \\ =& n \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i+1}{n}) \binom{n-1}{i} x^i(1-x)^{n-i-1} \\ & - n \sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) \binom{n-1}{i} x^i(1-x)^{n-i-1}.\end{aligned}$$

若记 $g(x) = n(f(x+1/n) - f(x))$, 则上式表明 $(B_n f)' = B_{n-1} g$. 因为 $\deg g < m$, 所以 $\deg(B_n f)' < m$. 这样 $\deg B_n f \leqslant m$.

因为 $\{e_n|n = 0,1,\cdots\}$ 是 $\mathbb{C}[x]$ 的线性基, 有唯一线性泛函 $\varphi : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}$ 使 $n \geqslant 0$ 时 $\varphi(e_n) = b_n$, 从而 $\varphi(e_{ij}) = \Delta^j b_i$. 这样

$$\varphi(B_n f) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) \binom{n}{i} \Delta^{n-i} b_i.$$

结合已知条件得 $|\varphi(B_n f)| \leqslant c\|f\|$, 其中 $\|f\|$ 是 f 在 $[0,1]$ 上的上确界范数.

次数不过 m 的多项式全体 P_m 是 $m+1$ 维线性子空间, 于是 φ 限制在 P_m 上连续. 当 $f \in P_m$ 时, $(B_n f)$ 在 P_m 中逼近 f, 所以 $|\varphi(f)| \leqslant c\|f\|$. 由 m 的任意性知 $\varphi : P \to \mathbb{C}$ 连续, 它在 $C[0,1]$ 上有唯一连续延拓. 据 Riesz 表示定理可得所需要的 g.

练习 10 以 E 记极点都在 S 中的有理函数全体, Runge 定理是说 $f|_K$ 是 $C(K)$ 的线性子空间 $E|_K=\{g|_K:g\in E\}$ 的接触点. 据 Riesz 表示定理, $C(K)$ 上连续线性泛函 φ 都对应唯一 K 上复值 Borel 测度 μ 使

$$\varphi(h)=\int_K h d\mu, h\in C(K).$$

据 §6.2 定理 3 说明零化 $E|_K$ 的 μ 也零化 $f|_K$ 即可. 当 $w\in U=\mathbb{C}\setminus K$ 时, $d(w,K)>0$, 可命 $\hat{\mu}(w)=\int_K(z-w)^{-1}\mu(dz)$. 在积分号下求导得

$$\hat{\mu}'(w)=\int_K(z-w)^{-2}\mu(dw).$$

因此 $\hat{\mu}:U\to\mathbb{C}$ 是全纯函数且 $\lim\limits_{w\to\infty}\hat{\mu}(w)=0$. 任取 $\mathbb{C}_\infty\setminus K$ 的一个分枝 V 并任取 $w_0\in E\cap V$. 如果 $w_0\neq\infty$, 则 $\hat{\mu}$ 在 w_0 的各阶导数

$$\hat{\mu}^{(n)}(w_0)=\int_K\frac{n!\mu(dz)}{(z-w_0)^{n+1}}=0.$$

这样 $\hat{\mu}|_V=0$. 如果 $w_0=\infty$, 当 $|w|$ 足够大时,

$$\hat{\mu}(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_K\frac{-z^n\mu(dz)}{w^{n+1}}=0.$$

这样 $\hat{\mu}|_V=0$. 总之 $\hat{\mu}=0$. 现取与 K 不交的闭链 L 使 $z\in K$ 时,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_L\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

因为 $\hat{\mu}$ 在 L 上恒为零, 所以

$$\int_K f(z)\mu(dz)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_L dw\int_K\frac{f(w)\mu(dz)}{w-z}=0.$$

练习 11 (1) 当 $0<|b|<1$ 时, 取 $x\in X$ 使 $\|x\|<1$ 且 $|f(x)|\geqslant|b|$. 命 $a=b/f(x)$, 则 $|a|\leqslant 1$ 且 $f(ax)=b$. 因此 $(\mathbb{K})_1\subseteq f(X)_1$. 从 $|f(x)|\leqslant\|x\|$ 知 $f(X)_1\subseteq(\mathbb{K})_1$.

(2) 对于 $f\in C[-1,1]$, 命 $\varphi(f)=\int_{-1}^{1}f(x)xdx$, 这得 $C[-1,1]$ 上连续线性泛函 φ 使 $\|\varphi\|=\int_{-1}^{1}|x|dx=1$. 由此和 (1) 得 $(\mathbb{K})_1\subseteq\varphi(B)\subseteq[\mathbb{K}]_1$.

要证 $\varphi(B)=(\mathbb{K})_1$. 否则，有 $f\in B$ 使 $|\varphi(f)|=1$, 以 $f/\varphi(f)$ 代替 f 后，可设 $\varphi(f)=1$, 从而

$$\int_{-1}^{1} f(x)x dx=\int_{-1}^{1}|x|dx.$$

在 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 时，上式表明 $\int \operatorname{im} f(x)xdx=0$. 在任何情形下，以 $\operatorname{re} f$ 代替 f 后可设 f 是实值的. 注意到 $f(x)x\leqslant |x|$, 上式表明几乎所有 x 使 $f(x)x=|x|$. 据 f 的连续性知所有 x 使 $f(x)x=|x|$. 于是，当 $x>0$ 时，$f(x)=1$; 当 $x<0$ 时，$f(x)=-1$. 这与 f 的连续性矛盾.

练习 12 (1) 如果 $J[x]=0$, 则所有 $f\in E$ 使 $f(x)=0$, 此即

$$\ker J=\{[x]|x\in E^{\perp}\}=[0].$$

任取 $x\in X$ 及 $f\in(E)_1$ 使 $\|J[x]\|<f(x)+\varepsilon$. 取 $y\in{}^{\perp}E$ 使

$$\|x-y\|<\|[x]\|+\varepsilon.$$

注意到 $f(x)=f(x-y)$, 以 $x-y$ 代替 x 后可设 $\|x\|<\|[x]\|+\varepsilon$. 于是

$$\|J[x]\|-\varepsilon<\|[x]\|+\varepsilon.$$

命 $\varepsilon\to 0$ 得 $\|J[x]\|\leqslant\|[x]\|$, 从而 J 是有界线性算子.

(2) 取 $f\in X^*$ 使 $f({}^{\perp}E)=0$, $\|f\|\leqslant 1$ 且 $f(x)=d(x,{}^{\perp}E)$. 现设 $\dim E=n$. 取 E 的一个 Hamel 基 $f_1,\cdots,f_n$, 则 ${}^{\perp}E=\bigcap\limits_i \ker f_i$. 据 §6.2 练习 7 知 f 是 $f_1,\cdots,f_n$ 的线性组合，于是 f 在 E 中. 这样

$$\|J[x]\|\geqslant f(x)=\|[x]\|,$$

从而 $\|J[x]\|=\|[x]\|$. 命 $e_1,\cdots,e_n$ 同 §6.2 练习 8. 设 $\sum c_i[e_i]=0$, 得

$$f_j(\sum c_ie_i)=0:j=1,\cdots,n.$$

从而 $c_i=0$. 这样 $[e_1],\cdots,[e_n]$ 线性无关. 任取 $x\in E$, 有

$$f_j(x-\sum_i f_i(x)x_i)=f_j(x)-f_j(x)=0.$$

这样 $[x]=\sum\limits_i f_i(x)[x_i]$. 于是 $\dim X/{}^{\perp}E=n$. 可见 J 是满射.

最后取 $z\in X$ 使 $J[z]=\varphi|_E$. 此即 $f\in E$ 时 $f(z)=\varphi(f)$. 又

$$\|[z]\|=\|\varphi|_E\|\leqslant\|\varphi\|.$$

有 $y\in[z]$ 使 $\|y\|<\|[z]\|+\varepsilon$. 这样 $[y]=[z]$ 且 $\|y\|<\|\varphi\|+\varepsilon$.

练习 13 命 y 同练习 12. 如果 $\|y\| < 1$, 命 $z = y$; 否则命 $z = y/(1+\varepsilon)$. 这样 $\|z\| < 1$ 且 $\|y - z\| < \varepsilon$, 从而 $f \in E$ 时,

$$|f(z) - \varphi(f)\| = |f(z) - f(y)| \leqslant \|f\|\varepsilon.$$

练习 14 只证明充分性: 命 $E = \operatorname*{span}_{i \leqslant n} f_i$, 则 E 上有连续线性泛函 φ 使 $\varphi(f_i) = c_i$. 据条件得 $\|\varphi\| \leqslant b$. 据练习 12 得 $x \in X$ 使 $\|x\| \leqslant \|\varphi\| + \varepsilon$ 且

$$f_i(x) = \varphi(f_i) = c_i : i = 1, \cdots, n.$$

练习 15 考虑 $\mathbf{c}_0$ 上的连续线性泛函序列 (f_n) 使 $f_n(x)$ 表示 x 的第 n 项. 命 $c_n = 1$, 因为 $(\sum\limits_n a_n f_n)(x) = \sum\limits_n a_n x_n$, 从而

$$|\sum_n a_n c_n| \leqslant \sum_n |a_n| = \|\sum_n a_n f_n\|.$$

对 $\mathbf{c}_0$ 中任何 x 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, 从而有 k 使 $n > k$ 时, $f_n(x) \neq c_n$.

练习 16 设 f 是 $\mathbf{c}_0$ 上非零连续线性泛函. 据 Riesz 表示定理, 有唯一 $y \in l^1$ 恒使 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 且 $\|f\| = \|y\|_1$. 命 $J = \{n | y_n \neq 0\}$.

泛函 f 的范数可达当且仅当 J 是有限集. 为此设 $\|x\|_\infty = 1$, 则

$$|\sum_{n\in J} x_n y_n| \leqslant \sum_{n\in J} |x_n y_n| \leqslant \sum_{n\in J} |y_n|.$$

若进而 $f(x) = \|f\|$, 则上面两个不等式都为等式. 由上面第二不等式为等式得 $n \in J$ 时 $|x_n y_n| = |y_n|$, 这即 $|x_n| = 1$. 再由 $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = 0$ 知 J 是有限集. 反之, 命 $x_k = |y_k|/y_k$, 则 $x \in \mathbf{c}_0$ 使 $\|x\|_\infty = 1$ 且 $f(x) = \|f\|$.

可见范数可达的泛函 f 全体对应 l^1 的稠密线性子空间 l^0.

练习 17 据 §6.2 定理 3, 有 $\varphi \in X^{**}$ 使 $\|\varphi\| = 1$ 且 $\varphi(f) = \|f\|$. 取 $x \in X$ 恒使 $\varphi(g) = g(x)$ 即可.

练习 18 据练习 16, $\mathbf{c}_0$ 上有范数不可达的连续线性泛函. 据练习 17 知 $\mathbf{c}_0$ 不自反.

练习 19 必要性: 设 $A : X \to Y$ 是拓扑同构 [或等距同构], 则 $A^* : Y^* \to X^*$ 是拓扑同构 [或等距同构]. 进而 $A^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ 是拓扑同构 [或等距同构]. 这样由 $J_Y A = A^{**} J_X$ 知 J_Y 也是同构.

充分性: 因为 X^* 自反, 所以 X 也自反. 设 $B : Y^* \to X^*$ 是拓扑同构 [等距同构], 则 Y^* 自反, 从而 Y 也自反. 于是 $B^* : X^{**} \to Y^{**}$ 是拓扑同构 [等距同构] 表明 X 与 Y 拓扑同构 [等距同构].

练习 20 显然，(3)⇔(5). (1)⇒(3): 因为 $\|x+y\|>2-2\delta$, 所以 $\|x-y\|<\varepsilon$. 由 ε 的任意性知， $x=y$.

(2)⇒(3): 注意到 $\|x\|=\|y\|=1$ 且 $\|x+y\|=2$, 所以有正实数 a 使 $y=ax$. 两边取范数后得 $a=1$. 此即 $y=x$.

(3)⇒(4): 可设 $t>0.5$, 命 $u=tx+(1-t)y$ 及 $z=(2t-1)x+(2-2t)y$, 则 $\|z\|\leqslant 1$ 且 $x+z=2u$. 于是 $\|z\|=1$ 且 $x=z$, 得 $x=y$.

(4)⇒(2): 命 $t=\|x\|/(\|x\|+\|y\|)$, 将 x 和 y 的单位化分别记为 u 和 v. 于是 $\|tu+(1-t)v\|=1$, 从而 $u=v$. 这即 $\|y\|x=\|x\|y$.

练习 21 任取 $\varphi\in X^{**}$ 使 $\|\varphi\|=1$. 在练习 12 中，记 $i=(E,\varepsilon)$. 对应的 y 与 i 有关，记为 y_i, 则 $\|y_i\|<1+\varepsilon$. 任取 $f\in X^*$, 当有限维子空间 E 包含 f 时， $f(y_i)=\varphi(f)$, 可见 $\lim f(y_i)=\varphi(f)$. 于是

$$1\leqslant \varliminf_i \|y_i\|\leqslant \varlimsup_i \|y_i\|\leqslant 1,$$

从而 $\lim\limits_i \|y_i\|=1$. 命 $z_i=y_i/\|y_i\|$, 则 $\|z_i\|=1$. 现在

$$2|\varphi(f)|\leqslant \varliminf_{i,j}\|f\|\|z_i+z_j\|.$$

可见 $2\leqslant \varliminf\limits_{i,j}\|z_i+z_j\|$, 从而 $\lim\limits_{i,j}\|z_i+z_j\|=2$. 由此得 $\lim\limits_{i,j}\|z_i-z_j\|=0$. 于是 (z_i) 依范数收敛于某个 $z\in X$ 使 $\varphi=\hat{z}$.

练习 22 当 L^p 中非零向量 g 和 h 满足 $\|g+h\|_p=\|g\|_p+\|h\|_p$ 时，由 Minkowski 不等式为等式的条件知有 $a>0$ 使 $g=ah$, 因此 L^p 是严格赋范空间. 在 l^1 中 $\|e_1+e_2\|_1=2$ 且 $\|e_1-e_2\|_1=2$.

练习 23 设 $0<r<2$. 任取 L^p 中单位向量 g 和 h 使 $\|g+h\|_p>r$.

当 $1<p\leqslant 2$ 时，据 Clarkson 不等式得

$$\begin{aligned}&(\|g-h\|_p^q+\|g+h\|_p^q)^{\frac{1}{q}}\\ \leqslant&2^{\frac{1}{q}}(\|g\|_p^p+\|h\|_p^p)^{\frac{1}{p}}=2.\end{aligned}$$

可见 $\|g-h\|_p^q\leqslant 2^q-r^q$, 得 L^p 的一致凸性.

当 $2<p<+\infty$ 时，据 Clarkson 不等式得

$$\begin{aligned}&(\|g-h\|_q^p+\|g+h\|_p^p)^{\frac{1}{p}}\\ \leqslant&2^{\frac{1}{q}}(\|g\|_p^p+\|h\|_p^p)^{\frac{1}{p}}=2.\end{aligned}$$

可见 $\|g-h\|_p^p\leqslant 2^p-r^p$, 得 L^p 的一致凸性.

练习 24 提示: 可设 $f \neq 0$. 以 $f_n/\|f_n\|_p$ 代替 f_n 并以 $f/\|f\|_p$ 代替 f 后可设 f_n 和 f 的范数都是 1. 因为 (f_n+f) 弱收敛于 $2f$, 所以

$$\begin{aligned}2\|f\|_p &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\|f_n+f\|_p\\&\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\|f_n+f\|_p \leqslant 2.\end{aligned}$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n+f\|_p = 2$. 据 Clarkson 不等式得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p = 0$.

练习 25 因为 $\|f\| \leqslant \|f\|' \leqslant 2\|f\|$, 所以 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|$ 是等价范数. 这样 $C[0,1]$ 不自反, 它不一致凸. 现设 $\|f\|' = \|g\|' = 1$ 使 $\|f+g\|' = 2$. 因为

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|,$$

$$\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2,$$

且上两式相加后是等式, 所以上两式都是等式, 得

$$\|f+g\|_2 = \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

因为 $\|\cdot\|_2$ 是严格凸范数, 所以 $f = g$. 这样 $(C[0,1], \|\cdot\|'$ 是严格凸的.

练习 26 作单位向量 $x = (1,1)$ 而 $y = (1,-1)$, 则

$$\|x+y\| = \|x-y\| = \|x\| + \|y\| = 2.$$

练习 27 提示: 将练习 26 赋范的 $\mathbb{R}^2$ 保范嵌入到这些空间中去.

练习 28 (1) 任取 X^{**} 中单位向量 φ 和 ψ, 则 X 中有单位向量网 (x_i) 和 (y_j) 使 $(\hat{x}_i)$ 和 $(\hat{y}_j)$ 分别弱 * 逼近 φ 和 ψ. 这样

$$\begin{aligned}&\|\varphi + r\psi\| + \|\varphi - r\psi\|\\&\leqslant \varliminf_{i,j}(\|x_i + ry_j\| + \|x_i - ry_j\|).\end{aligned}$$

从而 $\rho_{X^{**}}(r) \leqslant \rho_X(r)$. 明显地, 有 $\rho_X(r) \leqslant \rho_{X^{**}}(r)$.

(2) 下面 f, g 取遍 Y^* 中单位向量而 x, y 取遍 Y 中单位向量, 则

$$\begin{aligned}\rho_{Y^*}(r) &= \sup\{\|f+rg\| + \|f-rg\| - 2\}\\&= \sup\{f(x) + rg(x) + f(y) - rg(y) - 2\}\\&= \sup\{\|x+y\| - 2 + r\|x-y\|\}.\end{aligned}$$

对于 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使 $\delta \leqslant \varepsilon$ 且 $0 < r \leqslant \delta$ 时, $\rho_{Y^*}(r) < r\varepsilon$. 这样

$$\|x+y\| - 2 + r\|x-y\| < r\varepsilon.$$

特别当 $2 - \|x+y\| < \delta\varepsilon$ 时,

$$\|x-y\| < (\delta\varepsilon + (2 - \|x+y\|))/\delta < 2\varepsilon.$$

(3) 据 (1) 知 X^{**} 是一致光滑的, 据此和 (2) 知 X^* 中一致凸的. 据练习 21 知 X^* 自反. 据 Pettis 定理知 X 自反.

练习 29 据 Riesz 表示定理， φ_n 对应唯一 $g_n \in V_0[a,b]$ 使

$$\varphi_n(f)=\int_a^b f dg_n : f\in C[a,b].$$

因为 $\|\varphi_n\|$ 是 g_n 的全变差，所以 (g_n) 的全变差一致有界. 据 Helly 选取原理取子列后可设 (g_n) 逐点逼近一个有界变差函数 g. 将 g 在 (a,b) 内右连续化后仍记为 g. 因此可设在 g 的连续点与区间端点上， (g_n) 逐点逼近 g. 命

$$\varphi(f)=\int_a^b f dg : f\in C[a,b].$$

当 f 多项式 (即 $f\in\mathbb{C}[x]$) 时，据分部积分和控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\varphi_n(f)=&f(b)g_n(b)-f(a)g_n(a)-\int_a^b g_n df\\ \to&f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g df=\varphi(f).\end{aligned}$$

据 Weierstrass 定理， $\mathbb{C}[x]$ 稠于 $C[a,b]$. 据定理 2 知 (φ_n) 弱 * 逼近 φ (请注意，这是已取过子列了，见第二段).

练习 30 只证明充分性：可设 $x\neq 0$, 以 $x_n/\|x_n\|$ 代替 x_n 后可设 $\|x_n\|=1$ 且 $\|x\|=1$. 取 $f\in X^*$ 使 $\|f\|=1$ 且 $f(x)=1$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=1$, 得

$$\|x_n+x\|\geqslant \lim_{n\to\infty}|f(x_n)+f(x)|=2.$$

据一致凸性得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$.

§6.4 一致有界原理

练习 1 因为 (f_n) 逐点逼近一个线性泛函 f, 据 Banach-Steinhaus 定理知 (f_n) 一致有界且 $\|f\|\leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n\|$. 这样 f 有界且 (f_n) 弱 * 逼近 f.

练习 2 命 $f_n(x)=\sum\limits_{i=1}^n a_i x_i$. 据 Riesz 表示定理知 $f_n: l^1\to\mathbb{C}$ 是连续线性泛函且 $\|f_n\|=\max\limits_{i\leqslant n}|a_i|$. 因为 (f_n) 逐点收敛，据 Banach-Steinhauss 定理知 (f_n) 一致有界. 于是 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\max\limits_{i\leqslant n}|a_i|$ 有限. 因此 (a_n) 有界.

练习 3 只证明充分性：取 M 的测度有限递增覆盖 $\{E_n\}$ 使 h 在每个 E_n 上是有界的．命 $h_n = h\chi_{E_n}$，则乘法算子序列 $(m_{h_n}: L^p \to L^p)_{n=1}^{\infty}$ 点态收敛：当 $f \in L^p(M,\mu)$ 时，$(|h_n f - hf|^p)_{n=1}^{\infty}$ 逐点逼近 0 且 $|h_n f - hf|^p \leqslant |hf|^p$，据控制收敛定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_M |hf - h_n f|^p d\mu = 0$，此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|h_n f - hf\|_p = 0$.

据 Banach-Steinhauss 定理知 $\sup\|m_{h_n}\| = \sup\|h_n\|_\infty < +\infty$．注意到 $(|h_n|)$ 点态递增至 $|h|$，所以 h 本性有界．

练习 4 必要性：弱收敛序列是弱有界的，据定理 3 知 $\sup\limits_n\|f_n\| < +\infty$．命 $e_t(g) = g(t)$，则 e_t 是 $C[a,b]$ 上连续线性泛函．这样 $\lim e_t(f_n) = e_t(f)$，此即 $\lim f_n(t) = f(t)$.

充分性源自 Riesz 表示定理和有界收敛定理：$g \in V_0[a,b]$ 时，

$$\lim \int_a^b f_n dg = \int_a^b f dg.$$

练习 5 如果 Y 是 X 的第二纲集，据 §5.4 定理 2 知它是第二纲空间．命 g_n 是 f_n 在 Y 上的限制，则 (g_n) 弱 * 有界，从而 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|g_n\|$ 有限．注意到 f_n 是 g_n 的唯一保范延拓，$\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n\|$ 有限．矛盾．

练习 6 在 $1 \leqslant p < +\infty$ 时，$C[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密．命

$$\varphi_n(f) = \int_a^b nf(x)\chi_{[a,a+1/n]}(x)dx, f \in L^p[a,b].$$

这样 $\|\varphi_n\| = n^{\frac{q-1}{q}}$(其中 q 是 p 的共轭数)，从而 $\{\varphi_n\}$ 无界．当 $f \in C[a,b]$ 时，$|\varphi_n(f)| \leqslant \|f\|$．由练习 5 知 $C[a,b]$ 是 $L^p[a,b]$ 的第一纲空间．

最后，$C[a,b]$ 是 $L^\infty[a,b]$ 中闭线性子空间．它无内点，从而疏朗．

练习 7 必要性源自定理 3 与连续线性泛函 $f \mapsto \int\limits_E f d\mu = \int\limits_M f\chi_E d\mu$.

充分性：取常数 c 使 $\|f_n\|_1 \leqslant c$ 恒对．对任何 $h \in L^\infty$ 和 $\varepsilon > 0$ 时，取简单函数 g 使 $\|h - g\|_\infty < \varepsilon$．由条件得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n g d\mu = 0$．现在

$$|\int_X f_n h d\mu| \leqslant \int_X |f_n||h-g|d\mu + |\int_X f_n g d\mu|.$$

于是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|\int\limits_X f_n h d\mu| \leqslant c\varepsilon$．命 $\varepsilon \to 0$ 即可．

练习 8 因为 $\sup_n |g(T_n x)| < +\infty$, 所以 (T_n) 弱有界. 据一致有界原理知 $\{T_n\}$ 一致有界. 现在 $(T_n x)$ 是 Y 中弱基本序列, 也即 $(\widehat{T_n x})$ 是 Y^{**} 中弱 * 基本序列, 据练习 1 知 $(\widehat{T_n x})$ 弱 * 收敛, 其极限形如 $\widehat{Tx}$. 换言之, $(T_n x)$ 弱收敛于 Tx. 这样 (T_n) 弱收敛于 T, 从而 T 是线性算子且

$$\|Tx\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n x\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|\|x\|.$$

于是 $\|T\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

练习 9 在 $p = +\infty$ 时, $q = 1$, 命 $f = 1$ 知 g 可积. 下设 $p < +\infty$ 且 $g \geqslant 0$.

方法一: 取 M 的测度有限递增覆盖 $\{M_n\}$ 使 g 在每个 M_n 上是有界的. 命 $g_n = g\chi_{M_n}$, 则 $g_n \in L^q$. 当 $f \in L^p$ 时, 命 $\varphi(f) = \int_M f g_n d\mu$, 则 $\|\varphi\| = \|g_n\|_q$. 由控制收敛定理知,

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f g_n d\mu = \int_M f g d\mu.$$

再由 Banach-Steinhauss 定理知 $c = \sup_{n\geqslant 1} \|\varphi\| < +\infty$.

如果 $q < +\infty$, 由单调收敛定理知 $\|g\|_q = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_q < +\infty$.

如果 $q = +\infty$, 由 $(g > c) = \bigcup_{n\geqslant 1} (g_n > c)$ 知 g 本性有界.

方法二: 在 $p = 1$ 时, 作可测集 $E_n = (2^{n-1} \leqslant g < 2^n)$ 与非负可测函数 $f = \sum_{n\in J} \frac{\chi_{E_n}}{2^n \mu(E_n)}$, 其中 $J = \{n \in \mathbb{Z}_+ | \mu(E_n) > 0\}$. 因为

$$\sum_{n\in J} \int_{E_n} f d\mu = \sum_{n\in J} \frac{1}{2^n} \leqslant 1,$$

所以 f 是可积函数. 按条件知 $|fg|$ 可积. 注意到

$$\int_M |fg| d\mu = \sum_{n\in J} \int_{E_n} |fg| d\mu \geqslant \sum_{n\in J} \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{|J|_0}{2}.$$

可见 J 是有限集, 从而 g 本性有界.

在 $1 < p < +\infty$ 时, 先设 $\mu(M) < +\infty$. 若 $\|g\|_q = +\infty$, 要找整数列 $(k_n)_{n=0}^{\infty}$ 使 $E_n := (k_{n-1} < g^q \leqslant k_n)$ 时, $c_n := \int_{E_n} g^q d\mu \geqslant 1$. 首先

$$+\infty = \int_{(g\geqslant 0)} g^q d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{(0\leqslant g^q < k)} g^q d\mu.$$

可见， $k_0=0$ 且有 k_1 使在 $(g^q<k_1)$ 上， g^q 可积. 由此得以下式子：

$$+\infty=\int\limits_{(g^q\geqslant k_1)} g^q d\mu=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{(k_1\leqslant g^q<k)} g^q d\mu.$$

可见 k_2 也存在，如此下去. 命 $f=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{g^{q-1}\chi_{E_n}}{nc_n}$. 由 $pq-p=q$ 知，

$$\int\limits_M f^p=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^p c_n^p}\int\limits_{E_n} g^{pq-p}d\mu=\sum_{n\in J}\frac{1}{n^p c_n^{p-1}}<+\infty.$$

这样 $f\in L^p(M,\mu)$. 按条件知 fg 可积，这与下式矛盾：

$$\int\limits_M fg=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{nc_n}\int\limits_{E_n} g^q d\mu=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}=+\infty.$$

在 $\mu(M)=+\infty$ 时，命 w 同 §3.1 例 3 而 $\nu=wd\mu$, 则

$$\int\limits_M g^q d\mu=\int\limits_M (gw^{\frac{-1}{q}})^q d\nu,$$

$$\int\limits_M f^p d\mu=\int\limits_M (fw^{\frac{-1}{p}})^p d\nu,$$

$$\int\limits_M fg d\mu=\int\limits_M (fw^{\frac{-1}{p}})(gw^{\frac{-1}{q}} d\nu.$$

以 $gw^{\frac{-1}{q}}$ 代替 g 且以 $d\nu$ 代替 $d\mu$ 后可归结为测度全有限情形.

练习 10 考虑 X 上有界线性算子簇 $T(\cdot,y):\|y\|<1$. 当 $x\in X$ 时,

$$\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|T(x,y)\|=\|T(x,\cdot)\|<+\infty.$$

据一致有界原理，有常数 c 使 $\|y\|<1$ 时 $\|T(\cdot,y)\|\leqslant c$. 于是 $\|x\|<1$ 且 $\|y\|<1$ 时， $|T(x,y)|\leqslant c$. 这样 $\|T\|\leqslant c$.

练习 11 命 $f_n(x)=x^n$, 则 $\|f_n\|=(n+1)^{-1}$ 且 $\varphi(f_n,f_n)=(2n+1)^{-1}$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi(f_n,f_n)|/\|f_n\|^2=+\infty$. 这表明 φ 是无界双线性型.

练习 12 使 $|c_i|\leqslant 1$ 且 $1\leqslant i\leqslant n<+\infty$ 的连续线性泛函

$$g:=c_1f_1+\cdots+c_nf_n$$

的全体记为 E. 因为

$$|g(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(x)|<+\infty,$$

所以 E 弱 * 有界，从而有常数 c 使 $g\in E$ 时，$\|g\|\leqslant c$.

命 $c_i=\lim\limits_{\delta\to 0}|\varphi(f_i)|/(\varphi(f_i)+\delta)$ 及 $g=\sum\limits_{i=1}^{n}c_if_i$. 这样

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi(f_i)|=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi(f_i)=\varphi(g)\leqslant c\|\varphi\|.$$

最后在上式中命 $n\to\infty$ 即可.

练习 13 当 $f\in X^*$ 时，命 $p_n(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)|$, 得连续半范数 $p_n:X^*\to\mathbb{R}$. 命 $p(f)=\sup\limits_{n\geqslant 1}p_n(f)$, 得下半连续的半范数 $p:X^*\to\mathbb{R}$. 于是据 Gelfand 引理知有常数 c 使 $p(f)\leqslant c\|f\|$ 恒成立，即 $\sum\limits_{n\geqslant 1}|f(x_i)|\leqslant c\|f\|$.

练习 14 必要性：可设 E 是紧集. 因为 (f_n) 弱 * 收敛，所以它弱 * 有界. 据定理 3 知有 $c>0$ 恒使 $\|f_n\|\leqslant c$, 从而 $x,z\in E$ 时

$$|f_n(x)-f_n(z)|\leqslant c\|x-z\|.$$

因此 $(f_n|_E)$ 逐点收敛且等度连续. 据 Arzelà-Ascoli 定理知 $(f_n|_E)$ 一致收敛.

充分性：取 X 中有限维子空间的递增序列 (L_n) 使 $L=\bigcup\{L_n|n\geqslant 1\}$ 稠于 X. 据 §5.5 练习 2, 对任何 $\varepsilon>0$, 找个 n 使 $x\in E$ 时，$d(x,L_n)<\varepsilon$ 即可. 否则，存在 $\varepsilon>0$, 使对任何正整数 n, 存在 $x_n\in E$ 满足 $d(x_n,L_n)\geqslant\varepsilon$. 据 §6.2 定理 3, 取 $f_n\in L_n^{\perp}$ 使 $\|f_n\|=1$ 且 $f_n(x_n)=d(x_n,L_n)$.

因为 (f_n) 一致有界且在 X 的稠密集 L 上逐点逼近 0, 从而 (f_n) 弱 * 逼近 0. 于是 f_n 在 E 上一致逼近 0. 这与 $\sup\limits_{x\in E}|f_n(x)|\geqslant\varepsilon$ 矛盾.

练习 15 只证明充分性：据定理 3 知有常数 c 恒使 $\|f_i\|\leqslant c$, 于是

$$\|Ax\|=\sup_{i\in J}|f_i(x)|\leqslant c\|x\|.$$

练习 16 否则，当 $x\in X$ 时，命 $c(x)=\sup\{\|Ax\|:A\in\mathcal{F}\}$. 取 $A_1\in\mathcal{F}$ 使 $\|A_1\|>2$, 则有 $x_1\in X$ 使 $\|x_1\|=2^{-1}$ 且 $\|Ax_1\|>1$. 取 $A_2\in\mathcal{F}$ 使

$$\|A_2\|>2^2\|A_1\|(2+c(x_1)),$$

则有 $x_2\in X$ 使 $\|x_2\|=2^{-2}\|A_1\|^{-1}$ 且 $\|A_2x_2\|>2+c(x_1)$.

如此下去得 $\mathcal{F}$ 中序列 (A_n) 和 X 中序列 (x_n) 使 n 为正整数时,

$$\|A_nx_n\|>n+\sum_{i<n}c(x_i),$$

$$\|x_n\|=2^{-n}\min_{i<n}\|A_i\|^{-1}.$$

由此知级数 $\sum\limits_{n} x_n$ 可和，其和记为 x. 当 $i<n$ 时，$\|A_n x_i\| \leqslant c(x_i)$. 当 $i>n$ 时，$\|x_i\| \leqslant 2^{-i}\|A_n\|^{-1}$，得 $\|A_n x_i\| \leqslant 2^{-i}$. 于是

$$\|A_n x\| \geqslant \|A_n x_n\| - \sum_{i<n} \|A_n x_i\| - \sum_{i>n} \|A_n x_i\| > n-1.$$

这表明 $\{A_n x | n \geqslant 1\}$ 无界，与 $\mathcal{F}$ 强算子有界矛盾.

练习 17 提示: $\|f_n\| = n$ 且 l^0 中 x 是只有有限项不为零的数列. 命 z_n 是前 n 项为 1 其他项为 0 的数列，则 z_n 在 l^0 中使 $\|z_n\|_1 = n$ 且 $\|z_n\|_\infty = 1$. 因此

$$\sup_{n\geqslant 1} \frac{\|A^{-1} z_n\|_1}{\|z_n\|_\infty} = \sup_{n\geqslant 1} n = +\infty.$$

这样 A^{-1} 是无界线性算子.

练习 18 命 $L_n = \{x \in X | \sup\limits_{A\in\mathcal{T}_n} \|Ax\| < +\infty\}$，它是 X 的线性子空间使 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n = X \setminus E$. 说明 L_n 都是第一纲集即可. 否则，有个 $\overline{L_n}$ 有内点. 据 §5.2 范数拓扑的性质知 $\overline{L_n} = X$. 这样 L_n 是 X 中稠密的第二纲集. 于是 $\|A\| = \|A|_{L_n}\|$ 且据 §5.4 定理 2 知 L_n 是第二纲空间. 因为 $\{A|_{L_n} | A \in \mathcal{T}_n\}$ 强算子有界，据一致有界原理知 $\sup\limits_{A\in\mathcal{T}_n} \|A\|$ 有限，矛盾.

练习 19 命 $f_{nl}(x) = \sum\limits_{j=1}^{l} a_{nj} x_j$ 和 $f_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j$，得连续线性泛函 $f_{nl}: \mathbf{c} \to \mathbb{C}$ 和线性泛函 $f_n: \mathbf{c} \to \mathbb{C}$ 使 $x \in \mathbf{c}$ 时，$\lim\limits_{l\to\infty} f_{nl}(x) = f_n(x)$. 用 Banach-Steinhaus 定理知 $f_{nl}: l \geqslant 1$ 一致有界且 f_n 连续.

因为 $f_n(x)$ 是 Ax 的第 n 项且 Ax 是收敛数列 (即 $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ 收敛)，所以再用 Banach-Steinhaus 定理知 (f_n) 一致有界. 现在

$$\begin{aligned}\sup_{\|x\|<1} \|Ax\| &= \sup_{\|x\|<1} \sup_{n\geqslant 1} |f_n(x)| \\ &= \sup_{n\geqslant 1} \sup_{\|x\|<1} |f_n(x)| = \sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|.\end{aligned}$$

注意到 $\|f_{nl}\| = \sum\limits_{j=1}^{l} |a_{nj}|$ 且 $\|f_n\| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{nj}|$，得 $\|A\| = \sup\limits_{n\geqslant 1} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{nj}|$.

§6.5 开映射与闭算子

练习 1 记 $f(a,x)=ax$. 据 §5.2 知 $\mathbb{K}^\times \times X$ 的开集 W 都形如 $\bigcup\{U_i\times V_i|i\in I\}$, 其中 U_i 与 V_i 分别是 $\mathbb{K}^\times$ 与 X 的开集. 于是

$$f(W)=\bigcup\{aV_i|a\in U_i, i\in I\}.$$

因为 a 非零, 所以 aV_i 都是开集. 这样 $f(W)$ 是开集.

练习 2 当 $Af=0$ 时, $(Af)'=0$, 此即 $f=0$. 因此 A 是单射. 因为

$$|(Af)(t)|\leqslant \int_0^t \|f\|ds\leqslant 1\|f\|,$$

所以 A 有界. 任取 $g\in Y$, 命 $f=g'$, 则 $Af=g$. 因此 A 是满射. 这样 A 可逆. 但 $A^{-1}g=g'$. §6.1 例 2 已说明 A^{-1} 无界.

练习 3 (2)⇒(1): 命 $\|x\|=\|x\|_1+\|x\|_2$, 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 都弱于 $\|\cdot\|$. 据范数等价定理, 说明 $\|\cdot\|$ 也是完备范数即可. 任取 $(X,\|\cdot\|)$ 中基本序列 (x_n), 它是 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 的共同基本序列. 于是 (x_n) 在 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 中有相同的极限 x_0. 于是

$$\|x_n-x_0\|=\|x_n-x_0\|_1+\|x_n-x_0\|_2\to 0.$$

这样 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间. (1)⇒(3)⇒(2) 都是明显的.

练习 4 注意到 $X\times Y$ 和 $Y\times X$ 的开集形如 $\bigcup\limits_{i\in J}(U_i\times V_i)$ 及 $\bigcup\limits_{i\in J}(V_i\times U_i)$ 使 U_i 和 V_i 分别是 X 和 Y 的开集, 并注意到下式即可:

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in J}(V_i\times U_i))=\bigcup_{i\in J}(U_i\times V_i),$$
$$f(\bigcup_{i\in J}(U_i\times V_i))=\bigcup_{i\in J}(V_i\times U_i).$$

练习 5 (1) 设 $A:X\to Y$ 是 Banach 空间之间的可逆有界线性算子, 则

$$\{(y,A^{-1}y)|y\in Y\}=\{(Ax,x)|x\in X\}.$$

命 f 同练习 4, 则 $\operatorname{gr}A^{-1}=f(\operatorname{gr}A)$, 这是 $Y\times X$ 的闭集. 据闭图像定理知 A^{-1} 有界.

也可这样: 任取 Y 中序列 (y_n) 使 $(y_n)\to y$ 且在 X 中 $A^{-1}y_n\to x$, 则

$$y_n=AA^{-1}y_n\to Ax.$$

这样 $x=A^{-1}y$, 从而 A^{-1} 是闭算子. 它有界.

(2) 设 $A:X\to Y$ 是 Banach 空间之间的满射, 则 $\tilde{A}:X/\ker A\to Y$ 是可逆有界线性算子, 从而 $\tilde{A}^{-1}$ 有界. 这样 $\tilde{A}$ 是开映射. 现在 $A=\tilde{A}\pi$ 是两个开映射的复合算子, 它是开映射.

练习 6 命 $B=\{f\in L^p:\|f\|_p<1,f\geqslant 0\}$ 及 $c=\sup\{\varphi(f):f\in B\}$, 则 c 有限. 否则, 取 B 中序列 (f_n) 恒使 $\varphi(f_n)\geqslant n^2$. 级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{f_n}{n^2}$ 在 L^p 中绝对可和, 其和记为 f, 则总有 $f\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f_i}{i^2}$. 于是得矛盾: 当 n 是正整数时,

$$\varphi(f)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(f_i)}{i^2}\geqslant n.$$

对一般 (几乎处处) 非负的 $f\in L^p$ 和 $r>0$, $f/(\|f\|_p+r)$ 在 B 中. 于是 $\varphi(f/(\|f\|_p+r))<c$, 得 $\varphi(f)\leqslant c(\|f\|_p+r)$, 命 $r\to 0$ 得 $\varphi(f)\leqslant c\|f\|_p$.

对一般 (几乎处处) 实值的 $g\in L^p$, 取 g 的正部 g^+ 和负部 g^-, 则

$$\pm\varphi(g)\leqslant\varphi(g^{\pm})\leqslant c\|g^{\pm}\|_p\leqslant c\|g\|_p,$$

上式中最后一个不等式源自 $\|g^{\pm}\|_p\leqslant\|g\|_p$. 可见 $|\varphi(g)|\leqslant c\|g\|_p$.

最后任取 $h\in L^p$, 命 $a=\lim\limits_{\delta\to 0}|\varphi(h)|/(\varphi(h)+\delta)$. 取 ah 的实部 g, 则

$$|\varphi(h)|=\varphi(ah)=\varphi(g)$$
$$\leqslant c\|g\|_p\leqslant c\|ah\|_p=c\|h\|_p.$$

可见 $\|\varphi\|\leqslant c$. 据 c 的定义知, $\|\varphi\|=c$.

练习 7 取 p_2 的共轭数 q 并任取 $g\in L^q(M,\mu)$, 命

$$\varphi_g(f)=\langle Tf,g\rangle:f\in L^p(M,\mu).$$

当 g 非负时, φ_g 是 $L^{p_1}(M,\mu)$ 上正线性泛函. 据练习 6 知 φ_g 连续. 任何 $g\in L^q(M,\mu)$ 都是 $L^q(M,\mu)$ 中几个非负成员 g_i 的线性组合, 因此 φ_g 是 φ_{g_i} 的线性组合, 它必然连续.

据闭图像定理, 说明 T 是闭算子即可. 设 $L^{p_1}(M,\mu)$ 中 (f_n) 逼近 f 而 $L^{p_2}(M,\mu)$ 中 (Tf_n) 逼近 h, 对式子 $\varphi_g(f_n)=\langle Tf_n,g\rangle$ 取极限得 $\varphi_g(f)=\langle h,g\rangle$. 这即 $\langle Tf,g\rangle=\langle h,g\rangle$. 于是在 $L^{p_2}(M,\mu)$ 中, $h=Tf$.

练习 8 提示: 取可逆线性算子 $A:X\to Y$, 则 A 和 A^{-1} 都有界.

练习 9 任取 $z\in\mathbf{c}_0$ 使只有有限个分量 z_i 不为 0. 命

$$x_{2i-1}=z_{2i-1},x_{2i}=2iz_{2i-1}:i\geqslant 1,$$
$$y_{2i-1}=0,y_{2i}=z_{2i}-2iz_{2i-1}:i\geqslant 1.$$

于是 x 和 y 也只有有限个分量不为 0 使 $x+y=z$, 从而 $X+Y$ 稠于 $\mathbf{c}_0$.

说明 $X+Y\neq\mathbf{c}_0$ 即可. 否则有 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 恒使 $x_n+y_n=1/n$. 这样 $x_{2i-1}=1/(2i-1)$ 而 $x_{2i}=2i/(2i-1)$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq 0$, 矛盾.

练习 10 设线性组合 $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ 为 0, 则 $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i + \sum_{i>n} 0 e_i = 0$. 又 0 可表示成 $\sum_{i=1}^{\infty} 0 e_i$. 据系数列的唯一性得诸 $a_i = 0$, 这样 $e_n : n \geqslant 1$ 线性无关. 因为

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} f_n(ax+by)e_n = ax+by\\=&a\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)e_n + b\sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)e_n\\=&\sum_{n=1}^{\infty}(af_n(x)+bf_n(y))e_n,\end{aligned}$$

所以又据唯一性得 $f_n(ax+by) = af_n(x)+bf_n(y)$. 这样 f_n 都是线性泛函.

注意到 e_i 有唯一表示 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} e_j$ 使 $a_{ij} = \delta_{ij}$, 得 $f_j(e_i) = \delta_{ij}$. 如果 (a_n) 是有限项不为零的数列使 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j = 0$, 则总有 $\sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j(e_i) = 0$. 因此 $a_i = 0$. 这样 (f_n) 线性无关.

练习 11 (1)⇒(2): 由练习 10 知 (e_n) 是线性无关的而 (f_n) 是线性无关的线性泛函序列使 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. 记 $P_n x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$, 易知 P_n 是幂等算子使 $i \leqslant n$ 时 $P_n e_i = e_i$ 而 $i > n$ 时, $P_n e_i = 0$. 归纳地可知 $f_1(x)e_1 = P_1 x$ 且

$$f_n(x)e_n = P_n x - P_{n-1}x : n \geqslant 2.$$

为说明 $(X, \|\cdot\|')$ 是完备的, 任取其中基本序列 (x_k), 则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \geqslant 1, \forall k, l \geqslant m, \forall n \geqslant 1 : \|P_n x_k - P_n x_l\| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

因此 $(P_n x_k)_{k=1}^{\infty}$ 都是 $(X, \|\cdot\|)$ 中基本序列, 从而 $(f_n(x_k))_{k=1}^{\infty}$ 都是基本数列, 其极限记为 a_n. 在 (4) 中命 $l \to \infty$ 得

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \geqslant 1, \forall k \geqslant m, \forall n \geqslant 1 : \|\sum_{i=1}^{n}(f_i(x_k) - a_i)e_i\| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ 在 $(X, \|\cdot\|)$ 中为 Cauchy 可和的, 其 Cauchy 和记为 x. 为此设 $l > n$, 则 $\sum_{i=n}^{l} a_i e_i$ 为三项 $\sum_{i=1}^{l}(a_i - f_i(x_m))e_i$, $\sum_{i=n}^{l} f_i(x_m)e_i$ 与 $\sum_{i=1}^{n}(f_i(x_m) - a_i)e_i$ 之和. 结合 (5) 得 $\|\sum_{i=n}^{l} a_i e_i\| \leqslant 2\varepsilon + \|\sum_{i=n}^{l} f_i(x_m)e_i\|$. 因为 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_m)e_i$ 为

Cauchy 可和的, 所以 $\lim\limits_{n,l\to\infty}\|\sum\limits_{i=n}^{l}f_i(x_m)e_i\|=0$. 可见, $\overline{\lim\limits_{n,l\to\infty}}\|\sum\limits_{i=n}^{l}a_ie_i\|\leqslant 2\varepsilon$. 命 $\varepsilon\to 0$ 得 $\lim\limits_{n,l\to\infty}\|\sum\limits_{i=n}^{l}a_ie_i\|=0$.

按条件有 $f_i(x)=a_i$. 将 (5) 中 a_i 换成 $f_i(x)$ 并命 $n\to\infty$ 知

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall k\geqslant m:\|x_k-x\|'\leqslant\varepsilon.$$

于是 (x_k) 在 $(X,\|\cdot\|')$ 中逼近 x. 因此 $(X,\|\cdot\|')$ 是 Banach 空间.

由 $\|\cdot\|'$ 的作法知 $\|\cdot\|\leqslant\|\cdot\|'$. 据范数等价定理, 取常数 c 使 $\|\cdot\|'\leqslant c\|\cdot\|$. 因此总有 $\|P_n\|\leqslant c$, 这样每个 f_n 连续. 因为总有 $\lim P_nx=Ix$, 所以 (P_n) 强算子逼近恒等算子 I.

(2)⇒(3): 任取 $x\in X$, 则 $x=Ix$ 且 $Ix=\lim\limits_{n\to\infty}P_nx$ 表明 x 是 L 的接触点. 据 Banach-Steinhauss 定理知 (P_n) 一致有界, 记 $c=\sup\limits_{n\geqslant 1}\|P_n\|$. 于是

$$\|\sum_{i\leqslant n}a_ie_i\|=\|P_n\sum_{i\leqslant m}a_ie_i\|\leqslant c\|\sum_{i\leqslant m}a_ie_i\|.$$

(3)⇒(1): 设级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ie_i$ 的 Cauchy 和为 0, 则对每个正整数 n 有

$$\|\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\|\leqslant\lim_{m\to\infty}c\|\sum_{i=1}^{m}a_ie_i\|=0.$$

归纳地知所有 $a_n=0$. 这说明 (e_n) 线性无关, 也说明: 如果 x 可被 (e_n) 表示 — 有数列 (a_n) 使级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ie_i$ 的 Cauchy 和为 x, 则数列 (a_n) 是唯一的.

记 $L=\mathrm{span}\{e_n|n\geqslant 1\}$ 和 $L_n=\mathrm{span}\{e_i|1\leqslant i\leqslant n\}$. 因为 L 中向量 x 都可被 (e_n) 线性组合 — 存在有限项非零的数列 (a_n) 使 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ie_i$, 可命 $Q_nx=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie_i$ 而得线性算子 $Q_n:L\to L$ 使 $n\leqslant m$ 时, $Q_nQ_m=Q_n$ 且 $\|Q_nx\|\leqslant c\|Q_mx\|$. 当 m 充分大时, $Q_mx=x$. 于是 $\|Q_nx\|\leqslant c\|x\|$, 从而 Q_n 是有界线性算子, 它有唯一保范延拓 $P_n:X\to X$ 使 $\|P_n\|\leqslant c$ 且 $P_n(X)=L_n$. 当 $n\leqslant m$ 时, 仍有 $P_nP_m=P_n$. 设 $P_nx=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ni}e_i$, 则 $P_nx=P_nP_mx$ 表明

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ni}e_i=Q_n\sum_{i=1}^{n}a_{mi}e_i=\sum_{i=1}^{n}a_{mi}e_i.$$

可见 $i \leqslant n$ 时, $a_{ni} = a_{mi}$. 记 $f_i(x) = a_{ii}$, 则 $P_n x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$.

记 $q(x) = \varlimsup_{n\to\infty} \|x - P_n x\|$, 得连续半范数 $q : X \to \mathbb{R}$ 使 $\ker q$ 包含 L. 这样 $X = \ker q$, 此式表明每个 $x \in X$ 满足 $x = \lim_{n\to\infty} P_n x$. 因此 $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ 是唯一数列使级数 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)e_i$ 的 Cauchy 和为 x.

练习 12 对于 $x \in l^p$, 以 $f_n(x)$ 表示 x 的第 n 项, 从 §5.1 例 6 知级数 $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ 的 Cauchy 和为 x. 因此 (e_n) 是 l^p 的 Schauder 基.

练习 13 不是. 否则, 任何 $f \in C[0,1]$ 是唯一 Cauchy 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$. 这样幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径至少为 1, 它表达的函数 f 在 $(0,1)$ 是光滑的. 这与 $[0,1]$ 上有处处不可导的连续函数矛盾.

练习 14 取 $\{y \in L : \|y\| = 1\}$ 的 $c/2$- 网 $\{y_1, \cdots, y_n\}$. 取 X 上范数为 1 的线性泛函 $f_1, \cdots, f_n$ 使 $f_i(y_i) = 1, i \leqslant n$. 因为 X 是无限维的, 所以 X^* 也是无限维的, 从而有 $f \in X^*$ 不是 $f_1, \cdots, f_n$ 的线性组合. 据 §6.2 练习 7 知 $f_1, \cdots, f_n$ 有公共零点 x 使 $f(x) \neq 0$, 这样 $x \neq 0$. 因此可设 x 是单位向量使 $f_i(x) = 0, i \leqslant n$. 可设 $\|y\| = 1$, 取 i 使 $\|y - y_i\| < c/2$. 这样

$$\begin{aligned}\|y + ax\| &\geqslant (\|y_i + ax\| - \|y_i - y\|) \\ &\geqslant (f_i(y_i + ax) - c/2) = 1 - c/2.\end{aligned}$$

最后注意到 $(1+c)(1-c/2) > 1$ 即可.

练习 15 设 $c > 0$, 取正数列 (c_n) 使 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + c_n) < 1 + c$. 取单位向量 e_1. 据 Mazur 引理得单位向量 e_2 使 a_1, a_2 是数时,

$$\|a_1 e_1\| \leqslant (1 + c_1)\|a_1 e_1 + a e_2\|.$$

据 Mazur 引理得单位向量 e_3 使 a_1, a_2, a_3 是数时,

$$\|a_1 e_1 + a_2 e_2\| \leqslant (1 + c_2)\|a_1 e_1 + a e_2 + a_3 e_3\|.$$

如此下去得单位向量序列 (e_n) 使对任意数列 (a_n) 成立下式:

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| \leqslant (1 + c_{n+1})\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i\|.$$

可见 $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ 是无限维闭子空间 $\overline{\operatorname{span}}\{e_n | n \geqslant 1\}$ 的 Schauder 基.

练习 16 提示: (1) 命 $k=\max\{p|2^p\leqslant n\}$ 而 $i=n-2^k$ 即可. 当 $k<l$ 时, $2^l\geqslant 2^k+2^k$ 而 $i-j<2^k\leqslant 2^l-2^k$, 这样 $n<m$. 当 $k>l$ 时, $n>m$. 当 $k=l$ 时, $n<m$ 当且仅当 $i<j$.

(2) 将 $[0,1]$ 上函数限制在 $(0,1]$ 上后, $L^p[0,1]$ 等距同构于 $L^p(0,1]$. 因此可视 $C[0,1]$ 为 $L^p(0,1]$ 的稠密集. 对于 $h\in C[0,1]$ 与 $\varepsilon>0$, 取 $\delta>0$ 使 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, $|h(x_1)-h(x_2)|<\varepsilon$. 取正整数 k 使 $2^k\delta>1$, 命 $g(x)=\sum\limits_{i=0}^{2^k-1}h(\frac{i+1}{2^k})f_{2^k+i}$. 当 $0<x\leqslant 1$ 时, 有唯一 i 使 x 在区间 $(\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}]$ 中, 所以 $|g(x)-h(x)|<\varepsilon$. 于是 $\|g-h\|_p<\varepsilon$. 这样 E 在 $C[a,b]$ 中稠密. 据稠密的传递性得 E 在 $L^p(0,1]$ 中稠密.

(3) 据 (2), $\operatorname{span}\{e_n|n\geqslant 1\}$ 稠于 L^p. 任取数列 (a_n), 命 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ie_i$ 而 $g=\sum\limits_{i=1}^{n+1}a_ie_i$. 函数 f 和 g 的唯一区别在于有个二进制区间 I 使 f 在 I 上为一个常数 b, 而 g 在 I 的前半区间上为常数 $b-a_{n+1}$ 且在 I 的后半区间上为常数 $b+a_{n+1}$. 于是差 $\|f\|_p^p-\|g\|_p^p$ 为

$$|b|^p|I|_1-(|b-a_{n+1}|^p|I|_1/2+|b+a_{n+1}|^p|I|_1/2)\leqslant 0.$$

可见 $\|f\|_p\leqslant\|g\|_p$. 于是练习 11(3) 的常数 c 可取为 1.

(4) 命 $E=\operatorname{span}\{g_n|n\geqslant 1\}$, 其中函数在 [0,1] 上连续且逐段线性, 它们的结点是二进制区间的端点. 因此 E 稠密于 $C[0,1]$. 使 g_{n+1} 无零点的区间上的函数 $g_1,\cdots,g_n$ 都是线性的, 这样练习 11(3) 中常数 $c=1$.

练习 17 提示: A 诱导的算子 $\tilde{A}:X/\ker A\to\operatorname{ran}A$ 是有限维赋范空间之间的可逆线性算子.

练习 18 必要性: 设 $0<c<+\infty$ 使 $x\in X$ 时, $\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2$. 于是

$$\|Ix\|_1=\|x\|_1\leqslant c\|x\|_2.$$

这表明 $I:(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$ 是有界线性算子.

充分性: 因为 $\|x\|_1=\|Ix\|_1\leqslant\|I\|\|x\|_2$, 所以 $\|\cdot\|_1$ 弱于 $\|\cdot\|_2$.

练习 19 注意到 $y=Ax$ 当且仅当 $g\in Y^*$ 时, $g(y)-g(Ax)=0$. 一般地, 命 $h_g(x,y)=g(y)-(gA)(x)$, 这得 $X\times Y$ 上的连续线性泛函 h_g 使 $\operatorname{gr}A=\bigcap\{\ker h_g|g\in Y^*\}$. 这是 $X\times Y$ 的闭线性子空间. 可见 A 是闭线性算子 (在 X 和 Y 都完备时, 据闭图像定理知 A 是有界的).

命 $B : Y^* \to X^*$ 使 Bg 为复合 gA. 当 $x \in X$ 时, 命 $\varphi_x(g, f) = f(x) - g(Ax)$, 得 $Y^* \times X^*$ 上连续线泛函 φ_x 使 $\operatorname{gr} B = \bigcap\{\ker \varphi_x | x \in X\}$. 这是 $Y^* \times X^*$ 的闭线性子空间, 因此据闭图像定理知 B 有界. 现在

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \sup\{|gAx| : g \in (Y^*)_1\} \\ &= \sup\{|(Bg)(x)| : g \in (Y^*)_1\} \leqslant \|B\|\|x\|.\end{aligned}$$

从而 $\|A\| \leqslant \|B\|$. 这样 A 连续. 明显地 B 是 A 的共轭算子.

练习 20 只证明充分性: 据闭图像定理说明 A 是闭算子即可. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \|Af_n - g\|_p = 0$. 据 Чебышев 不等式,

$$\varepsilon^p \mu(|Af_n - g| \geqslant \varepsilon) \leqslant \|Af_n - g\|_p^p : \varepsilon > 0.$$

因此 (Af_n) 依测度逼近 g. 于是 g 与 Af 是 (几乎处处) 相等的.

练习 21 命 $T_p : l^p \to l^p$ 同 §6.1 练习 6, 则 $T_p(ne_n) = e_n$. 于是 $\operatorname{ran} T_p$ 包含 $\operatorname{span}\{e_n | n \geqslant 1\}$, 它稠于 l^p. 如果 T_p 有闭值域, 则 $\operatorname{ran} T_p = l^p$. 因为 (n^{-1}) 在 l^p 中, 所以有 $x \in l^p$ 使 $T_p x$ 的第 n 项是 n^{-1}. 由此恒得 $x_n = 1$, 矛盾.

练习 22 因为 A 诱导的算子 $\tilde{A} : X/\ker A \to \operatorname{ran} A$ 是 Banach 空间之间有界的可逆线性算子, 所以据逆算子定理知 $\tilde{A}$ 是拓扑同构.

练习 23 提示: 用练习 22 和 §6.1 练习 10 的结论.

练习 24 记 $Y = X/L$. 当 $x \in L$ 且 $g \in Y^*$ 时, $g(\pi(x)) = 0$. 因此 $\pi^*(g)$ 零化 L. 这样 $\operatorname{ran} \pi^* \subseteq L^\perp$. 当 $f \in L^\perp$ 时, $f(L) = \{0\}$. 因此 $f(L) = 0$. 故 f 诱导 Y 上一个连续线性泛函 g 使 $g\pi = f$. 这样 $\operatorname{ran} \pi^* \supseteq L^\perp$. 等式 $g\pi(X)_1 = g(X/L)_1$ 表明 $\|g\pi\| = \|g\|$. 此即 $\|\pi^* g\| = \|g\|$.

(1) 充分性: 任取 X 中基本序列 (x_n), 则 $([x_n])$ 是 Y 中基本序列, 其极限记为 $[x_0]$. 取 $z_n \in L$ 使

$$\|x_n - x_0 - z_n\| < \|[x_n - x_0]\| + 1/n.$$

于是 $(x_n - z_n)$ 逼近 x_0, 从而 $(x_n - z_n)$ 是基本序列. 这样 (z_n) 是 L 中基本序列, 其极限记为 z. 因此 (x_n) 逼近 $x_0 + z$, 从而 X 完备.

必要性: 任取 Y 中级数 $\sum \eta_n$ 使 $\sum \|\eta_n\|$ 收敛. 取 $x_n \in \eta_n$ 使 $\|x_n\| < \|\eta_n\| + 1/2^n$. 于是 $\sum \|x_n\|$ 收敛, 级数 $\sum x_n$ 在 X 收敛, 其极限记为 x. 记 $\eta = \pi(x)$. 由 π 的连续性知 $\eta = \sum \pi(x_n) = \sum \eta_n$. 据 §5.1 定理 2 知, Y 完备, 又 L 是完备空间 X 的闭集, 它也完备.

(2) 只证明充分性：由 Y 可分，可取 X 中可列集 D 使 $\pi(D)$ 稠于 Y. 作可分集 $M=\overline{\text{span}}(L\cup D)$, 任取 $f\in M^\perp$, 则 f 诱导了 Y 上连续线性泛函 g 使 $g\pi=f$ 且 $g\pi(D)=0$. 于是 $g=0$. 这样 $f=0$. 据 §6.2 定理 3 知 $M=X$.

(3) 必要性：用 Pettis 定理知 L 和 X^* 自反. 作为 X^* 的闭线性子空间，$L^\perp$ 自反. 因为 Y^* 与 $L^\perp$ 等距同构，于是 Y^* 自反，从而 Y 自反.

充分性：任取 $\varphi\in X^{**}$, 由 Y 的自反性得 $x\in X$ 使 $g\in Y^*$ 时

$$\pi^{**}(\varphi)(g)=g([x])=g(\pi(x)).$$

此即 $\varphi(\pi^*g)=\hat{x}(\pi^*g)$. 又 $\pi^*(Y^*)=L^\perp$, 得 $(\varphi-\hat{x})(L^\perp)=0$, 从而 $\varphi-\hat{x}$ 诱导唯一连续线性泛函 $\psi:X^*/L^\perp\to\mathbb{K}$ 使 $f\in X^*$ 时 $(\varphi-\hat{x})(f)=\psi([f])$. 注意到 $X^*/L^\perp$ 与 L^* 在 $[f]\mapsto f|_L$ 下等距同构，有唯一 $z\in L$ 使

$$f|_L(z)=\psi([f])=\varphi(f)-f(x).$$

这样 $\varphi(f)=f(x+z)$. 命 $y=x+z$, 则 $\varphi=\hat{y}$, 因此 X 自反.

(4) 必要性是显然的. 充分性：取 L 的一个线性基 $\{e_1,\cdots,e_k\}$ 和 X/L 的一个线性基 $\{[e_{k+1}],\cdots,[e_n]\}$. 任取 $x\in X$, 有系数 $c_i:i>k$ 使 $[x]=\sum\limits_{i>k}c_i[e_i]$, 即 $[x-\sum\limits_{i>k}c_ie_i]=[0]$, 从而 $x-\sum\limits_{i>k}c_ie_i$ 在 L 中，于是有系数 $c_i:i\leqslant k$ 使 $x-\sum\limits_{i>k}c_ie_i=\sum\limits_{i\leqslant k}c_ie_i$, 得 $x=\sum\limits_{i\leqslant n}c_ie_i$. 如果 $x=0$, 则 $\sum\limits_{i>k}c_i[e_i]=[0]$. 这样 $i>k$ 时，$c_i=0$, 从而 $\sum\limits_{i\leqslant k}c_ie_i=0$. 于是 $i\leqslant k$ 时 $c_i=0$. 从而 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 的线性基. 由 $n=k+(n-k)$ 知 $\dim X=\dim L+\dim(X/L)$.

练习 25 记 $L=\ker A$, 则 A 诱导个单线性算子 $B:X/L\to Y$ 使 $A=B\pi$. 因为 L 与 $B(L)$ 同为有限维的，B 有界，从而 A 有界. 因为 $X/\ker A\cong\operatorname{ran}A$ 完备、可分且自反，其余的结论源自练习 24.

练习 26 因为 L 是拓扑可补的 — 存在有界幂等算子 $P:X\to X$ 使 $\operatorname{ran}P=L$, 命 $Bx=APx$ 即可.

练习 27 (1)⇔(2) 是显然的. (1)⇒(3): 命 $By=APy$ 即可.

(2)⇒(4): 取 X^* 的单位球面的子集 E 使 $x\in X$ 时，

$$\|x\|=\sup\{|f(x)|:f\in E\}.$$

规定 $(Jx)(f)=f(x)$, 得等距算子 $J:X\to l^\infty(E)$. 取有界线性算子 $Q:l^\infty(E)\to X$ 使 $QJ=I:X\to X$.

当 $f \in E$ 时, A^*f 是 Z 上连续线性泛函, 取其在 Y 上的一个保范延拓 T_f. 命 $(Cy)(f) = T_f(y)$, 得有界线性算子 $C : Y \to l^\infty(E)$ 使 $z \in Z$ 时,

$$(Cz)(f) = (A^*f)(z) = (JAz)(f).$$

因此 $Cz = JAz$, 从而 $QCz = Az$. 这表明 $QC : Y \to X$ 是 A 的连续线性延拓.

(4)⇒(1) 同 (3)⇒(1): 命 $Z = X$, 取恒等算子 $I : X \to X$ 的连续线性延拓 $B : Y \to X$. 命 $J : X \to Y$ 是包含映射且 $P = JB$ 即可.

练习 28 (1)⇒(2): 设 $\tilde{X}$ 是 X 的完备化, 则恒等算子 $I : X \to X$ 有 (唯一) 保范延拓 $A : \tilde{X} \to X$. 由 I 的等距性知 A 是等距的, 所以 X 完备且 $\tilde{X} = X$.

现可设 X 是 Z 的子空间而 $J : X \to Z$ 是包含映射. 取恒等算子 $I : X \to X$ 的保范延拓 $A : Z \to X$, 则 JAx 在 X 中, 因此 $(JA)^2x = JAx$. 这表明 JA 是有界幂等算子使 $X = \operatorname{ran} JA$, 从而 X 在 Z 中拓扑可补.

(2)⇒(3) 是显然的. 参考练习 27 的 (2)⇒(4).

练习 29 参考练习 27 和练习 28.

练习 30 (1) 命 $p(x) = \sup\limits_F \|\sum\limits_{i\in F} f_i(x)e_i\|$, 得下半连续的半范数 $p : X \to \mathbb{R}$. 据 Gelfand 引理得正实数 c 恒使 $p(x) \leqslant c\|x\|$. 命 $q(x) = \varlimsup\limits_F \|x - \sum\limits_{i\in F} f_i(x)x_i\|$, 得半范数 $q : X \to \mathbb{R}$ 使 $q(x) \leqslant (1+c)\|x\|$ 且 $\ker p \supseteq \{x_i | i \in J\}$, 从而 $\ker p \supseteq \overline{\operatorname{span}}_{i\in J}\, x_i$, 此式表明 $x \in \overline{\operatorname{span}}_{i\in J}\, e_i$ 时, $x = \sum\limits_{i\in J} f_i(x)e_i$.

(2) 命 $p(f) = \sum\limits_F \|\sum\limits_{i\in F} f(e_i)f_i\|$, 得下半连续的半范数 $q : X^* \to \mathbb{R}$. 据 Gelfand 引理得正实数 c 恒使 $q(f) \leqslant c\|f\|$. 命 $q(f) = \varlimsup\limits_F \|f - \sum\limits_{i\in F} f(e_i)f_i\|$, 得半范数 $q : X^* \to \mathbb{R}$ 恒使 $q(f) \leqslant (1+c)\|f\|$ 且 $\ker q \supseteq \{f_i | i \in J\}$, 从而 $\ker q \supseteq \overline{\operatorname{span}}_{i\in J}\, f_i$, 此式表明 $f \in \overline{\operatorname{span}}_{i\in J}\, f_i$ 时, $f = \sum\limits_{i\in J} f(e_i)f_i$.

§6.6 凸集与超平面

练习 1 (1) 设 $r > 0$. 当 $p(x) \leqslant r$ 且 $0 < t < 1$ 时, $p(tx/r) < 1$. 因此 $tx/r \in E$. 命 $t \to 1$ 得 $x \in rE$. 因此 $(p \leqslant r) \subseteq rE$. 由此得 $(p \leqslant r) = rE$, 这是闭集. 又 $(p \leqslant 0) = \bigcap\{(p \leqslant r) | r > 0\}$, 这是闭集. 因此 p 下半连续.

(2) 必要性: $(p < 1) \subseteq E$. 前者是包含原点的开集.

充分性: 设 $(X)_r \subseteq E$, 则 $\varepsilon > 0$ 时, $rx \in (\|x\|+\varepsilon)E$. 这样 $p(x) \leqslant \|x\|/r$.

(3) 据 Gelfand 引理知 p 连续.

练习 2 必要性：设 $\{x_i\} \subseteq E$ 且 (x_i) 弱收敛至 x，据定理 Mazur 定理，有强逼近 x 的序列 (y_n) 使 y_n 是 $\{x_i\}$ 的凸组合．这样 (y_n) 是 E 中序列使 $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = 0$．因此 x 在 E 中．

充分性：任取 E 中强收敛序列 (x_n)，其极限记为 x．因为 (x_n) 也弱收敛至 x，所以 x 在 E 中．这样 E 是闭集．

练习 3 命 $b = \sup \operatorname{re} f(M)$，则有 M 中序列 (x_n) 使 $\lim \operatorname{re} f(x_n) = b$．取子列后可设 (x_n) 弱收敛，其极限记为 x．据练习 2 知 x 仍在 M 中．这样 $\operatorname{re} f(x) = \lim \operatorname{re} f(x_n) = b$，从而 b 是 $\operatorname{re} f$ 在 M 上的最大值．

练习 4 命 $a = \inf\{\|y\| : y \in M\}$，则 M 中有序列 (y_n) 使 $\lim \|y_n\| = a$．这样 (y_n) 是有界序列．取子列后可设 (y_n) 弱收敛，其极限 y_0 满足

$$a \leqslant \|y_0\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|y_n\| = a.$$

因此 y_0 是 M 对原点的最佳逼近．

练习 5 平移后可设 E 包含原点．取 E 的 Minkowski 泛函 p，则 $(p < 1) \subseteq E$．当 $x \in E$ 时，取 $r > 0$ 使 $O(x, r) \subseteq E$，据本节的练习 30 得 $p(x) < 1$．于是 $E \subseteq (p < 1)$．因此 $E = (p < 1)$．

取 $a, b > 0$ 使 $aU \subseteq E \subseteq bU$．任取 $x \in X$ 及 $r > 0$，

$$\begin{aligned}
&ax/(\|x\| + r) \in aU \subseteq E \\
\Rightarrow &p(ax/(\|x\| + r)) < 1 \Rightarrow ap(x) < \|x\| + r; \\
&x/(p(x) + r) \in E \subseteq bU \\
\Rightarrow &\|x/(p(x) + r)\| < b \Rightarrow \|x\| < b(p(x) + r).
\end{aligned}$$

命 $r \to 0$ 得 $ap(x) \leqslant \|x\| \leqslant bp(x)$．约定 $0/0 = 0$，命 $f(x) = \|x\|x/p(x)$ 且 $g(x) = p(x)x/\|x\|$，得连续映射 $f, g : X \to X$ 使 $fg = gf = I : X \to X$．

当 $\|x\| < 1$ 时，$p(f(x)) < 1$，得 $f(U) \subseteq E$；当 $p(x) < 1$ 时，$\|g(x)\| < 1$，得 $g(E) \subseteq U$．于是 $f(U) = E$．

练习 6 (1) 充要条件源自数学归纳法．此时，当 $f(x_i) \leqslant c$ 时，

$$f(\sum t_i x_i) \leqslant \sum t_i f(x_i) \leqslant \sum t_i c = c.$$

这样 $(f \leqslant c)$ 对凸组合封闭，它是凸集．仿此得 (2)．

练习 7 参见 §2.4 练习 4．

练习 8 当 (x_n) 强逼近 x 时， (x_n) 也弱逼近 x. 因此 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n) \leqslant f(x)$.

练习 9 当 (x_n) 强逼近 x 时， (x_n) 也弱逼近 x. 因此 $f(x) \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n)$.

练习 10 因为 $(f \leqslant c)$ 是凸闭集，它弱闭．这样 f 弱下半连续.

练习 11 因为 $(f \geqslant c)$ 是凸闭集，它弱闭．这样 f 弱上半连续.

练习 12 因为 $(p < k)$ 是吸收的均衡凸集使 $X = \bigcup\limits_{k\geqslant 1}(p < k)$, 据 Baire 纲定理得 $r > 0$ 使 $(X)_r \subseteq \overline{(p<1)}$. 当 $\|x\| < r$ 时，有个 x_1 使 $p(x_1) < 1$ 且 $\|x - x_1\| < r/2$; 有个 x_2 使 $p(x_2) < 1/2$ 且 $\|x - x_1 - x_2\| < r/2^2$. 如此下去得 X 中序列 (x_n) 使总有 $p(x_n) < 1/2^n$ 且 $\|x - \sum\limits_{i\leqslant n} x_i\| < r/2^n$. 这样级数 $\sum\limits_{i\geqslant 1} x_i$ 的 Cauchy 和为 x 且 $p(x) < 2$. 这表明 $(X)_r \subseteq (p < 2)$. 因此 $(p < 1)$ 是原点的邻域，据练习 1 知 p 连续.

练习 13 设 $A : X \to Y$ 是 Banach 空间之间满的有界线性算子．命

$$p(y) = \inf\{\|x\| : Ax = y\}.$$

由此得半范数 $p : Y \to \mathbb{R}$. 任取 Y 中 Cauchy 可和级数 $\sum\limits_n y_n$ 使 $\sum\limits_n p(y_n)$ 有限．对于 $r > 0$, 取 y_n 的一个原像 x_n 使 $\|x_n\| < p(y_n) + r/2^n$. 这样 X 中级数 $\sum\limits_n x_n$ 为绝对可和的，于是 $A(\sum\limits_n x_n) = \sum\limits_n y_n$, 从而

$$p(\sum_n y_n) \leqslant \|\sum_n x_n\| < \sum_n p(y_n) + r.$$

命 $r \to 0$ 得 $p(\sum\limits_n y_n) \leqslant \sum\limits_n p(y_n)$. 据 Zabreĭko 引理知， p 连续.

取 $s > 0$ 使 $\|y\| < s$ 时， $p(y) < 1$. 设 $Ax = y$ 使 $\|x\| < 1$. 这表明 $(Y)_s \subseteq A(X)_1$, 从而 A 是开映射.

练习 14 将 $\{x_n\}$ 生成的闭线性子空间记为 Y, 它可分且据 Pettis 定理知它自反．为示区别，对于 $y \in Y$ 记 $\tilde{y}(g) = g(y)$, 其中 $g \in Y^*$. 据 §6.3 定理 1, 取子列后可设 $(\tilde{x}_n)$ 在 Y^* 中弱 * 收敛，其极限形如 $\tilde{x}_0$(其中 $x_0 \in Y$). 对任何 $f \in X^*$ 有 $\lim \tilde{x}_n(f|_Y) = \tilde{x}_0(f|_Y)$. 这即 $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

现取 L 中序列 (x_n) 使 $\lim \|x - x_n\| = d(x, L)$. 显然 (x_n) 有界．取子列后可设 (x_n) 弱收敛，其弱极限 x_0 在 L 中．于是 $(x - x_n)$ 弱逼近 $x - x_0$. 这样 $\|x - x_0\| \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|x - x_n\|$. 于是 $d(x, x_0) \leqslant d(x, L)$. 因此 x_0 是 L 对 x 的最佳逼近.

练习 15 将 X 视为实 Banach 空间时记为 Y, 有此事实: f 是 X 上复线性泛函当且仅当 Y 上有唯一实线性泛函 g 使恒 $f(x)=g(x)-\sqrt{-1}g(\sqrt{-1}x)$. 若记 $g_*(x)=g(\sqrt{-1}x)$, 则 $f=g-\sqrt{-1}g_*$ 且 $\|f\|=\|g\|$.

必要性: 任取 $\varphi\in Y^{**}$, 规定泛函 $\psi\in X^{**}$ 如下:

$$\psi(g-\sqrt{-1}g_*)=\varphi(g)-\sqrt{-1}\varphi(g_*):g\in Y^*,$$

从而有 $x\in X$ 恒使 $\psi(f)=f(x)$, 此即

$$\varphi(g)-\sqrt{-1}\varphi(g_*)=g(x)-\sqrt{-1}g_*(x).$$

由此得 $\varphi(g)=g(x)$. 注意到 $x\in Y$, 从而 Y 自反.

充分性: 任取 $\psi\in X^{**}$. 规定 $\varphi\in Y^{**}$ 如下:

$$\varphi(g)=\operatorname{re}\psi(g-\sqrt{-1}g_*):g\in Y^*.$$

从而有 $y\in Y$ 恒使 $\varphi(g)=g(y)$. 此即 $\operatorname{re}\psi(f)=(\operatorname{re}f)(y)$. 以 $\sqrt{-1}f$ 代替 f 可得 $\operatorname{im}\psi(f)=(\operatorname{im}f)(y)$. 这样 $\psi(f)=f(y)$, 从而 X 自反.

练习 16 (1) 任取 S 的两个凸组合 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_ix_i$ 和 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_jy_j$, 则

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_i a_ix_i-\sum_j b_jy_j\Big\|=\Big\|\sum_i\sum_j a_ib_jx_i-\sum_j\sum_i b_ja_iy_j\Big\|\\=&\Big\|\sum_{i,j}a_ib_j(x_i-y_j)\Big\|\leqslant\sum_{i,j}a_ib_j\|x_i-y_j\|\leqslant\operatorname{diam}S.\end{aligned}$$

可见, $\operatorname{diam}\operatorname{cov}S\leqslant\operatorname{diam}S$. 注意到 $\operatorname{diam}\operatorname{cov}S=\operatorname{diam}\overline{\operatorname{cov}}S$ 且 $\operatorname{diam}S\leqslant\operatorname{diam}\operatorname{cov}S$ 即可.

(2) 任取 $z\in S$ 并任取 S 的凸组合 $y=\sum\limits_{j=1}^{n}b_jy_j$, 则

$$\begin{aligned}\|x-z\|&\leqslant\|x-y\|+\Big\|\sum b_iy_i-z\Big\|\\&\leqslant\|x-y\|+\sum b_i\|y_i-z\|\\&\leqslant\|x-y\|+\operatorname{diam}S.\end{aligned}$$

上式关于所有 $z\in S$ 和 $y\in\operatorname{cov}S$ 取下确界即可.

练习 17 只证明充分性: 据闭集套定理, 说明 X 中直径趋向零的闭集套 (S_n) 有公共交点即可. 据练习 16(1), $(\overline{\operatorname{cov}}\,S_n)$ 是 X 中直径趋向零的闭凸集套, 取其公共交点 x. 当 $k\geqslant n$ 时, 据练习 16(2) 得

$$d(x,S_n)\leqslant d(x,S_k)\leqslant d(x,\overline{\operatorname{cov}}\,S_k)+\operatorname{diam}S_k.$$

命 $k\to\infty$ 得 $d(x,S_n)=0$. 因此 x 在每个 S_n 中.

练习 18 只证明必要性: 任取 X 中直径趋向零的子集套 (S_n), 则 $(\overline{S_n})$ 是直径趋向零的闭集套, 取其公共交点 x, 则

$$d(x, S_n) = d(x, \overline{S_n}) = 0 : n \geqslant 1.$$

因此 x 是所有 S_n 的接触点.

练习 19 (1)⇒(2) 源自 Pettis 定理.

(2)⇒(3): 将 $\{x_n\}$ 生成的闭线性子空间记为 L, 它可分. 据条件知 L 自反. 用练习 14 的第一个结论即可.

(3)⇒(4): 取 $x_n \in E_n$, 取子列后可设 (x_n) 弱收敛, 其极限记为 x. 因为 $(x_k)_{k \geqslant n}$ 是凸闭集 E_n 中序列, 其弱极限 x 在 E_n 中.

(4)⇒(1): 因为 X 中直径趋向零的凸闭集套都有公共交点, 所以据练习 17 知 X 完备. 如果 X 不自反, 用以下练习 20(3)⇒(1) 的证明知 X 中有个有界凸闭集套无公共交点, 矛盾.

练习 20 (1)⇒(2): 据练习 15, 恒设 X 是实空间. 设 $J : X \to X^{**}$ 是典则嵌入. 取 $\varphi \in X^{**}$ 使 $c < d(\varphi, J(X)) < 1$. 可设 $c < \|\varphi\| < 1$. 若能说明 $(X^*)_1$ 中有序列 (h_n) 且 $(X)_1$ 中有序列 (z_n) 恒使 $\varphi(h_n) = c$ 且 $i \leqslant j$ 时 $h_i(z_j) = c$ 而 $i > j$ 时 $h_i(z_j) = 0$, 命 x_n 为 z_n 的单位化而 f_n 为 h_n 的单位化即可.

取 $h_1 \in (X^*)_1$ 使 $\varphi(h_1) = c$, 得 $\|h_1\| > c$, 取 $z_1 \in (X)_1$ 使 $h_1(z_1) = c$. 设满足要求的 $h_i, z_i : i < n$ 已取好. 命 $b = c/d(\varphi, J(X))$, 则 $0 < b < 1$. 当 $a_1, \cdots, a_n$ 是实数时,

$$\begin{aligned}|\sum_{i<n} a_i 0 + a_n c| &= |a_n| b d(\varphi, J(X)) \\ &\leqslant b \|\sum_{i<n} a_i J z_i + a_n \varphi\|.\end{aligned}$$

据 Helly 定理 (§6.3 练习 14), 有个 $h_n \in (X^*)_1$ 使 $\varphi(h_n) = c$ 且 $i < n$ 时 $(Jz_i)(h_n) = 0$, 这即 $h_n(z_i) = 0$. 因为

$$|\sum_{i \leqslant n} a_i c| = |\sum_{i \leqslant n} a_i \varphi(h_i)| \leqslant \|\varphi\| \|\sum_{i \leqslant n} a_i h_i\|,$$

所以再据 Helly 定理, 有个 $z_n \in (X)_1$ 使 $i \leqslant n$ 时 $h_i(z_n) = c$.

(3)⇒(1): 据练习 19(1)⇒(4), 说明 X 中 $(\overline{\operatorname{cov}}_{i \geqslant n} x_i)$ 这个有界凸闭集套无公共交点即可. 否则, 取其一个公共交点 x_0. 当 $i \geqslant n$ 时, $f_n(x_i) \geqslant c$, 因此 $z \in \operatorname{cov}_{i \geqslant n} x_i$ 时 $f_n(z) \geqslant c$. 由连续性得 $f_n(x_0) \geqslant c$. 任取 $\varepsilon > 0$, 则有 $k > 1$ 和 $z \in \operatorname{cov}\{x_i | i \leqslant k\}$ 使 $\|z - x_0\| < \varepsilon$. 当 $n > k$ 时,

$$|f_n(x_0)| = |f_n(x_0 - z)| < \varepsilon.$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=0$. 矛盾.

(2)⇒(4): 当 $y\in \operatorname*{cov}\limits_{i\leqslant n} x_i$ 且 $z\in \operatorname*{cov}\limits_{i>n} x_i$ 时,

$$\|y-z\|\geqslant f_{n+1}(z-y)\geqslant c.$$

(5)⇒(1): 据练习 19(1)⇒(4) 说明 X 中有界凸闭集套 $(\overline{\operatorname*{cov}\limits_{i>n}} x_i)$ 无公共交点即可. 否则, 取其一个公共交点 x, 则有 n 和 $y\in \operatorname*{cov}\limits_{i\leqslant n} x_i$ 使 $\|x-y\|<c/2$. 也有个 $z\in \operatorname*{cov}\limits_{i>n} x_i$ 使 $\|x-z\|<c/2$. 这样 $\|y-z\|<c$, 矛盾.

最后注意到, (2)⇒(3) 和 (4)⇒(5) 都是显然的.

练习 19 的证明和练习 20 的证明在相互引用彼此的结论, 似乎有循环论证之嫌疑. 但请注意, 练习 19 已证明了 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4), 而练习 20 证明 (3)⇒(1) 和 (5)⇒(1) 时用到了练习 19 的 (1)⇒(4). 这样练习 19 证明 (4)⇒(1) 中用到练习 20 的 (3)⇒(1) 就无问题. 因此这里没有循环论证.

练习 21 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, 命 $e_n(x)=x^n$, 由此得 $C[0,1]$ 中序列 (e_n). 命 $E_n=\overline{\operatorname{cov}}\{e_k|k\geqslant n\}$, 由此得 $C[0,1]$ 中有界凸闭集套 (E_n).

当 f 是凸组合 $\sum\limits_{k=n}^{l} a_k e_k$ 时, $f(1)=1$ 且

$$0\leqslant f\leqslant \sum_{k=n}^{l} a_k e_n=e_n.$$

此结论在 $f\in E_n$ 时也对. 如果 $C[0,1]$ 自反, 则 (E_n) 有个公共函数 f_0, 则总有 $f_0(1)=1$ 且 $0\leqslant x<1$ 时, $f_0(x)\leqslant x^n$. 取极限得 $f_0(x)=0$. 据 f_0 的连续线性得 $f_0=0$, 与 $f_0(1)=1$ 矛盾.

(2) 在 l^1 中, 命 $E_n=\overline{\operatorname*{cov}\limits_{i>n}} e_n$, 其中 e_n 是第 n 项为 1 其它项为 0 的数列. 当 x 是凸组合 $\sum\limits_{i=n}^{l} a_i e_i$ 时, $\|x\|_1=1$ 且当 $i\leqslant n$ 时, $x_i=0$. 于是 l^1 中有界凸闭集套 (E_n) 无公共交点.

(3) 在 l^∞ 中, 命 $E_n=\overline{\operatorname*{cov}\limits_{i>n}} f_n$, 其中 f_n 是前 n 项为 0 其它项为 1 的数列. 当 x 是凸组合 $\sum\limits_{i=n}^{l} a_i f_i$ 时, 若 $i\leqslant n$ 则 $x_i=0$; 若 $i>l$ 则 $x_i=1$. 于是 l^1 中有界凸闭集套 (E_n) 无公共交点.

(4) 当 $|z|\leqslant 1$ 时, 命 $e_n(z)=z^n$, 由此得 $A(\mathbb{D})$ 中序列 (e_n). 然后仿 (1) 的过程: 命 $E_n=\overline{\operatorname*{cov}\limits_{i\geqslant n}} e_i$, 则 (E_n) 是 $A(\mathbb{D})$ 的中有界凸闭集套. 当 $f\in \operatorname*{cov}\limits_{i\geqslant n} e_i$ 时, $f(1)=1$ 且 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $0\leqslant f(x)\leqslant x^n$. 此结论在 $f\in E_n$ 时也对. 如果 $A(\mathbb{D})$ 自反, 则 (E_n) 有个公共函数 f, 同 (1) 知 $f(1)=1$ 且 $0\leqslant x<1$ 时, $f(x)=0$. 于是 $f=0$, 矛盾.

练习 22 考虑 (e_n) 的任何一个子列 (e_{k_n}). 命 $f(x)=\sum\limits_n(-1)^n x_{k_n}$, 由此得 l^1 上连续线性泛函 f 使 $f(e_{k_n})=(-1)^n$. 这样 (e_{k_n}) 不弱收敛.

练习 23 (1) 可设 A 有界. 取 A 和 B 中序列 (x_n) 和 (y_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=c$. 可见 (y_n) 也有界. 取子列后可设 (x_n) 弱收敛, 其极限 x 在 A 中. 再取子列后可设 (y_n) 弱收敛, 其极限 y 在 B 中. 于是

$$0<\|x-y\|\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|\leqslant c.$$

(1)⇒(2)⇒(3) 是显然的.

练习 24 (1) 取 X 的中单位向量序列 (x_k) 使 $\operatorname*{span}\limits_{k\geqslant 1} x_k$ 稠于 X. 命

$$d(f,g)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{|f(x_k)-g(x_k)|}{2^k}:f,g\in M.$$

要证 d 是 M 上满足要求的度量. 显然 d 满足对角平凡性、对称性和三角不等式. 设 $d(f,g)=0$, 则 $f(x_k)=g(x_k)$. 因为 f 和 g 都是连续线性泛函且 $\operatorname*{span}\limits_{k\geqslant 1} x_k$ 稠密于 X, 所以对任何 $x\in X$ 有 $f(x)=g(x)$, 此即 $f=g$.

设 (f_n) 弱 * 收敛于 f. 据 §5.1 定理 1 知 $\lim\limits_{n\to\infty}d(f_n,f)=0$. 反之, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}d(f_n,f)=0$. 据 §5.1 定理 1 知, 当 $k\geqslant 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_k)=f(x_k)$. 命 $p(x)=\varlimsup\limits_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|$, 得 X 上半范数 p 使 $p(x)\leqslant 2\|x\|$. 可见 $\ker p$ 是含 $\{x_k\}$ 的闭线性子空间, 从而 $\ker p=X$. 这即 $x\in X$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 因此 (f_n) 弱 * 收敛于 f.

可见度量空间 (M,d) 中的收敛就是弱 * 收敛.

(2) 据 §6.3 定理 1, M 中任何序列 (f_n) 有弱 * 收敛的子列 (其极限在 M 中). 因此 (M,d) 是紧空间.

(3)提示: 命 $(Ax)(f)=f(x)$, 得等距算子 $A:X\to C(M)$. 取连续满射 $\psi:K\to M$, 命 $Bg=g\psi$, 得等距算子 $B:C(K)\to C(M)$. 对于 $h\in C(K)$, 可作 h 的连续延拓 $Eh:[0,1]\to\mathbb{C}$ 使其在被移去的开集的任何一个构成区间中都是线性的, 得等距算子 $E:C(K)\to C[0,1]$.

(4) 从以结论可见, 在等距同构的意义下, 可分赋范空间都可视为 $C[0,1]$ 的线性子空间.

练习 25 提示: X 等距同构于可分空间 $l^1/{}^{\perp}X$ 的共轭空间. 这样 $l^1/{}^{\perp}X$ 等距同构于 X 的共轭空间. 据 §6.2 定理 4 知 X 可分.

练习 26 对于 $x \in \mathbf{c}$, 命 $f_n(x)$ 为 x 的第 n 项而 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. 于是 f_n, f 都是 $\mathbf{c}$ 上连续线性泛函使 $x = f(x)e + \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(x) - f(x))e_n$. 命

$$Ax = (f(x), f_1(x) - f(x), f_2(x) - f(x), \cdots).$$

由此得线性算子 $A : \mathbf{c} \to \mathbf{c}_0$. 又 $\|A\| \leqslant 2$ 源自下式

$$|f(x)|, |f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\|x\|_\infty.$$

设 $Ax = 0$, 则 $f(x) = 0$ 及 $f_n(x) = 0$. 这样 $x = 0$. 对于 $y \in \mathbf{c}_0$, 命

$$x = (f_1(y) + f_2(y), f_1(y) + f_3(y), f_1(y) + f_4(y), \cdots).$$

由此得 $x \in \mathbf{c}$ 使 $Ax = y$. 因此 A 是双射且 $\|A^{-1}\| \leqslant 2$. 这样 $A : \mathbf{c} \to \mathbf{c}_0$ 是拓扑同构.

若有保范同构 $T : \mathbf{c}_0 \to \mathbf{c}$, 将这两个空间的单位闭球分别记为 B_0 和 B, 则 $TB_0 = B$. 这与 B 有端点而 B_0 无端点矛盾.

练习 27 $\mathbf{c}_0$ 与 $\mathbf{c}$ 不拓扑同构但它们的共轭空间都与 l^1 等距同构.

练习 28 据 §5.4 练习 28, 可设 X 是一个 Banach 空间 Y 的子空间. 以 $\overline{\operatorname{span}} X$ 代替 Y 后可设 Y 可分. 据练习 24, 可取等距嵌入 $A : Y \to C[0,1]$. 于是限制 $A|_X$ 将 X 等距嵌入至 $C[0,1]$ 中.

练习 29 取非零 $f \in X^*$ 使 $\sup \operatorname{re} f(E^\circ) \leqslant \operatorname{re} f(x_0)$. 据 §5.2 范数拓扑的性质 (14) 知 $\sup \operatorname{re} f(E) \leqslant \operatorname{re} f(x_0)$.

练习 30 必要性: 取 s_1 使 $0 \leqslant s_1 < 1$ 且 $x \in s_1 E$. 取 $s_2 > 0$ 使 $u \in s_2 E$. 命 $r = (1 - s_1)/s_2$. 当 $0 < t < r$ 时, $s_1 + ts_2 < 1$. 于是

$$x + tu + 0 \in s_1 E + ts_2 E + (1 - s_1 - ts_2)E = E.$$

充分性: 可设 $p(x) \neq 0$. 取 $r > 0$ 使 $0 < t < r$ 时, $x + tx$ 在 E 中; 此时 $p(x + tx) \leqslant 1$, 即 $(1 + t)p(x) \leqslant 1$. 因此 $p(x) < 1$.

§7.1 内 积 空 间

练习 1 命 $c = \|x_0\| + \|y_0\| + 1$. 设 $\|x - x_0\| < 1$ 且 $\|y - y_0\| < 1$, 则

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &\leqslant |\langle x - x_0, y\rangle| + |\langle x_0, y - y_0\rangle| \\ &\leqslant \|x - x_0\|\|y\| + \|x_0\|\|y - y_0\| \leqslant c(\|x - x_0\| + \|y - y_0\|). \end{aligned}$$

可见 $x \to x_0$ 且 $y \to y_0$ 时, $\langle x, y\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$.

练习 2 当 $z \in D$ 时, $\langle x - x_1, z\rangle = 0$. 此式记为 (A). 据内积的共轭线性知 $z \in \operatorname{span} D$ 时, (A) 成立. 据内积的连续性知 $z \in \overline{\operatorname{span}}\, D$ 时, (A) 成立. 命 $z = x - x_1$ 得 $\|x - x_1\|^2 = 0$. 于是 $x = x_1$.

练习 3 命 $\langle (x_n), (y_n)\rangle = \sum\limits_n 100^n \langle x_n, y_n\rangle$ 即可.

练习 4 按 Lebesgue 测度平方可积的连续函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的全体 H 是实线性空间, 它按内积 $\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)dx$ 成为内积空间. 题目中的矩阵记为 A. 命 $f_i(x) = \exp(-ix^2)$, 得 H 中向量组 $f_1, \cdots, f_n$. 设 $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$. 这即

$$a_1 \exp(-x^2) + \cdots + a_n \exp(-nx^2) = 0 : x \in \mathbb{R}.$$

于是 $a_1 t + \cdots + a_n t^n = 0, 0 < t < 1$. 这样 $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

注意到 $\langle f_i, f_j\rangle = \sqrt{\pi/(i+j)}$, Gram 阵 A 正定.

练习 5 必要性: 命 e_i 是第 i 项为 1, 其他项为 0 的 n 维复向量, 则 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个线性基. 命 $a_{ij} = f(e_j, e_i)$ 且 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, 则 A 是 $e_1, \cdots, e_n$ 关于内积 f 的 Gram 阵, 它正定. 现在

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{i=1}^n y_i e_i) = \sum_{i,j} x_j \overline{y_i} f(e_j, e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \overline{y_i} a_{ij} x_j = \langle Ax, y\rangle. \end{aligned}$$

充分性是显然的.

练习 6 作 [0,1] 上函数 $f(x) = 1$ 而 $g(x) = x$, 则

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 4 + 1 = 5$$

而 $2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 4$. 因此一致范数不满足平行四边行公式.

在 l^3 中, $\|e_1 \pm e_2\|_3^2 = 2^{2/3}$ 而 $2\|e_1\|_3^2 + 2\|e_2\|_3^2 = 4$. 这样 l^3- 范数不满足平行四边形公式. 它不由内积诱导.

练习 7 注意到 $x \perp \bigcup\limits_{i\in J} S_i$ 当且仅当 $i \in J$ 时 $x \perp S_i$ 即可.

练习 8 提示: 据 Riesz 表示定理, 作 $L^2[0,1]$ 上的连续线性泛函 ψ 使

$$\psi(g)=\int_0^1 g(t)dt : g\in L^2[0,1].$$

命 $Tf=f'$, 这得等距线性算子 $T:H\to L^2[0,1]$ 使 $\operatorname{ran}T=\ker\psi$. 于是 $\operatorname{ran}T$ 是 $L^2[0,1]$ 的完备子空间. 这样 H 是完备的内积空间, 其内积如下

$$\langle f,h\rangle=\int_0^1 f'(t)\overline{h'(t)}dt.$$

最后对 φ 用 Riesz 表示定理可得满足要求的 g.

练习 9 先证明 $\langle f_i,f_j\rangle=\delta_{ij}$. 这源自下式:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i\sqrt{-1}x}\,\overline{\mathrm{e}^{2\pi j\sqrt{-1}x}}dx =\begin{cases} x|_0^1=1 : i=j\\ \dfrac{\mathrm{e}^{2\pi(i-j)\sqrt{-1}x}\,|_0^1}{2\pi(i-j)\sqrt{-1}}=0 : i\neq j.\end{cases}$$

将 f 在 E_n 上的直交投影写成 $\sum\limits_{i=1}^n a_if_i$, 据最小二乘法得 $a_j=\langle f,f_j\rangle$. 于是

$$a_j=\int_0^1 \mathrm{e}^{x-2\pi j\sqrt{-1}x}\,dx=\frac{\mathrm{e}-1}{1-2\pi j\sqrt{-1}}.$$

练习 10 记 $x=[x_{ij}]_{m\times n}$ 且 $y=[y_{ij}]_{m\times n}$, 则 $y^*x=[\sum\limits_{k=1}^m \overline{y_{ki}}x_{kj}]_{n\times n}$. 于是

$$\langle y,x\rangle=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^m \overline{y_{ki}}x_{ki}=\overline{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \overline{x_{ij}}y_{ij}}=\overline{\langle x,y\rangle}.$$

易说明 $\langle ax+by,z\rangle=a\langle x,z\rangle+b\langle y,z\rangle$, 其中 a,b 是复数. 现在

$$\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |x_{ij}|^2\geqslant 0.$$

它为 0 当且仅当诸分量 $x_{ij}=0$ 当且仅当 $x=0$. 于是 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 按 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 成为内积空间, 其完备性源自有限维赋范空间都完备.

练习 11 最小二乘法.

练习 12 命 $\varphi_n(f)=\int\limits_{\mathbb{T}} f(z)e_n(z)|dz|_1$, 得连续线性泛函 $\varphi_n: L^p(\mathbb{T})\to\mathbb{C}$ 使 $H^p(\mathbb{T})=\bigcap\{\ker\varphi_n|n\geqslant 1\}$. 这样 $H^p(\mathbb{T})$ 是 Banach 空间 $L^p(\mathbb{T})$ 的闭线性子空间, 它也是 Banach 空间. 而 $H^2(\mathbb{T})$ 是 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{T})$ 的闭线性子空间, 它也是 Hilbert 空间.

练习 13 提示: $\|x_n-x\|^2=\|x_n\|^2+\|x\|^2-2\,\mathrm{re}\langle x_n,x\rangle$.

练习 14 提示: $\|x_n-x_0\|=\sup\limits_{y\in S}|\widetilde{x_n}(y)-\widetilde{x_0}(y)|$.

练习 15 据 §4.3 有关性质, 可设 μ 是概率测度而 ν 是测度.

存在性: 使 $\nu(E)$ 有限的可测集 E 全体 $\mathcal{R}$ 是个环. 命 $c=\sup\{\mu(E)|E\in\mathcal{R}\}$, 于是 $\mathcal{R}$ 中有序列 (A_n) 使 $c=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$. 命 $A=\bigcup\limits_{n\geqslant 1}A_n$, 则 $\mu(A)=c$. 命 $B=A^{\mathrm{c}}$. 任取 B 的可测子集 F. 若 $\mu(F)=0$, 则 $\nu(F)=0$; 若 $\mu(F)>0$, 则 $\mu(A\sqcup F)>c$ 表明 $\nu(F)=+\infty$. 因此限制在 B 上, $d\nu=(+\infty)d\mu$.

因 A 是 ν 的 σ- 有限集, 据 §4.3 有关性质可设 $\nu(A)=1$. 记 $\lambda=\mu+\nu$. 当 $f\in L^2(A,\lambda)$(这视为实 Hilbert 空间) 时,

$$|\int\limits_A f d\mu|^2\leqslant\int\limits_A|f|^2d\mu\int\limits_A 1d\mu\leqslant\int\limits_A|f|^2d\lambda.$$

因此 $f\mapsto\int\limits_A f d\mu$ 是 $L^2(A,\mu)$ 上的连续线性泛函. 据 F. Riesz 表示定理得一个 $g\in L^2(A,\lambda)$ 使 $f\in L^2(A,\lambda)$ 时, $\int\limits_A f d\mu=\int\limits_A fg d\lambda$. 在 f 为可测集 E 的特征函数时可得 $\mu(E)=\int\limits_E g d\lambda$. 因此 $d\mu=g d\lambda$.

命 $G=(g\leqslant 0)$, 则 $\mu(G)\leqslant 0$. 于是 $\mu(G)=0$, 从而 $\nu(G)=0$ 且 $\lambda(G)=0$. 去了 G 后, 可设 $g>0$. 这样 $d\lambda=g^{-1}d\mu$, 从而

$$d\nu=d\lambda-d\mu=(g^{-1}-1)d\mu.$$

注意到 $\nu\geqslant 0$, 从而 $(g^{-1}<1)$ 是个 μ- 零集. 去此 μ- 零集后可设 $g^{-1}\geqslant 1$. 可见, $0<g\leqslant 1$. 在 A 上命 $f=g^{-1}-1$ 而在 B 上命 $f=+\infty$ 即可.

唯一性: 若 $d\nu=f_i d\mu$, 命 $E=(f_1<r<s<f_2)$, 则

$$\int\limits_E f_1\leqslant r\mu(E)\leqslant s\mu(E)\leqslant\int\limits_E f_2 d\mu.$$

上式两端相等, 所以 $\mu(E)=0$. 于是 $\mu(f_1<f_2)=0$ 源自下式

$$(f_1<f_2)=\bigcup\{(f_1<r<s<f_2)|r,s\in\mathbb{Q}:r<s\}.$$

同样 $\mu(f_1>f_2)=0$, 从而 f 与 f_2 几乎处处相等.

练习 16 当 X 中单位向量 x 与 y 适合 $\|x+y\|>2-2\delta$ 时，据平行四边形公式

$$\|x-y\|^2+\|x+y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

得 $\|x-y\|<2\sqrt{2\delta-\delta^2}$, 可见 $\lim\limits_{\delta\to 0}u_X(\delta)=0$.

(2) 当 X 中非零向量 x 与 y 使 $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ 时，将此式两边平方得

$$\|x\|^2+\|y\|^2+2\operatorname{re}\langle x,y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|.$$

可见， $\operatorname{re}\langle x,y\rangle=\|x\|\|y\|$. 据 Schwarz 不等式为等式的条件知有非零数 c 使 $y=cx$. 于是 $|1+c|=1+|c|$, 可见 $c>0$.

练习 17 以 f_n-f 代替 f_n 后可设 $f=0$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\langle f_1,f_n\rangle=0$, 有个 $k_2>k_1=1$ 使 $|\langle f_{k_1},f_{k_2}\rangle|\leqslant 1$. 归纳地取 k_{n+1} 使

$$\max\{|\langle f_{k_i},f_{k_{n+1}}\rangle|i\leqslant n\}\leqslant n^{-1}.$$

取常数 c 使恒有 $\|f_n\|\leqslant c$, 则

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{f_{k_i}}{n}\right\|^2&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\|f_{k_i}\|^2}{n^2}+2\sum_{i<j}\frac{\langle f_{k_i},f_{k_j}\rangle}{n^2}\\&<\frac{c^2}{n}+\frac{2}{n^2}\sum_{j>1}\sum_{i<j}\frac{1}{(j-1)}=\frac{c^2}{n}+\frac{2(n-1)}{n^2}\to 0.\end{aligned}$$

练习 18 仿练习 17 的证明.

练习 19 请注意一个事实： $d(x,S)=\|x-f(x)\|$. 因为 $(f(x)+f(z))/2$ 在 S 中，所以

$$\begin{aligned}&d(x,S)^2\leqslant\left\|\frac{f(x)+f(z)}{2}-x\right\|^2\\\Rightarrow&\|f(x)-f(z)\|^2+4d(x,S)^2\\\leqslant&\|f(x)-x-(f(z)-x)\|^2+\|f(x)-x+f(z)-x\|^2\\=&2\|f(x)-x\|^2+2\|f(z)-x\|^2\\=&2d(x,S)^2+2\|f(z)-x\|^2.\end{aligned}$$

注意到 $x\mapsto d(x,S)$ 是一致连续的，所以

$$\varlimsup_{x\to z}\|f(x)-f(z)\|^2\leqslant 2\|z-f(z)\|^2-2d(z,S)^2=0.$$

这样 f 在任何一点 z 连续，从而 f 是连续映射.

§7.2 共轭算子

练习 1 (1) 命 $f_k(x) = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nk}x_k$, 则 $(f_k : l^2 \to \mathbb{C})_{k=1}^{\infty}$ 是逐点收敛的连续线性泛函序列. 据 Banach-Steinhaus 定理知 $\sup\limits_k \|f\|_k^2 < +\infty$. 据 Riesz 表示定理知 $\|f_k\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} |a_{ni}|^2$, 可见

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}|^2 = \sup_k \sum_{i=1}^{k} |a_{ni}|^2 < +\infty.$$

(2) 必要性: 命 $x = (x_1, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$, 则

$$\sum_{i=1}^{m} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|^2 = \|Ax\|^2.$$

可见命 $c = \|A\|^2$ 即可.

充分性: 对任何 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$, 当 $m, n = 1, 2, \cdots$ 时

$$\sum_{i=1}^{m} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|^2 \leqslant c\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2.$$

据 (1), 先命 $n \to \infty$ 得

$$\sum_{i=1}^{m} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j|^2 \leqslant c\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2.$$

再命 $m \to \infty$ 得 $\|Ax\|^2 \leqslant c\|x\|^2$. 所以 $\|A\| \leqslant \sqrt{c}$.

(3) 源自 Schwarz 不等式: $\sum\limits_{i\geqslant 1} |\sum\limits_{j\geqslant 1} a_{ij}x_j|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j\geqslant 1} |a_{ij}|^2\|x\|^2$.

练习 2 这是 §3.4 练习 9 的特殊情形. 也可如下证明: 任取 $x \in l^0$, 则 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$ 总收敛, 于是

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{a_{ij}}\sqrt{p_j}\frac{\sqrt{a_{ij}}x_j}{\sqrt{p_j}}|^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}p_j)(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{ij}|x_j|^2}{p_j}) \\ &\leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} cp_i\frac{a_{ij}|x_j|^2}{p_j} \leqslant bc\|x\|_2^2.\end{aligned}$$

这样 $A : l^0 \to l^2$ 是有界线算子, 它有唯一保范延拓 $A : l^2 \to l^2$.

练习 3 有界性源自 Schur 判别法和下式

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{i+j}\frac{1}{\sqrt{j}}<\int_0^{\infty}\frac{dx}{(i+x)\sqrt{x}}=\frac{\pi}{\sqrt{i}}.$$

当 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 时，命 $a_{ij}=1/(i+j)$; 否则命 $a_{ij}=0$. 命 A_n 是 $[a_{ij}]_{i,j\geqslant 1}$ 诱导的线性算子，它为正算子并且 (A_n) 递增至 A, 这样 A 是正算子.

练习 4 因为 $\|Ux_1-Ux_2\|=\|x_1-x_2\|$, 所以 U 是等距的. 由于 $U(2x_0)=3x_0$ 而 $2Ux_0=4x_0$, 因而 U 非线性的.

练习 5 只证明必要性：命 $\langle x,y\rangle=\mathrm{re}\langle x|y\rangle$, 它是实双线性的. 又

$$\langle y,x\rangle=\mathrm{re}\,\overline{\langle x|y\rangle}=\mathrm{re}\langle x,y\rangle.$$

这表明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是对称的. 现在 $\langle x,x\rangle=\langle x|x\rangle\geqslant 0$, 其中等号成立当且仅当 $x=0$. 于是 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是实内积. 由上面等式知 $\mathrm{re}\langle\cdot,\cdot\rangle$ 与 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 诱导相同范数.

由 $\langle x,\sqrt{-1}y\rangle=\mathrm{re}\langle x|\sqrt{-1}y\rangle$ 知 $\mathrm{im}\langle x|y\rangle=\langle x,\sqrt{-1}y\rangle$, 得

$$\langle x|y\rangle=\langle x,y\rangle+\sqrt{-1}\langle x,\sqrt{-1}y\rangle.$$

练习 6 先证明 U 保持内积. 当 $x,z\in X$ 时,

$$\begin{aligned}&\|Ux\|=\|Ux-U0\|=\|x-0\|=\|x\|,\\&\|Ux-Uz\|^2=\|Ux\|^2-2\langle Ux,Uz\rangle+\|Uz\|^2,\\&\|x-z\|^2=\|x\|^2-2\langle x,z\rangle+\|z\|^2,\end{aligned}$$

比较上面的等式得 $\langle Ux,Uz\rangle=\langle x,z\rangle$. 据此有

$$\begin{aligned}&\|U(x+z)-Ux-Uz\|^2=\|U(x+z)\|^2+\|Ux\|^2+\|Uz\|^2\\&-2\langle U(x+z),Ux\rangle-2\langle U(x+z),Uz\rangle+2\langle Ux,Uz\rangle\\&=\|x+z\|^2+\|x\|^2+\|z\|^2-2\langle x+z,x\rangle-2\langle x+z,z\rangle+2\langle x,z\rangle.\end{aligned}$$

这式是零. 于是 $U(x+z)=Ux+Uz$. 当 t 是实数时,

$$\begin{aligned}&\|U(tx)-tUx\|^2=\|U(tx)\|^2+\|tUx\|^2-2\langle U(tx),tUx\rangle\\&=\|tx\|^2+t^2\|x\|^2-2t^2\langle x,x\rangle=0.\end{aligned}$$

这样 $U(tx)=tUx$. 于是 U 是线性算子.

练习 7 U 不一定是线性算子. 考虑 $V:\mathbb{C}\to\mathbb{C},z\to\overline{z}$, 则 U 是共轭等距映射. 一般而言，为使 U 是复线性算子需 $U(\sqrt{-1}x)=\sqrt{-1}Ux$ 恒成立.

练习 8 (1) 必要性源自以下等式:

$$\langle Ax,x\rangle=\langle x,Ax\rangle=\overline{\langle Ax,x\rangle}.$$

充分性: 因为 $A=A_1+\sqrt{-1}A_2$, 所以总有 $\langle A_2x,x\rangle=0$. 由极化恒等式知总有 $\langle A_2x,y\rangle=0$. 这样 $A_2=0$, 从而 A 自伴.

在 (1) 中以 $\sqrt{-1}A$ 代替 A 可知 (2) 成立.

练习 9 因为 $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|x_{n\pm1}|^2=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|x_n|^2$, 所以 $U_\pm$ 是等距算子. 现在

$$(U_-U_+x)_n=(U_+x)_{n-1}=x_{n-1+1}=x_n,$$
$$(U_+U_-x)_n=(U_-x)_{n+1}=x_{n+1-1}=x_n.$$

这表明 $U_+U_-=U_-U_+=I$. 现在 $U_+^*=U_-$ 源自下式

$$\langle U_+x,y\rangle=\sum_{i\in\mathbb{Z}}x_{i+1}\overline{y_i}=\sum_{j\in\mathbb{Z}}x_j\overline{y_{j-1}}=\langle x,U_-y\rangle.$$

练习 10 将那个上确界记为 b, 则 $b\leqslant\|A\|$. 事实上, 当 $\|x\|<1$ 时,

$$\langle Ax,x\rangle\leqslant\|Ax\|\|x\|\leqslant\|A\|\|x\|^2\leqslant\|A\|.$$

当 $\|x\|<1$ 时, 命 $y=Ax/(\|Ax\|+\varepsilon)$, 得

$$|\langle Ax,y\rangle|\leqslant\sqrt{\langle Ax,x\rangle\langle Ay,y\rangle}\leqslant b.$$

于是 $\|Ax\|^2\leqslant b(\|Ax\|+\varepsilon)$. 命 $\varepsilon\to0$ 得 $\|Ax\|\leqslant b$. 于是 $\|A\|\leqslant b$.

练习 11 只证明充分性: 据 §3.1 例 3, 可取正实数值可测函数 w 使 $wd\mu$ 为概率测度. 命 $d\nu=wd\mu$, 则 $L^\infty(M,\nu)=L^\infty(M,\mu)$. 命 $Uf=f\sqrt{w}$, 这得酉算子 $U:L^2(M,\nu)\to L^2(M,\mu)$ 使 $U^*m_\psi U=\tilde{m}_\psi$, 其中 $\tilde{m}_\varphi$ 表示 $L^2(M,\nu)$ 上 φ 对应的乘法算子. 以 ν 代替 μ 并以 U^*AU 代替 A 后可设 μ 是概率测度. 设 e 是取值恒为 1 的函数. 命 $\varphi=Ae$.

当 f 本性有界时, $Am_fe=m_fAe$, 得 $Af=f\varphi$. 于是 $\|f\varphi\|_2\leqslant\|A\|\|f\|_2$. 当 $t>\|A\|$ 时, 命 $E=(|\varphi|>t)$ 而 f 是其特征函数, 则

$$\int_E|\varphi|^2d\mu\leqslant\|A\|^2\int_E1^2d\mu.$$

于是 $t^2\mu(E)\leqslant\|A\|^2\mu(E)$, 从而 $\mu(E)=0$. 这样 $\|\varphi\|_\infty\leqslant\|A\|$. 注意到 $L^\infty(M,\mu)$ 稠于 $L^2(M,\mu)$. 可见, $Af=\varphi f$ 对任何平方可积函数 f 成立.

练习 12 取 l^2 中包含 $\{e_n|n \geqslant 1\}$ 的一个 Hamel 基 E. 固定一个 $e_0 \in E \setminus \{e_n|n \geqslant 1\}$, 作线性算子 $A : l^2 \to l^2$ 使 $Ae_0 = e_0$ 且 $e \in E \setminus \{e_0\}$ 时 $Ae = 0$. 如果 A 有界, 则得以下矛盾的式子:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} x_n Ae_n = 0.$$

命 $Bx = \sum_{i=1}^{n} x_i e_1$, 得线性算子 $B : l^2 \to l^2$ 使 $Be_k = e_1 : k \leqslant n$ 而 $Be_k = 0 : k > n$. 可见 $\|Be_k\|_2 \leqslant 1$ 而 $\|Be_1\|_2 = 1$. 因为

$$\langle Bx, e_1 \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i = \langle x, \sum_{i=1}^{n} e_i \rangle,$$

所以 $B^* e_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$. 于是 $\|B^* e_1\|_2 = \sqrt{n}$, 从而 $\|B\| = \|B^*\| \geqslant \sqrt{n}$.

练习 13 A 和 B 是线性算子, 但可能无界. 如将 l^0 视为 l^2 的内积子空间, 命 $X = Y = l^0$ 而无界线性算子 $A = B : l^0 \to l^0$ 定义为

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_1, 2x_2, \cdots, nx_n, \cdots).$$

则 A 和 B 满足条件. 一般地, 为使 A 和 B 有界, 可设 X 和 Y 完备.

练习 14 只证明充分性: 记 $f(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} \langle A_n x, y \rangle$. 据一致有界原理, $\{A_n\}$ 一致有界, 从而 $f : X \times X \to \mathbb{K}$ 是有界半双线性型. 它对应的有界线性算子记为 A, 则 (A_n) 弱算子收敛于 A.

练习 15 由极化恒等式, 当 $x, y \in X$ 时, $(\langle A_n x, y \rangle)$ 恒收敛. 据 (1), (A_n) 弱算子收敛, 其极限记为 A. 对等式 $\langle A_n x, y \rangle = \langle x, A_n y \rangle$ 取极限得 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$. 这表明 A 是自伴算子.

在 A_n 都是正算子时, $\langle Ax, x \rangle = \lim \langle A_n x, x \rangle \geqslant 0$. 因此 $A \geqslant 0$.

练习 16 提示: (1) $\{0\}$ 和 $\{1\}$. (2) 因为 $\langle Px, x \rangle = \sum\limits_{n\geqslant 1} |x_{2n}|^2$, 当 x 取遍 l^2 的单位球面时, $\sum\limits_{n\geqslant 1} |x_{2n}|^2$ 取遍区间 [0,1] 中的值. 于是 $\operatorname{sr} P = [0, 1]$.

练习 17 设 x_0 和 x_1 是 H 中单位向量, 命 $c_i = \langle Ax_i, x_i \rangle$ 及

$$[c_0, c_1] = \{(1-t)c_0 + tc_1 | 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

要证明 $[c_0, c_1] \subseteq \operatorname{sr} A$. 可设 $c_0 \neq c_1$, 取复数 b 和 c 使 $b \neq 0$ 且

$$\begin{pmatrix} c_0 & 1 \\ c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

可见 $\{0,1\} \subseteq b\,\mathrm{sr}\,A + c = \mathrm{sr}(bA + cI)$. 注意到 $[c_0, c_1] \subseteq \mathrm{sr}\,A$ 当且仅当 $[0,1] \subseteq \mathrm{sr}(bA + cI)$, 可设 $c_i = i$.

取 A 的实部 B 和虚部 C, 则 $\langle Cx_i, x_i\rangle = 0$. 取模 1 复数 λ 使 $\langle Cx_0, x_1\rangle$ 为纯虚数. 由于 $\langle A\lambda x_0, \lambda x_0\rangle = \langle Ax_0, x_0\rangle$, 以 λx_0 代替 x_0 后可设 $\langle Cx_0, x_1\rangle$ 为纯虚数. 因为 $c_0 \neq c_1$, 所以 x_0 和 x_1 线性无关. 当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时, 作非零向量 $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$. 由于

$$\begin{aligned}\langle Cx_t, x_t\rangle &= (1-t)^2\langle Cx_0, x_0\rangle + t^2\langle Cx_1, x_1\rangle \\ &\quad + (1-t)t(\langle Cx_0, x_1\rangle + \langle Cx_1, x_0\rangle \\ &= (1-t)t(\langle Cx_0, x_1\rangle + \langle x_1, Cx_0\rangle \\ &= (1-t)t(\langle Cx_0, x_1\rangle + \overline{\langle Cx_0, x_1\rangle} = 0,\end{aligned}$$

这样 $\langle Ax_t, x_t\rangle$ 总是实数. 将 x_t 单位化得 z_t, 则区间上 $[0,1]$ 上连续函数 $f(t) := \langle Az_t, z_t\rangle$ 在左右端点的值分别是 0 和 1. 据介值定理知 f 的值域包含区间 $[0,1]$. 这样 $\mathrm{sr}\,A$ 包含 $[0,1]$.

练习 18 (1) 命 $Ax = x|_J$, 这得保内积的线性算子 $A: H \to l^2(J)$. 对于 $z \in l^2(J)$, 命 $x|_J = z$ 且 $x(g) = g(z)$, 则 $x \in H$ 使 $Ax = z$. 于是 A 是满射, 从而 A 是等距同构. 可见 H 是 Hilbert 空间且 A 是酉算子.

(2) 命 $f(z) = z_i$, 则 f 是 l^2 上连续线性泛函使 $x(i) = f(Ax)$, 从而赋值泛函 $x \mapsto x(i)$ 连续. 由 $x(g) = g(Ax)$ 和 g 的不连续性知 $x \mapsto x(g)$ 不连续.

练习 19 提示: 据 Riesz 表示定理, A 是有限秩算子当且仅当可取 $L^2(Y,\nu)$ 的有限子集 $\{g_i | i \leqslant n\}$ 和 $L^2(X,\mu)$ 的有限子集 $\{e_i | i \leqslant n\}$ 恒使

$$Af = \langle f, e_i\rangle g_1 + \cdots + \langle f, e_n\rangle g_n.$$

此时命 $K_1(y,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(y)\overline{e_i(x)}$, 则对所有 $f \in L^2(X,\mu)$ 有

$$(Af)(y) \doteq \sum_{i=1}^{n} g_i(y) \int_X f(x)\overline{e_i(x)}\mu(dx) = \int_X K_1(y,x)f(x)\mu(dx).$$

这与 A 的定义相比较知 K_1 和 K 关于乘积测度几乎处处相等.

§7.3 基与维数

练习 1 命 $h_n(z) = z^n$, 用极坐标得

$$\int\limits_{|z|\leqslant s} z^k\overline{z^l}\mathbf{m}(dz) = \int\limits_0^s rdr\int\limits_0^{2\pi} r^{k+l}\,\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(k-l)\theta}\,d\theta = \frac{\delta_{kl}\pi\sqrt{s}^{k+1}}{k+1}.$$

命 $s=1$ 得 $\langle h_n, h_l\rangle = \delta_{nl}\pi/(n+1)$.

任取 $f\in A^2(\mathbb{D})$, 其 Taylor 级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 的收敛半径至少是 1, 这个级数在 $|z|\leqslant s<1$ 时一致收敛于 $f(z)$. 于是

$$\int\limits_{|z|\leqslant s} f(z)\overline{z^n}\mathbf{m}(dz) = \sum_{k\geqslant 0}\int\limits_{|z|\leqslant s} a_k z^k\overline{z^n}\mathbf{m}(dz) = \frac{\pi a_n}{n+1}\sqrt{s}^{n+1},$$

$$\int\limits_{|z|\leqslant s} |f(z)|^2\mathbf{m}(dz) = \sum_{n\geqslant 0}\int\limits_{|z|\leqslant s} f(z)\overline{a_n z^n}\mathbf{m}(dz) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi|a_n|^2\sqrt{s}^{n+1}}{n+1}.$$

命 $s\to 1+$, (右边) 用 (级数形式的) 单调收敛定理得以下 Parseval 等式:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\pi|a_n|^2}{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty}|\langle f, e_n\rangle|^2.$$

总之, Bergman 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 有个规范直交基 $\{e_n|n=0,1,\cdots\}$.

练习 2 对于非负整数 n, 作实直线上函数

$$f_n(x) = \exp(x^2/2)(\exp(-x^2))^{(n)}.$$

下面证明有 n 次多项式 P_n 使 $f_n(x) = P_n(x)\exp(-x^2/2)$.

显然 $f_0(x) = \exp(-x^2/2)$. 设 $l<n$ 时, 上述 l 次多项式 P_l 存在. 现在

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \exp\frac{x^2}{2}\frac{d^{n-1}(-2x\exp(-x^2))}{dx^{n-1}} \\ &= \exp\frac{x^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-2x)^{(i)}(\exp(-x^2))^{(n-1-i)} \\ &= -2xf_{n-1}(x) - 2(n-1)f_{n-2}(x). \end{aligned}$$

可见 $P_n(x) = -2xP_{n-1}(x) - 2P_{n-2}(x))$ 是满足要求的 n 次多项式. 将 P_n 的首系数记为 a_n, 由上式知 $a_n = -2a_{n-1}$. 再由 $a_0 = 1$ 得 $a_n = (-2)^n$.

当 $l\leqslant n$ 时, $f_l(x)f_n(x) = P_l(x)(\exp(-x^2))^{(n)}$. 由分部积分得

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_l(x)(\exp(-x^2))^{(n)}dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_l(x)'(\exp(-x^2))^{(n-1)}dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^l P_l^{(l)}(\exp(-x^2))^{(n-l)}dx = \begin{cases} 2^n n!\sqrt{\pi}: & l=n; \\ 0: & l<n. \end{cases}$$

因此 $E=\{f_n|n\geqslant 0\}$ 是直交系，并且 $\|f_n\|_2^2=2^n n!\sqrt{\pi}$.

注意到 $\operatorname{span}E=\{P(x)\exp(-x^2/2)|P\in\mathbb{C}[x]\}$, 这在 L^2 中稠密 (见 §6.2 例 4). 最后注意到 f_n 的单位化为 h_n 即可.

练习 3 当 $f\in X:=L^2(\mathbb{R})$ 而 $g\in Y:=L^2(\mathbb{R},\exp(-x^2)dx)$ 时，命

$$(Uf)(x)=f(x)\exp(x^2/2);(Vg)(x)=g(x)\exp(-x^2/2),$$

这样得到的线性算子 $U:X\to Y$ 和 $V:Y\to X$ 是等距的：

$$\int|Uf|^2(x)\exp(-x^2)dx=\int|f(x)|^2dx,$$

$$\int|Vg|^2(x)dx=\int|g(x)|^2\exp(-x^2)dx.$$

由 $(VU)f=f$ 且 $(UV)g=g$ 知 U 和 V 是互为共轭的酉算子. 命 h_n 同练习 2, 则 $Uh_n=H_n$. 于是 $\{H_n|n\geqslant 0\}$ 是 Y 的规范直交基.

练习 4 (1) 对于 $f\in L^2[0,\pi]$, 可认为 $f(0)=0$(改变一个 Lebesgue 零集上的值不改变 f 在 $L^2[0,\pi]$ 中代表的点). 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，命 $g(x)=f(x)$; 而 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时，命 $g(x)=-f(-x)$. 这得 $g\in L^2[-\pi,\pi]$. 因为

$$\{\cos kx,\sin lx|k=0,1,\cdots;l=1,2,\cdots\}$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的直交基且 $g(x)\cos nx$ 是奇函数，据 Paseval 等式得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}|\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nxdx|^2.$$

因为 $|g|^2$ 是偶函数且在 $[0,\pi]$ 上与 $|f|^2$ 相等，所以上式化为

$$\int_0^{\pi}|f(x)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}|\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx|^2.$$

这表明 f 关于 F 的规范化成立 Paseval 等式，从而 F 是直交基

(2) 对于 $f\in L^2[0,2\pi]$, 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时, 命 $g(x)=f(x)$, 而 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时，命 $g(x)=f(-x)$. 于是 $g\in L^2[-\pi,\pi]$. 因为

$$\{\cos kx,\sin lx|k=0,1,\cdots;l=1,2,\cdots\}$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的直交基且 $g(x)\sin nx$ 是奇函数，据 Parseval 等式得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2=\frac{1}{2\pi}|\int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}|\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nxdx|^2.$$

因为 g 是偶函数且在 $[0,\pi]$ 上与 f 相等，所以上式化为

$$\int_0^{\pi}|f(x)|^2=\frac{1}{\pi}|\int_0^{\pi}f(x)dx|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}|\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx|^2.$$

这表明 f 关于 E 的规范化成立 Parseval 等式，从而 E 是直交基.

练习 5 当 $f \in L^2(0,\pi)$ 且 $-1 < x < 1$ 时，命 $(Uf)(x) = f(\arccos x)$. 作变量代换 $x = \cos t$ 得

$$\int_{-1}^{1} |(Uf)(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

这表明 $U : L^2(0,\pi) \to L^2((-1,1); \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ 是等距算子.

当 $g \in L^2((-1,1); \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ 时，命 $f(t) = g(\cos t)$, 则 $Uf = g$. 于是 U 是酉算子. 因为 $(U\cos n\cdot)(x) = T_n(x)$, 据练习 4 知 $\{T_n | n \geqslant 0\}$ 是 $L^2((-1,1); \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ 的直交基.

练习 6 当 $(a_n) \in l^2$ 且 $z \in \mathbb{D}$ 时，据 Hölder 不等式得

$$(\sum_{n\geqslant 0} |a_n z^n|)^2 \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 \sum_{n\geqslant 0} |z|^{2n} < +\infty. \tag{1}$$

因此 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 定义了 $\mathbb{D}$ 上一个全纯函数. 命

$$(U(a_n))(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n,$$

这定义了一个保持内积的等距同构 $U : l^2 \to H^2$. 因此 H^2 是完备的.

若记 $t(z) = 1/(1-|z|^2)$, 则上面的 (1) 式也表明赋值泛函 $z \mapsto f(z)$ 是 H^2 上连续线性泛函：$|f(z)| \leqslant t(z)\|f\|$. 据 Riesz 表示定理得个 $K_z \in H^2$ 恒使 $f(z) = \langle f, K_z \rangle$. 将 K_z 展开成关于 $\{e_n | n \geqslant 0\}$ 的 Fourier 级数并再用赋值泛函的连续性得

$$K_z(w) = \sum_{n\geqslant 0} \langle K_z, e_n \rangle e_n(w) = \sum_{n\geqslant 0} \overline{e_n(z)} e_n(w). \tag{2}$$

特别注意到 $\{z^n | n \geqslant 0\}$ 也是 H^2 的规范直交基，所以

$$K_z(w) = \sum_{n\geqslant 0} \overline{z^n} w^n = \frac{1}{1-\overline{z}w}. \tag{3}$$

结合 (2) 和 (3) 并交换 z 和 w 的位置得

$$\sum_{n\geqslant 0} \overline{e_n(w)} e_n(z) = \frac{1}{1-\overline{w}z}.$$

练习 7 因为 $A^2(\mathbb{D})$ 有个规范直交基 $\{e_n|n \geqslant 0\}$ 使 $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$, 所以 $\overline{f}$ 在 $A^2(\mathbb{D})$ 上的直交投影是 $f_0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\langle\overline{f}, e_n\rangle e_n = \overline{a_0}$, 从而 $\overline{f}$ 至 $A^2(\mathbb{D})$ 的距离是 $\|\overline{f} - f_0\|_2 = (\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{|a_i|^2\pi}{i+1})^{\frac{1}{2}}$.

练习 8 因为 $\|f_j\|_2 = \sqrt{2\pi}$, 将 $\{f_j|j \in \mathbb{Z}\}$ 规范化为 $\{f_j/\sqrt{2\pi}|j \in \mathbb{Z}\}$. 因为

$$\langle f, \frac{f_j}{\sqrt{2\pi}}\rangle = \int_0^{2\pi}\frac{\exp(tx - \sqrt{-1}jx)dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\exp(2t\pi) - 1}{\sqrt{2\pi}(t - \sqrt{-1}j)},$$

所求的 Fourier 级数 $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}\langle f, \frac{f_j}{\sqrt{2\pi}}\rangle\frac{f_j}{\sqrt{2\pi}}$ 是

$$\exp(tx) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{(\exp(2t\pi) - 1)\exp(\sqrt{-1}jx)}{2\pi(t - \sqrt{-1}j)}.$$

请注意上式级数的收敛是依 L^2- 范数收敛.

练习 9 符号见练习 8, 注意到 $\{f_j|j \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2[0, 2\pi]$ 的直交基 (见例 3), 对 f 应用 Parseval 等式得

$$\int_0^{2\pi}|\exp(tx)|^2dx = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}|\int_0^{2\pi}\exp(tx)\overline{\exp(j\sqrt{-1}x)}dx|^2$$

$$\Rightarrow\frac{\exp(4t\pi) - 1}{2t} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\frac{(\exp(2t\pi) - 1)^2}{t^2 + j^2}.$$

将 $j = 0$ 的项移至左端并化简得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{t^2 + j^2} = \frac{\pi t(\exp(2t\pi) + 1) - \exp(2t\pi) + 1}{2t^2(\exp(2t\pi) - 1)}.$$

令 $t \to 0$, 上式左边用单调收敛定理 (级数为一种积分) 得 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

练习 10 只证明充分性: 设 $\{e_i|i \in J\}$ 与 $\{f_j|j \in J\}$ 分别是 X 与 Y 的规范直交基. 对于 $x \in X$, 命 $Ux = \sum\limits_{i\in J}\langle x, e_i\rangle f_i$(级数收敛). 这得等距算子 $U: X \to Y$. 注意到 U 是满射, U 是酉算子.

练习 11 三个条件依次记为 (1)、(2) 和 (3). 当 F 是 J 的有限子集时, 作部分和 $x_F=\sum\limits_{i\in F}x_i$. 显然 (1) 蕴含 (2). 设 (2) 为真, 其中级数的弱和记为 x, 则

$$\langle x,x_F\rangle=\sum_{i\in J}\langle x_i,x_F\rangle=\sum_{i\in F}\|x_i\|^2.$$

命 F 越来越大, 则 $\|x\|^2=\sum\limits_{i\in F}\|x_i\|^2$, 这得 (3). 现在

$$\begin{aligned}\|x_F-x\|^2&=\|x_F\|^2+\|x\|^2-2\operatorname{re}\langle x_F,x\rangle\\&=\sum_{i\in F}\|x_i\|^2+\|x\|^2-2\sum_{i\in F}\|x_i\|^2=\|x\|^2-\sum_{i\in F}\|x_i\|^2.\end{aligned}$$

当 F 越来越大时, 由 (3) 得 $x=\sum\limits_{i\in J}x_i$, 这得 (1). 在 X 完备时, 设 (3) 为真. 对于 $\varepsilon>0$, 取 J 的有限子集 F_0 使 J 的有限子集 F 与 F_0 不交时, $\sum\limits_{i\in F}\|x_i\|^2<\varepsilon^2$. 这即 $\|x_F\|<\varepsilon$. 据级数收敛原理知, $\sum\limits_{i\in J}x_i$ 收敛. 这得 (1).

练习 12 (1)⇒(2): 命 $g(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_i\lambda^i$, 则 $g(\lambda)^2=\sum\limits_{i+j=n}b_ib_j\lambda^{i+j}$. 于是

$$0\leqslant\phi(g(\lambda)^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}b_ib_js_n=\sum_{i,j=0}^{\infty}b_ib_js_{i+j}.$$

当上式为 0 时, $g(\lambda)^2=0$, 所以诸系数 b_i 为零. 这表明 $[s_{i+j}]_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ 都正定.

(2)⇒(1): 当实系数多项式 $f(\lambda)$ 非负时, f 具有一次因子分解形式

$$f(\lambda)=c\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)(\lambda-\overline{\lambda_i}),$$

其中 $c\geqslant 0$, 而 λ_i 和 $\overline{\lambda_i}$ 是 f 的一对共轭复根. 现命

$$\sqrt{c}\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)=g(\lambda)+\sqrt{-1}h(\lambda),$$

则 $f(\lambda)=g(\lambda)^2+h(\lambda)^2$. 从而 $\phi(f(\lambda))\geqslant 0$.

(2)⇔(3): 显然.

练习 13 (1) 取 l^2 的一个线性基 E, 它的势为 $\aleph$. 当 F 是 E 的子集时, $\operatorname{span}F$ 是 l^2 的线性子空间, 这些线性空间有 $2^{\aleph}$ 个. 因为 l^2 有 $2^{\aleph}$ 个子集, 所以 l^2 恰有 $2^{\aleph}$ 个线性子空间.

将 l^2 中闭线性子空间全体记为 $\mathcal{L}$, 将 l^2 中规范直交系全体记为 $\mathcal{B}$, 则 $\mathcal{B}$ 中成员都是 l^2 的可数子集. 于是 $\mathcal{B}$ 的势为 $\aleph$. 因为 $E\mapsto\overline{\operatorname{span}}\,E$ 是 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{L}$ 的

满射，所以 $\mathcal{L}$ 的势不超过 $\aleph$. 又 $\overline{\text{span}}\{e_n|n \in F\}, F \subseteq \mathbb{Z}_+$ 都是 l^2 闭线性子空间，这些有 $\aleph$ 个. 于是 $\mathcal{L}$ 的势为 $\aleph$.

(2) 取 l^2 的一个线性基 E, 则线性算子 $A: l^2 \to l^2$ 唯一确定一个复数值矩阵 $[a_{uv}]_{u,v\in E}$ 恒使 $Av = \sum\limits_{u\in E} ua_{uv}$ 且任何 v 都使 $\{u|a_{uv} \neq 0\}$ 是有限集. 固定 $u_0 \in E$, 每个函数 $b: E \to \mathbb{C}$ 都对应一个矩阵 $[\delta_{u,u_0} b_v]_{u,v\in E}$. 这样的矩阵有 $\aleph^\aleph$ 个，从而至少有 $\aleph^\aleph$ 个线性算子 A. 但 $l^2 \to l^2$ 的映射有 $\aleph^\aleph$ 个，所以线性算子恰有 $\aleph^\aleph$ 个 (即 $2^\aleph$ 个).

任何有界线性算子 A 由矩阵 $[a_{ij}]_{i,j\in\mathbb{Z}_+}$ 唯一确定，其中 $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i\rangle$. 每个这样的矩阵可视为一个函数 $b: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}$, 这些矩阵至多有 $\aleph^{\aleph_0}$ 个 (即 $\aleph$ 个). 又 l^2 上有至少有 $\aleph$ 个有界线性算子 $rI: r \in \mathbb{C}$.

这实际上证明了呈 §7.2 练习 1 形式的线性算子只有 $\aleph$ 个，而 l^2 上所有线性算子有 $2^\aleph$ 个. 这两个结论表明 (3) 成立.

练习 14 必要性：设 $\{e_i|i \in J\}$ 是 X 的规范直交基. 因为 $\text{span}\{e_i|i \in J\}$ 稠于 X, 所以 $\text{span}\{Ue_i|i \in J\}$ 稠于 Y. 现在

$$\langle Ue_i, Ue_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

这样 $\{Ue_i|i \in J\}$ 是 Y 中规范直交基.

充分性：任取 $x, y \in X$. 它们有 Fourier 级数展式 $x = \sum a_i e_i$ 和 $y = \sum b_i e_i$. 因为 U 连续，所以 $Ux = \sum a_i Ue_i$ 且 $Uy = \sum b_i Ue_i$. 因为 $\{Ue_i|i \in J\}$ 是 Y 中规范直交基，所以

$$\langle Ux, Uy\rangle = \sum_i a_i \overline{b_i} = \langle x, y\rangle,$$

从而 U 保持内积与范数. 注意到 $\text{span}\{Ue_i|i \in J\}$ 稠于 Y, 所以 U 有闭值域. 总之，U 是等距同构，从而 U 是酉算子.

练习 15 说明 $L^2(\mathbb{C})$ 的子空间 $L^\perp$ 是平凡的即可. 任取 $f \in L^\perp$, 则

$$\int_{\mathbb{C}} f(z) z^n \overline{z}^l \exp(-\frac{|x|^2}{2})\mathbf{m}(dz) = 0 : n = 0, 1, \cdots.$$

函数 $z \mapsto g(z) := f(z)\exp(-|z|^2/2)$ 是 Lebesgue 可积的，作 Fourier 变换

$$\hat{g}(w) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\exp(-\frac{|z|^2}{2})\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,\text{re}\, z\overline{w})\mathbf{m}(dz).$$

对非负可测函数项级数逐项积分得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{C}}|f(z)\exp(-\frac{|z|^2}{2})|\frac{(-2\pi\sqrt{-1}\operatorname{re}z\overline{w}}{n!}|\mathbf{m}(dz)$$
$$=\int_{\mathbb{C}}|f(z)|\exp(-\frac{|x|^2}{2})\exp(2\pi|\operatorname{re}z\overline{w}|)\mathbf{m}(dz)<+\infty.$$

于是可以逐项积分

$$\hat{g}(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathbb{C}}f(z)\exp(-\frac{|z|^2}{2})\frac{(-2\pi\sqrt{-1}(z\overline{w}+\overline{z}w)^n}{2^n n!}dx=0.$$

这样 $g\doteq 0$, 因此 $f\doteq 0$. 可见, 在 $L^2(\mathbb{C})$ 中, $f=0$.

另证 (需在 §7.4 后): 记 $z=x+\sqrt{-1}y$, 则 $L^2(\mathbb{R})\otimes L^2(\mathbb{R})=L^2(\mathbb{C})$ 且

$$L=\operatorname{span}\{x^k\exp(-|x|^2/2)y^l\exp(-y^2/2)\}$$
$$=\operatorname{span}\{x^k\exp(-|x|^2/2)\otimes\{y^l\exp(-|y|^2/)\}.$$

据 §6.2 例 4, $\operatorname{span}\{x^k\exp(-|x|^2/2)|k\geqslant 0\}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密. 因此 L 在 $L^2(\mathbb{C})$ 中稠密.

练习 16 利用极坐标和调和函数的平均值公式得

$$\int_{B(z,1)}f(w)\mathbf{m}(dw)=\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}f(z+r\exp(\sqrt{-1}t))dt=\pi f(z)$$

$$\Rightarrow|\pi f(z)|=|\int_{B(z,1)}f(w)\exp(-\frac{|w|^2}{4})\exp(\frac{|w|^2}{4})\mathbf{m}(dw)|$$

$$\leqslant(\int_{B(z,1)}|f(w)|^2\exp(-\frac{|w|^2}{2})\mathbf{m}(dw))^{\frac{1}{2}}(\int_{B(z,1)}\exp\frac{|w|^2}{2}\mathbf{m}(dw))^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(\int_{\mathbb{C}}|f(w)|^2\exp(-\frac{|w|^2}{2})\mathbf{m}(dw))^{\frac{1}{2}}(\int_{B(z,1)}\exp\frac{|w|^2}{2}\mathbf{m}(dw))^{\frac{1}{2}}.$$

这样有连续依赖于 z 的常数 c_z 使 $|f(z)|\leqslant c_z\|f\|$. 这得 (3).

(1) 任取 H 中的基本序列 (f_n) 和 $r>0$, 命 $c=\max\{c_z:|z|\leqslant r\}$, 则

$$|f_m(z)-f_n(z)|\leqslant c\|f_n-f_m\|:|z|\leqslant r.$$

可见, (f_n) 内闭一致收敛, 其极限 f 是整函数. 现在

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\geqslant 1,\forall n,l\geqslant m:\int_{\mathbb{C}}|f_n(z)-f_l(z)|^2\exp(\frac{-|z|^2}{2})\mathbf{m}(dz)\leqslant\varepsilon^2.$$

在上式中命 $l\to\infty$ 并用 Fatou 引理得 $\|f_n-f\|\leqslant\varepsilon$, 从而

$$f=(f-f_n)+f_n\in H.$$

于 H 是 Banach 空间，其范数由以下内积诱导：

$$\langle f,g\rangle=\int_{\mathbb{C}}f(z)\overline{g(z)}\exp(-|z|^2/2)\mathbf{m}(dz).$$

(2) 先计算一个积分：作变量代换 $t=\rho^2/2$, 则 $dt=\rho d\rho$. 于是

$$\int_0^\infty\exp(-\frac{\rho^2}{2})\rho^{2k+1}d\rho=\int_0^\infty\exp(-t)(2t)^kdt=2^kk!,$$

其中第二个等号多次用了分部积分. 当 $0<r<+\infty$ 时,

$$\begin{aligned}&\int_{|z|\leqslant r}e_k(z)\overline{e_l(z)}\exp(-\frac{|z|^2}{2})\mathbf{m}(dz)\\=&\int_0^r\exp(-\frac{\rho^2}{2})\rho d\rho\int_0^{2\pi}\frac{\rho^{k+l}\exp(\sqrt{-1}(k-l)\theta)d\theta}{\sqrt{2^{k+l+2}k!l!\pi^2}}\\=&\begin{cases}0:l\neq k,\\ \dfrac{1}{2^kk!}\displaystyle\int_0^r\exp(-\frac{\rho^2}{2})\rho^{2k+1}d\rho:l=k.\end{cases}\end{aligned}$$

将整函数 $f\in H$ 写成幂级数 $\sum\limits_{n\geqslant0}a_ne_n$, 它在 $|z|\leqslant r$ 时一致收敛, 因此

$$\begin{aligned}&\int_{|z|\leqslant r}f(z)\overline{e_n(z)}\exp(-\frac{|z|^2}{2})\mathbf{m}(dz)\\=&\sum_{n=0}^\infty\int_{|z|\leqslant r}a_ke_k(z)\overline{e_n(z)}\exp(-\frac{|z|^2}{2})\mathbf{m}(dz)\\=&\frac{a_n}{2^nn!}\int_0^r\exp(-\frac{\rho^2}{2})\rho^{2n+1}d\rho.\end{aligned}$$

在上面两组式子中命 $r\to\infty$ 得 $\langle e_k,e_l\rangle=\delta_{kl}$ 且 $\langle f,e_n\rangle=a_n$. 现在

$$\begin{aligned}&\int_{|z|\leqslant r}|f(z)|^2\exp(-\frac{|z|^2}{2})\mathbf{m}(dz)\\=&\sum_{n=0}^\infty\int_{|z|\leqslant r}f(z)\overline{a_ne_n(z)}\mathbf{m}(dz)\\=&\sum_{n=0}^\infty\frac{|a_n|^2}{2^nn!}\int_0^r\exp(-\frac{\rho^2}{2})\rho^{2n+1}d\rho.\end{aligned}$$

在上式中命 $r \to \infty$ 并结合前面的结论，得 $\|f\|^2 = \sum\limits_{n\geqslant 0} |\langle f, e_n\rangle|^2$. 因此 f 关于 $\{e_n|n \geqslant 0\}$ 成立 Parseval 等式，从而 $\{e_n|n \geqslant 0\}$ 是 H 的规范直交基.

(4) 据 (3) 和 Riesz 表示定理，有 $K_z \in H$ 使 $f(z) = \langle f, K_z\rangle$.

(5) 注意到赋值泛函的连续性，有

$$K_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle K_z, e_n\rangle e_n(w)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(z)} e_n(w) = \frac{\exp(z\overline{w}/2)}{2\pi}.$$

练习 17 因为 $A^2(M)$ 上赋值泛函 $f \mapsto f(z)$ 连续，所以据 Riesz 表示定理得 $K_z \in A^2(M)$ 恒使 $f(z) = \langle f, K_z\rangle$. 将内积用积分表示即可.

(1) 源自以下分析

$$\langle f, m_\varphi^* K_\lambda\rangle = \langle m_\varphi f, K_\lambda\rangle = \langle \varphi f, K_\lambda\rangle$$
$$= \varphi(\lambda) f(\lambda) = \varphi(\lambda)\langle f, K_\lambda\rangle = \langle f, \overline{\varphi(\lambda)} K_\lambda\rangle.$$

(2)+(3) 因为 $f = \sum\limits_k \langle f, e_k\rangle e_k$，再由赋值泛函的连续性得

$$f(z) = \sum_k \int_M e_k(z)\overline{e_k(w)} f(w)\mathbf{m}(dw).$$

这得 $K(z,w) = \sum\limits_k e_k(z)\overline{e_k(w)}$. 当 $M = \mathbb{D}$ 时，据练习 1 得

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)} = \frac{1}{\pi(1-\overline{z}w)^2}.$$

练习 18 由 $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$ 知包含映射 $A: L^\infty \to L^2$ 是有界线性算子. 因为 $L = A^{-1}(L)$，所以 L 也是 L^∞ 的闭线性子空间. 于是 L 上有两个完备范数 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 使 $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_\infty$. 据范数等价定理知这两个范数等价：存在 $b > 0$ 使 $f \in L$ 时 $\|f\|_\infty \leqslant b\|f\|_2$.

任取 L 中有限规范直交系 $\{f_1, \cdots, f_n\}$. 对于 $c \in \mathbb{C}^n$，

$$\|c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n\|_\infty \leqslant b\|c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n\|_2 = b|c|.$$

这样 $E_c = (|c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n| > b|c|)$ 是 M 的零测度集. 当 c 取遍 $\mathbb{C}^n$ 中有理点时，作零集 $E = \bigcup\{E_c|c\}$. 于是当 c 是有理点且 $x \in M \setminus E$ 时，

$$|c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)| \leqslant b|c|.$$

据有理点全体的稠密性，上式对所有 $c \in \mathbb{C}^n$ 成立. 于是

$$x \in M \setminus E: |f_1(x)|^2 + \cdots + |f_n(x)|^2 \leqslant b^2.$$

上式两边在 M 上积分得到 $n \leqslant b^2$. 这样 L 的维数不超过 b^2.

练习 19 为方便计，将 $L^p(M,\mu)$ 简计为 L^p 而 l^p 仍具本意.

(1)⇒(2): 命 $E_n = (n-1 \leqslant |f| < n)$, 这得 M 的可测划分 $\{E_n | n \in \mathbb{Z}_+\}$. 取 n 使 $i > n$ 时， $\mu(E_i) = 0$. 于是 $|f| \leqslant n$, 从而 f 本性有界.

(2)⇒(3) 与 (8)⇒(4)⇒(5)+(7) 是显然的.

(3)⇒(1): 否则， M 有可测划分 $\{E_n | n \geqslant 1\}$ 使无限多项 E_n 非零集. 将零集并至非零集中可设 E_n 都非零集. 命 $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi_{E_n}}{\mu(E_n)}$, 得以下矛盾式子:

$$\int\limits_M f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(E_n)}{\mu(E_n)} = +\infty,$$

(2)⇒(4): 据条件得 $L^2 \subseteq L^\infty$, 又自然有 $L^2 \supseteq L^\infty$. 据练习 18 知 L^∞ 是有限维的 (自然 L^2 也是有限维的).

(5)⇒(1): 否则， M 有可测划分 $\{E_n | n \geqslant 1\}$ 使无限多项 E_n 非零集. 将零集并入至非零集中可设 E_n 都非零集. 对于 $x \in l^\infty$, 命 $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_n}$, 得等距算子 $A : l^\infty \to L^\infty$. 于是 L^∞ 有个不自反的闭线性子空间 $\operatorname{ran} A$, 矛盾.

(5)⇔(6): 因为 Banach 空间 L^1 的共轭空间等距同构于 L^∞, 由 L^∞ 的自反性和 Pettis 定理知 L^1 也自反.

(7)⇒(4): 注意到 $L^\infty \subseteq L^p$ 即可.

(4)+(6)⇒(8): 注意到 L^1 与 L^∞ 的维数相同且 $L^p \subseteq L^1$ 即可.

练习 20 提示: 取一个与 μ 等价的概率测度，利用练习 19 的结论.

练习 21 据练习 19, M 有个可测划分 $\{E_n\}$ 使有无限项 E_n 的测度无限. 将测度为 0 的项并至第一个测度不为零的项后可设 E_n 的测度都非 0. 当 $x \in l^p$ 时，命 $Ax = \sum\limits_n x_n \chi_{E_n} / \mu(E_n)^{\frac{1}{p}}$, 得等距算子 $A : l^p \to L^p(M,\mu)$.

练习 22 因为 $E = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} (E \cap [2k\pi, 2k\pi + 2\pi))$, 所以有个 $k \in \mathbb{Z}$ 使 $E \cap [2k\pi, 2k\pi + 2\pi)$ 非零集. 所讨论的三角级数的周期为 2π 且 Lebesgue 测度是平移不变的，可设 $E \subseteq [0, 2\pi)$ 且 $0 < |E|_1 < 2\pi$. 命 $c_n = \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$, 设 $0 \leqslant t_n < 2\pi$ 使 $a_n = c_n \cos t_n$ 且 $b_n = c_n \sin t_n$. 于是

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n \cos(nx - t_n).$$

设 $2\pi - |E|_1 < 4\theta < 2\pi$. 作变量代换 $x = (t_n - \theta)/n + t$ 并命

$$J_n = \int\limits_E |\cos(nx - t_n)| dx = \int\limits_{M_n} |\cos(nt - \theta)| dt.$$

函数 $t \mapsto \cos(nt-\theta)$ 以 2π 为周期且 M_n 在一个长度为 2π 的区间内, 可设 M_n 是 $[0,2\pi)$ 的子集. 设 k 为 $2n-2\theta/\pi$ 的整数部分, 则

$$\pi < 2\theta+\pi < 2\pi < 2\theta+2\pi < \cdots < 2\theta+k\pi \leqslant 2n\pi.$$

如果 $i\pi < nt < i\pi+2\theta$, 则 $0<t<2\pi$ 且 $|nt-i\pi-\theta|<\theta$. 由此得

$$|\cos(nt-\theta)| > \cos\theta.$$

使 $0<t<2\pi$ 且满足上式的 t 组成一个点集 S_n, 则

$$|S_n|_1 > \frac{2\theta k}{n} > 4\theta - \frac{4\theta}{n^2} - \frac{2\theta}{n}.$$

因为 $|M_n|_1+|S_n|_1-|M_n\cap S|_1 \leqslant 2\pi$ 且 $|M_n|_1=|E|_1$, 所以

$$J_n \geqslant \int\limits_{M_n\cap S_n} |\cos(nt-\theta)|dt \geqslant (|E|_1+|S|-2\pi)\cos\theta.$$

据 Егоров 定理, 适当缩小 E 后可设函数项级数 $\sum c_n|\cos(nx-t_n)|$ 在 E 上一致收敛. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int\limits_E |\cos(nx-t_n)|dx < +\infty.$$

因为 $|E|_1+4\theta>2\pi$, 从而有正数 c 使 n 充分大时 $|E|_1+|S_n|-2\pi>c$. 对此种 n 有 $J_n<c\cos\theta$. 由上面的式子得 $\sum c_n<+\infty$.

练习 23 周期 2π 是显然的. 连续性源自 Lebesgue 积分的平均连续性与下式:

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \Big|\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)(f_2(t+x_1)-f_2(t+x_2))\frac{dt}{\pi}\Big|$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f_1(t)|^2dt\Big)^{\frac12}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f_2(t+x_2)-f_2(t+x_1)|^2dt\Big)^{\frac12}.$$

练习 24 充分性: 设 f_1 和 f_2 同练习 23. 设 f_1 的 Fourier 系数是 $a_n':n\geqslant 0$ 和 $b_n':n\geqslant 1$ 而 f_2 的 Fourier 系数是 $a_n'':n\geqslant 0$ 和 $b_n'':n\geqslant 1$. 现在

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)f_2(y)dtdy,$$

这表明 $a_0=a_0'a_0''$. 当 $n\geqslant 1$ 时, 作变量代换得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\begin{pmatrix}\cos nt\\ \sin nt\end{pmatrix}\frac{dt}{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(u)f_2(v)\begin{pmatrix}\cos n(v-u)\\ \sin n(v-u)\end{pmatrix}\frac{dudv}{\pi^2}$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(u)f_2(v)\begin{pmatrix}\cos nu\cos nv+\sin nu\sin nv\\ \sin nv\cos nu-\cos nv\sin nu\end{pmatrix}\frac{du}{\pi}\frac{dv}{\pi}.$$

这即 $a_n = a'_n a''_n + b'_n b''_n$ 而 $b_n = a'_n b''_n - b'_n a''_n$. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}(|a'_n|^2 + |b'_n|^2)^{\frac{1}{2}}(|a''_n|^2 + |b''_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(|a'_n|^2 + |b'_n|^2)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(|a''_n|^2 + |b''_n|^2)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\|f_1\|_2\|f_2\|_2.$$

必要性: 命 $c_n = \sqrt{|a_n|} \vee \sqrt{|b_n|}$. 取 a'_0 和 a''_0 使 $a'_0 a''_0 = a_0$. 当 $n \geqslant 1$ 时, 约定 $0/0 = 0$. 命 $a'_n = b'_n = c_n$ 且

$$a''_n = \frac{a_n - b_n}{2c_n}, b''_n = \frac{a_n + b_n}{2c_n},$$

则 $a_0 = a'_0 a''_0$, $a_n = a'_n a''_n + b'_n b''_n$ 且 $b_n = a'_n b''_n - b'_n a''_n$, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a'_n|^2 + |b'_n|^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \vee |b_n| < +\infty,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a''_n|^2 + |b''_n|^2) = \sum_{c_n > 0}\frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{2(|a_n| \vee |b_n|)} < +\infty.$$

据 Riesz-Fischer 定理得 $f_i \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ 使

$$f_1(x) \sim \frac{1}{2}a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos nx + b'_n \sin nx),$$
$$f_2(x) \sim \frac{1}{2}a''_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a''_n \cos nx + b''_n \sin nx).$$

由 f_1 和 f_2 得到的 Young 函数 f 的 Fourier 系数为 a_n 和 b_n.

练习 25 据例 2, $\{e_n | n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 的直交基. 当 $f \in H^2$ 时,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}}\frac{|\langle f, e_n\rangle|^2}{2\pi} = \sum_{n \geqslant 0}\frac{|\langle f, e_n\rangle|^2}{2\pi},$$

其中第二等式源自当 $n = -1, -2, \cdots$ 时, $\langle f, e_n\rangle = 0$. 这样 f 关于规范直交系 $\{e_n | n \geqslant 0\}$ 的 Parseval 等式成立, 因此 $\{e_n | n \geqslant 0\}$ 是 H^2 的直交基.

练习 26 据练习 25, 可设 f 有 Fourier 展式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n e_n}{\sqrt{2\pi}}$. 对任何 $g \in L^2(\mathbb{T})$, 成立 $\|\overline{g}\|_2 = \|g\|_2$. 又从 $f = \overline{f}$ 及 $\overline{e_n} = e_{-n}$ 知 f 也有 Fourier 展式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{a_n}e_{-n}}{\sqrt{2\pi}}$. 可见当 $n \geqslant 1$ 时 $\overline{a_n} = 0$. 这样 $f = \frac{a_0 e_0}{\sqrt{2\pi}}$, 从而 f 与一个常数函数 (几乎处处) 相等.

练习 27 由包含式 $H^p \subseteq H^1$, 可设 $p=1$. 命 $c=\int\limits_{\mathbb{T}} f(z)\frac{|dz|_1}{2\pi}$, 则

$$\int\limits_{\mathbb{T}}(f(z)-c)z^n|\frac{|dz|_1}{2\pi}=0: n=0,1,2,\cdots$$

$$\Rightarrow\int\limits_{\mathbb{T}}(f(z)-c)z^{-n}\frac{|dz|_1}{2\pi}=0: n=0,1,2,\cdots$$

其中最后一式源自两边取复数的共轭. 注意到 $\{e_n|n\in\mathbb{Z}\}$ 在 $L^\infty(T)$ 中的弱 * 稠密性, 知 $f-c=0$, 从而 $f=c$(这是几乎处处相等的意思).

练习 28 (1) 提示: $f\mapsto f(y)$ 是 H 上的连续线性泛函, 用 Riesz 表示定理.

(2) 设 $f\perp\{K_y|y\in M\}$, 则 $f(y)=\langle f,K_y\rangle=0$. 于是 $f=0$. 现在

$$\begin{aligned}K(x,y)&=K_y(x)=\langle K_y,K_x\rangle\\&=\sum_{i\in J}\langle K_y,e_i\rangle\langle e_i,K_x\rangle=\sum_{i\in J}\overline{e_i(y)}e_i(x).\end{aligned}$$

(3) 因为 $A^2(\mathbb{D})$ 中元素都是 $\mathbb{D}$ 上解析函数且 $A^2(\mathbb{D})$ 上的赋值泛函都连续, 从而 $A^2(\mathbb{D})$ 是函数 Hilbert 空间. 因为 $L^2(\mathbb{D})$ 中每个元素是一个等价类 $[f]$, 其中 f 是 $\mathbb{D}$ 上平方可积的函数而 $[f]$ 代表了与 f 几乎处处相等的可测函数全体, 所以 $L^2(\mathbb{D})$ 上没有赋值泛函.

练习 29 (1) 设在 H 中 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 而 $\lim\limits_{n\to\infty}Af_n=g$. 当 $x\in M$ 时,

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x)f_n(x)=\varphi(x)f(x).$$

于是 $g=Af$. 据闭图像定理知, A 是有界线性算子.

因为 $A^nf=\varphi^nf$, 所以 $\|\varphi^nf\|\leqslant\|A^n\|\|f\|$. 取个 f 使 $f(x)\neq 0$, 则

$$\begin{aligned}&|\varphi^n(x)f(x)|\leqslant c_x\|\varphi^nf\|\leqslant c_x\|A^n\|\|f\|\\\Rightarrow&|\varphi(x)||f(x)|^{\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{c_x\|A^n\|\|f\|}.\end{aligned}$$

取极限得 $|\varphi(x)|\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. 可见 φ 有界.

(2) 函数 Hilbert 空间 $A^2(\mathbb{D})$ 的乘子全体是 $A^\infty(\mathbb{D})$, 它真含于 $A^2(\mathbb{D})$. 又 $\mathbb{Z}_+$ 上函数 Hilbert 空间 l^2 的乘子全体是 l^∞, 它真包含 l^2.

使导函数平方可积的绝对连续 (即全连续) 函数 $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ 全体记为 H, 它按函数通常的线性运算成为一个线性空间, 它按范数 $\|f\|=\|f'\|_2$ 成为 Hilbert 空间. 如果 $\varphi,f\in H$, 则 φ 和 f 的有界性蕴含

$$(\varphi f)'=\varphi f'+\varphi' f\in L^2[0,1].$$

这样 $\varphi f\in H$, 从而 φ 是 H 的乘子. 反之设 φ 是 H 的乘子, 则 $\varphi=\varphi 1\in H$. 总之, $\Phi=H$.

练习 30 取 X 的一个规范直交基 E, 命 $H = l^2(E)$ 即可.

§7.4 投影算子

练习 1 以 $a \xrightarrow{f} b$ 表示 $b = f(a)$, 则结论源自下式

$$(x_1, x_2, \cdots) \xrightarrow{S_-} (0, x_1, \cdots) \xrightarrow{S_-} (x_1, x_2, \cdots),$$

$$(x_1, x_2, \cdots) \xrightarrow{S_+} (x_2, x_3, \cdots) \xrightarrow{S_-} (0, x_2, \cdots).$$

练习 2 (1)⇒(3): 记 $P = U^*U$ 且 $Q = UU^*$. 命 $A = U - UU^*U$, 则

$$A^*A = P - P^2 - P^2 + P^3 = 0.$$

注意到 $\|A^*A\| = \|A\|^2$, 有 $A = 0$. 因此 $U = UU^*U$.

(3)⇒(1): 因为 $(U^*U)^*(U^*U) = U^*(UU^*U) = U^*U$, 所以 U^*U 是投影算子. 仿此得 (2)⇔(3). 现在记 $X_0 = U^*(Y)$ 而 $Y_0 = U(X)$, 则

$$X_0 = U^*UU^*(Y) \subseteq U^*U(X) \subseteq X_0,$$

可见 $X_0 = U^*U(X)$. 类似有 $Y_0 = UU^*(Y)$. 当 $x \in X_0$ 时,

$$\langle Ux, Ux\rangle = \langle Px, x\rangle = \langle x, x\rangle.$$

当 $y \in Y_0$ 时, $y = U(U^*y)$. 这样 $U|_{X_0}^{Y_0}$ 是保范满射.

练习 3 (1)+(2)⇒(3): 命 $x = x_1 + x_2$ 及 $y = Ux - Ux_1 - Ux_2$, 则

$$\begin{aligned}\|y\|^2 =& \|Ux\|^2 + \|Ux_1\|^2 + \|Ux_2\|^2\\ &-2\langle Ux, Ux_1\rangle - 2\langle Ux, Ux_2\rangle + 2\langle Ux_1, Ux_2\rangle\\ =&\|x\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\langle x, x_1\rangle - 2\langle x, x_2\rangle + 2\langle x_1, x_2\rangle = 0.\end{aligned}$$

于是 $y = 0$. 这表明 $U(x_1 + x_2) = Ux_1 + Ux_2$. 易说明当 t 是有理数时, $U(tx) = tUx$. 据 U 的连续性知 $U(ax) = aUx$ 对任何实数 a 成立. 现在 $\langle U^*Ux_1, x_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$. 这样 $U^*Ux_1 = x_1$, 从而 $U^*U = I$.

显然 (3)⇒(2). (1)⇒(2): 由 $\|Ux - U0\| = \|x - 0\|$ 知 $\|Ux\| = \|x\|$. 现在

$$\|Ux_1 - Ux_2\|^2 = \|Ux_1\|^2 + \|Ux_2\|^2 - 2\langle Ux_1, Ux_2\rangle,$$

$$\|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\langle x_1, x_2\rangle.$$

比较上两式知 U 保持内积. (2)⇒(1) 源自 $\|U0\|^2 = \|0\|^2$ 及上两式.

练习 4 提示: U 不是复线性算子.

练习 5 提示: 参考练习 3 并说明题目中的 3 个条件都能保证 U 是复线性的.

练习 6 当 $i<j$ 时, 任取 $x,y\in L$, 由 $x\perp V(H)$ 得

$$\langle V^i x, V^j y\rangle = \langle x, V^{*i}V^j y\rangle = \langle x, V^{j-i}y\rangle = 0.$$

可见, $V^i(L)\perp V^j(L)$. 作直交和 $N=\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} V^n(L)$, 则 $V(N)\subsetneq N$. 任取 $x\in N^\perp$, 则 $x\in L^\perp = V(H)$. 归纳地设 $x\in V^n(H)$ 且 $x=V^n z$, 由 $x\in V^n(L)^\perp$ 知 $z\in L^\perp = V(H)$, 从而 $x\in V^{n+1}(H)$. 这样 $x\in M$, 从而 $N^\perp\subseteq M$. 明显 $N^\perp\supseteq M$. 因为 V 是单射且 $(V^n(H))_{n=1}^\infty$ 是递减集列, 所以

$$V(M)=\bigcap_{n\geqslant 1} V^{n+1}(M) = M.$$

因此 M 约化 V. 再由 V 是等距知限制 $(V:M\to M)$ 是酉算子.

练习 7 (1) 作变量代换 $s=ut$ 和 $st=v$ 得

$$\|V_t f\|_2^2 = \int_0^t \left|\frac{1}{\sqrt{t}} f(\frac{s}{t})\right|^2 ds = \int_0^1 |f(u)|^2 du,$$

$$\|W_t g\|_2^2 = \int_0^t |\sqrt{t} g(st)|^2 ds = \int_0^t |g(v)|^2 dv \leqslant \int_0^1 |g(v)|^2 dv.$$

(2) $\langle V_t f, g\rangle = \langle f, W_t g\rangle$ 源自下式:

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} f(\frac{s}{t})\overline{g(s)}ds = \int_0^1 f(r)\overline{\sqrt{t}g(rt)}dr.$$

(3) 当 $f\in L^2(0,1]$ 时, 命 $p(f)=\varlimsup\limits_{t\to t_0}\|V_t f - V_{t_0} f\|_2$, 则 $p(f)\leqslant 2\|f\|_2$. 可见 $p: L^2\to\mathbb{R}$ 是连续半范数. 当 $f\in C[0,1]$ 时,

$$\begin{aligned}
&\|V_t f - V_{t_0} f\|_2^2 = \|V_t f\|_2^2 + \|V_{t_0} f\|^2 - 2\,\mathrm{re}\langle V_t f, V_{t_0} f\rangle \\
=&2\|f\|_2^2 - 2\,\mathrm{re}\int_0^1 \frac{\chi_{(0,t]}(s)\chi_{(0,t_0]}(s)}{\sqrt{tt_0}} f(\frac{s}{t})\overline{f(\frac{s}{t_0})}ds \\
=&2\|f\|_2^2 - 2\,\mathrm{re}\int_0^1 \chi_{(0,\frac{t}{t_0}]}(s)\frac{\sqrt{t_0}}{\sqrt{t}} f(\frac{st_0}{t})\overline{f(s)}ds.
\end{aligned}$$

当 $t \to t_0$ 时, 对上式源用有界收敛定理得 $p(f)=0$. 可见 $\ker p$ 是含 $L^2(0,1]$ 的稠密集 $C[0,1]$ 的闭线性子空间. 这样 $\ker p = L^2(0,1]$, 即 $f \in L^2(0,1]$ 时 $p(f)=0$. 此即 $\lim\limits_{t\to t_0}\|V_t f - V_{t_0} f\|_2 = 0$. 现在

$$\int_0^1 |\sqrt{t}g(rt)|^2 ds = \int_0^1 \chi_{(0,t]}|g(s)|^2 ds.$$

由此据控制收敛定理得 $\lim\limits_{t\to t_0}\|V_t^* g\|_2 = \|V_{t_0}^* g\|_2$ 且 $\lim\limits_{t\to 0}\|V_t^* g\|_2 = 0$. 最后

$$\begin{aligned}
&\|V_t^* g - V_{t_0}^* g\|^2 = \|V_t^* g\|_2^2 + \|V_{t_0}^* g\|_2^2 - 2\,\mathrm{re}\langle V_t^* g, V_{t_0}^* g\rangle \\
=&\|V_t^* g\|_2^2 + \|V_{t_0}^* g\|_2^2 - 2\,\mathrm{re}\langle g, V_t V_{t_0}^* g\rangle \\
\to&2\|V_{t_0}^* g\|_2^2 - 2\,\mathrm{re}\langle f, V_{t_0} V_{t_0}^* g\rangle = 0.
\end{aligned}$$

(4) 命 $S(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\|V_t f_i - V_{t_0} f_i\|_2^2$. 从 $\|V_t f_i - V_{t_0} f_i\|_2 \leqslant 2\|f_i\|_2$ 得

$$\begin{aligned}
S(t) &\leqslant \sum_{i\leqslant n}\|V_t f_i - V_{t_0} f_i\|_2^2 + \sum_{i>n} 4\|f_i\|^2 \\
\Rightarrow \varlimsup_{t\to t_0} S(t) &\leqslant \sum_{i>n} 4\|f_i\|_2^2 \Rightarrow \lim_{t\to t_0} S(t) = 0.
\end{aligned}$$

上式最后源自 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i>n}\|f_i\|_2^2 = 0$. 仿此得 $\lim\limits_{t\to t_0}\sum\limits_{n\geqslant 1}\|V_t^* f_n - V_{t_0}^* f_n\|_2^2 = 0$.

练习 8 (1) 记 $c = \sup\limits_{i\in J}|c_i|$. 当 $x \in X$ 时, $\{c_i P_i x | i \in J\}$ 是直交系. 因为

$$\sum_{i\in J}\|c_i P_i x\|^2 \leqslant |c|^2 \sum_{i\in J}\|P_i x\|^2 \leqslant |c|^2\|x\|^2,$$

所以级数 $\sum\limits_{i\in J} c_i P_i x$ 收敛 (也即 Ax 有意义). 显然 $\mathrm{ran}\, A \subseteq \bigoplus\limits_{i\in J} L_i$.

(2) 上面第一组不等式表明 $\|A\| \leqslant |c|$. 现在

$$x \in \mathrm{ran}\, P_i \Rightarrow Ax = c_i P_i x = c_i x,$$

这样 $\|A\| \geqslant |c_i|$, 从而 $\|A\| \geqslant c$. 综合而得 $\|A\| = c$.

(3) 必要性: 因为 $\mathrm{ran}\, A = X$, 由 (2) 知 $\bigoplus\limits_{i\in J} L_i = X$. 这样 $\sum\limits_{i\in J} P_i = I$. 取 $d > 0$ 使 $\|Ax\| \geqslant d\|x\|$ 恒成立. 当 $x \in L_i$ 时, $Ax = c_i x$. 这样 $|c_i|\|x\| \geqslant d\|x\|$, 从而 $|c_i| \geqslant d$. 因此 $\inf\limits_{i\in J}|c_i| \geqslant d$.

充分性: 作有界线性算子 $B = \sum\limits_{i\in J} c_i^{-1} P_i$. 当 $x \in L_i$ 时,

$$BAx = Bc_i x = c_i^{-1} c_i x = x.$$

这样 $BA = I$. 同样 $AB = I$. 于是 A 可逆且 $A^{-1} = \sum\limits_{i\in J} c_i^{-1} P_i$.

练习 9 (1) 可设 $1 < p < +\infty$ 而 q 是 p 的共轭数. 单位球面 $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ 记为 S, 其体测度记为 $\sigma(dt)$. 当 $0 < s < d(z, \partial M)$ 时,

$$\int\limits_{B(z,s)} f(w)|dw|_{2n} = \int\limits_0^s r^{2n-1}dr \int\limits_S f(z+rt)\sigma(dt) = \omega s^{2n} f(z).$$

以上第二等式源自调和函数的均值公式. 于是

$$|f(z)| \leqslant \Big(\int\limits_{B(z,s)} |f(w)|^p |dw|_{2n}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int\limits_{B(z,s)} \frac{\mathbf{m}(dw)}{(\omega s^{2n})^q}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

可见 $|f(z)| \leqslant \|f\|_p/(\omega s^{2n})^{1/p}$. 命 $s \to d(z, \mathbb{C} \setminus M)$ 得要证明的不等式.

(2) 任取 $A^p(M)$ 中基本序列 (f_n). 连续函数 $z \mapsto d(z, \partial M)$ 在 M 中每个紧子集 K 上能取到最小值 $r_K > 0$. 当 $z \in K$ 时,

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leqslant \|f_n - f_m\|_p/(\omega r_K^{2n})^{\frac{1}{p}}.$$

这表明 (f_n) 内闭一致收敛, 其极限 f 是全纯函数. 现在

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m, \forall n, l \geqslant m : \int\limits_M |f_n(z) - f_l(z)|^p \mathbf{m}(dz) \leqslant \varepsilon^p.$$

在上式中命 $l \to \infty$ 并用 Fatou 引理得 $\|f_n - f\|_p \leqslant \varepsilon$. 于是 $f = (f - f_n) + f_n$ 在 $A^p(M)$ 中且为 (f_n) 在 $A^p(M)$ 的极限. 现在, 赋值泛函的连续性源自 (1).

(3) 据 (2) 和 Riesz 表示定理得 K_z 的存在性. 当 $g \in L^2(M)$ 时,

$$(Pg)(z) = \langle Pg, K_z\rangle = \langle g, PK_z\rangle = \langle g, K_z\rangle.$$

练习 10 先由 $\|\overline{\varphi} f\|_2 = \|\varphi f\|_2$ 得 $\{\overline{\varphi} f | f \in A^2(M)\} \subseteq L^2(M)$. 以 P 记投向 Bergmann 空间的投影算子 $P : A^2(M) \to A^2(M)$, 则 $PK_z = K_z$. 因此

$$(T_\varphi f)(z) = \langle P(\varphi f), K_z\rangle = \langle \varphi f, K_z\rangle.$$

现说明 T_φ 是闭算子: 设在 $A^2(M)$ 中 $f_n \to f$ 且 $Tf_n \to g$, 则

$$\begin{aligned} g(z) &= \lim_{n\to\infty} (Tf_n)(z) = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi f_n, K_z\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \overline{\varphi} K_z\rangle = \langle f, \overline{\varphi} K_z\rangle = (T_\varphi f)(z). \end{aligned}$$

据闭图像定理知 T 有界. 由下式知 $\|T\| \leqslant \|\varphi\|$:

$$\|P(\varphi f)\|_2 \leqslant \|P\| \|\varphi f\|_2 \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_2.$$

练习 11 提示: 当 $A^p(M)$ 中序列 (f_n) 逼近 f 时, (f_n) 内闭一致逼近 f, 从而据 Cauchy 积分公式, (f_n) 的各阶偏导数也内闭一致逼近 f.

练习 12 平移后可设 $a=0$. 设 S_β 是 $A^2(M)$ 的子集使其元素 f 有以下特征:

$$\|f\|_2 \leqslant 1;\ (\partial^\beta f)(0) \geqslant 0; (\text{若有})\alpha < \beta \Rightarrow (\partial^\alpha f)(0) = 0.$$

命 $g_\beta(z) = z^\beta$(即 $z_1^{\beta_1}\cdots z_n^{\beta_n}$), 则 $g/\|g\|_2$ 在 S_β 中. 由 $(\partial^\beta g_\beta)(0) > 0$ 知

$$b_\beta := \sup\{(\partial^\beta f)(0) | f \in S_\beta\} > 0.$$

因为 S_β 是自反空间 $A^2(M)$ 中的有界凸闭集, 所以有 $e \in S_\beta$ 使 $(\partial^\beta e)(0) = b_\beta$. 此式记为条件 (D). 命 $f = e/\|e\|_2$, 则 $f \in S_\beta$ 使

$$(\partial^\beta f)(0) = b_\beta/\|e\|_2 \geqslant b.$$

可见 $\|e\|_2 = 1$. 若还有 $g \in S_\beta$ 满足条件 (D), 则 $\|g\|_2 = 1$ 且 $(e+g)/2 \in S_\beta$ 也满足条件 (D). 于是 $\|e+g\|_2 = 2$. 因为 Hilbert 空间是严格赋范的, 所以 $e = g$.

因此满足条件 (D) 的 e 是唯一的, 将它记为 e_β, 则 $\|e_\beta\|_2 = 1$. 设 $\beta < \gamma$, 命 $t = 2\langle e_\beta, e_\gamma\rangle$ 及 $f = e_\beta - te_\gamma$, 则

$$\|f\|_2^2 = 1 + |t|^2 - 2\,\mathrm{re}\langle e_\beta, te_\gamma\rangle = 1.$$

若有 $\alpha < \beta$, 则 $\alpha < \gamma$. 这样 $(\partial^\alpha f)(0) = 0$ 且

$$(\partial)^\beta f)(0) = (\partial^\beta e_\beta)(0) - t(\partial^\beta e_\gamma)(0) = b_\beta.$$

可见 f 也满足条件 (D). 据唯一性知 $f = e_\beta$. 换言之, $t = 0$.

可见, 若命 $E = \{e_\beta | \beta \in \mathbb{Z}_+^n\}$, 则它是 $A^2(M)$ 的规范直交系. 为说明 E 是 $A^2(M)$ 的规范直交基, 据 $A^2(M)$ 的完备性说明 $E^\perp = \{0\}$ 即可.

任取 $f \in E^\perp$, 若有 γ 使 $(\partial^\gamma f)(0) \neq 0$, 此种 γ 的最小者记为 β. 于是 $\alpha < \beta$ 时, $(\partial^\alpha f)(0) = 0$. 对 f 乘上一个非零复数后可设 $(\partial^\beta f)(0) > 0$ 且 $\|f\|_2 = 1$. 设 $t > 0$ 使

$$t(b_\beta^2 - (\partial^\beta f)(0))^2) < 2b_\beta(\partial^\beta f)(0).$$

命 $g = e_\beta + tf$ 及 $h = g/\|g\|_2$, 则 $h \in S_\beta$ 使 $(\partial^\beta h)(0) > b_\beta$, 矛盾. 可见, 所有 β 使 $(\partial^\beta f)(0) = 0$. 据 Taylor 公式知 f 在 0 的一个开球中恒为 0. 据 M 的连通性和 f 的全纯性知, f 处处为 0.

练习 13 在直交分解 $H \oplus (H' \ominus H)$ 下，将 A 表示成分块阵 $[A_{ij}]_{2\times 2}$. 等式 $JT = AJ$ 表明 $A_{11} = T$ 且 $A_{21} = 0$. 等式 $A^*A = AA^*$ 表明 $T^*T = TT^* + A_{12}A_{12}^*$. 这样 $T^*T \geqslant TT^*$.

练习 14(D. E. Sarason) 注意到 Hilbert 空间的自对偶性，E 的弱有界性意味着 $y \in H$ 时，$\sup\{|\langle x, y\rangle| : x \in E\}$ 是有限数 — 这记为 $c(y)$.

若 H 的维数有限，取 H 的一个规范直交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$. 于是

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} c(e_i)^2.$$

若 H 的维数无限且 E 无界，则有 $x_1 \in E$ 和单位向量 $e_1 \in H$ 使 $\langle x_1, e_1\rangle \geqslant 1$. 命 $L_1 = \mathrm{span}\{e_1, x_1\}$ 而 $P_1 : H \to H$ 是投向 L_1 的直交投影，则 P_1E 在 L_1 中弱有界 (从而有界). 可见 $(I - P_1)E_1$ 在 $L_1^\perp$ 中无界. 于是有 $x_2 \in E$ 和单位向量 $e_2 \in L_1^\perp$ 使 $\langle (I - P)x_2, e_2\rangle \geqslant 2(c(e_1) + 2)$. 此即 $\langle x_2, e_2\rangle \geqslant 2(c(e_1) + 2)$. 如此下去得 E 中序列 (x_n) 和 H 中单位向量序列 (e_n) 使 e_{n+1} 与 $x_1, e_1, \cdots, x_n, e_n$ 直交且

$$\langle x_{n+1}, e_{n+1}\rangle \geqslant (n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{c(e_i)}{i} + n + 1\right).$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ 收敛，据 Riesz-Fischer 定理知级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{i}$ 可和，于是

$$\begin{aligned} \left|\left\langle x_{n+1}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{i}\right\rangle\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x_{n+1}, e_i\rangle}{i} + \frac{\langle x_{n+1}, e_{n+1}\rangle}{n+1}\right| \\ &\geqslant \frac{\langle x_{n+1}, e_{n+1}\rangle}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{c(e_i)}{i} = n + 1. \end{aligned}$$

这与 E 的弱有界性矛盾.

练习 15 设 X 和 Y 是 Hilbert 空间而 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{B}(X, Y)$ 的弱有界集，据 Hilbert 空间的自对偶性，这意味着 $x \in X$ 且 $y \in Y$ 时，$\{\langle Ax, y\rangle | A \in \mathbf{T}\}$ 有界，也即 $\{\langle x, A^*y\rangle | A \in \mathbf{T}\}$ 有界. 据练习 14 知 $\sup\{\|A^*y\| : A \in \mathbf{T}\}$ 有限，这记为 c_y. 当 $\|x\| = 1$ 时，

$$|\langle Ax, y\rangle| = |\langle x, A^*y\rangle| \leqslant \|A^*y\| \leqslant c_y.$$

这样 $\{Ax | A \in \mathbf{T}, \|x\| = 1\}$ 是 Y 中的弱有界集，再据练习 14 知 $\{Ax | A \in \mathbf{T}, \|x\| = 1\}$ 是 Y 中的有界集，从而 $\mathbf{T}$ 有界.

练习 16 设 $A: X \to Y$ 是 Hilbert 空间之间的可逆有界线性算子. 命

$$S = \{y \in Y : \|A^*y\| < 1\}.$$

任取 $z \in Y$, 则有 $x \in X$ 使 $Ax = z$. 当 $y \in S$ 时,

$$|\langle y, z\rangle| = |\langle y, Ax\rangle| = |\langle A^*y, x\rangle| \leqslant \|x\|.$$

可见 S 弱有界, 从而它有界. 因此有 $c > 0$ 使 $\|A^*y\| < 1$ 时, $\|y\| \leqslant c$.

任取 $y \in Y$ 和 $\varepsilon > 0$, 命 $z = y/(\|A^*y\| + \varepsilon)$, 则 $\|A^*z\| < 1$. 于是 $\|z\| \leqslant c$, 即 $\|y\| \leqslant c\|A^*y\| + c\varepsilon$. 命 $\varepsilon \to 0$ 得 $c\|A^*y\| \geqslant \|y\|$. 可见 A^* 下有界, 从而 A^* 有闭值域. 由 $X = \ker A \oplus \overline{\operatorname{ran}} A^*$ 知 A 是满射, 从而 $A^* : Y \to X$ 是拓扑同构. 这样 A 也是拓扑同构.

§7.5 赋范代数

练习 1 记 $B = A^+$. 当 $a = 0$ 或 $b = 0$ 时, $ab = 0$. 这样 A 是 B 的理想. 命 $\phi(b) = [b]$, 这得映射 $\phi : \mathbb{K} \to B/A$. 显然 ϕ 是同态.

如果 $\phi(b) = 0$, 则 $b \in A$. 这样 $b = 0$. 于是 $\ker\phi = 0$. 注意到 $[y + b] = [b]$, 所以 ϕ 是满射. 这样 ϕ 是同构.

练习 2 命 $\phi^+(x + a) = \phi(x) + a$, 这得 ϕ 的线性延拓 $\phi^+ : A^+ \to B^+$. 现在

$$\begin{aligned}
\phi^+((x+a)(y+b)) &= \phi^+(xy + ay + bx + ab) \\
&= \phi(xy + ay + bx) + ab \\
&= \phi(x)\phi(y) + b\phi(x) + a\phi(y) + ab \\
&= (\phi(x) + a)(\phi(y) + b) \\
&= \phi^+(x + a)\phi^+(y + b).
\end{aligned}$$

从而 ϕ^+ 是同态使 $\phi^+(1) = 1$. 请读者证明 ϕ^+ 的唯一性.

练习 3 (2) 在等式 $yx = xy$ 两边左乘 x^{-1} 并右乘 x^{-1} 即可.

练习 4 (2) 明显地, 式子 $ef = fe = f$ 恒成立. 因此 e 是单位元.

必要性: 因为 $\sup\limits_{x \in M} |(1/f)(x)| \leqslant \|1/f\|$, 所以 $|f(x)| \geqslant \|1/f\|^{-1}$.

充分性: 当 $|\beta| \leqslant l$ 时, 取多项式 $P_\beta(\lambda_\alpha)_{\alpha \leqslant \beta}$ 使

$$\partial^\beta(1/f) = P_\beta(\partial^\alpha f)_{\alpha \leqslant \beta}/f^{|\beta|+1}.$$

注意到 f 下有界且诸 $\partial^\alpha f$ 都是有界函数, 从而 $\partial^\beta(1/f) : |\beta| \leqslant l$ 都是有界函数. 这样 $1/f$ 在 $C_{\mathrm{b}}^l(M)$ 中且是 f 的逆元.

(3) 将 $\partial^\alpha f$ 在 $\overline{M}$ 上的唯一连续延拓记为 $\theta^\alpha f$. 当 $f,g\in C_b^l(\overline{M})$ 时,

$$\partial^\alpha(af+bg)=a\partial^\alpha f+b\partial^\alpha g,$$

它在 $\overline{M}$ 上有唯一连续延拓 $a\theta^\alpha f+b\theta^\alpha g$; 又

$$\partial^\beta(fg)=\sum_{\alpha\leqslant\beta}\binom{\beta}{\alpha}\partial^\alpha f\partial^{\beta-\alpha}g,$$

它在 $\overline{M}$ 上有唯一连续延拓 $\sum\limits_{\alpha\leqslant\beta}\binom{\beta}{\alpha}\theta^\alpha f\theta^{\beta-\alpha}g$. 因此 $C_b^l(\overline{M})$ 是子代数.

任取 $C_b^l(\overline{M})$ 的收敛序列 (f_k), 其极限 f 在 $C_b^l(M)$ 中. 因为

$$\sup_{x\in\overline{M}}|\theta^\alpha g(x)|=\sup_{x\in M}|\partial^\alpha g(x)|:g\in C_b^l(\overline{M}),$$

所以 $(\theta^\alpha f_k)$ 一致收敛, 其一致收敛的极限 g_α 是 $\overline{M}$ 上的连续函数且 $x\in M$ 时 $\partial^\alpha f(x)=g_\alpha(x)$. 可见, $\partial^\alpha f$ 在 $\overline{M}$ 上有唯一连续延拓 g_α. 于是 f 在 $C_b^l(\overline{M})$ 中且是 (f_k) 的极限, 从而 $C_b^l(\overline{M})$ 是闭子代数.

(4) 因为 f 在 $\overline{M}$ 上的连续延拓也下有界, 所以据 (2) 的证明知 $\partial^\alpha(1/f)$ 也能连续延拓至 $\overline{M}$ 上去. 可见, $1/f$ 在 $C_b^l(\overline{M})$ 中.

练习 5 任取 $x\in\partial_A A^\times$, 则 $A^\times$ 中有序列 (x_n) 逼近 x, 于是

$$\|x_n^{-1}\|\|x_n-x\|\geqslant\|x_n^{-1}\|d(x_n,\partial_A A^\times)\geqslant 1.$$

可见 (x_n^{-1}) 是无界序列. 又 $\partial_B B^\times=\overline{B^\times}\setminus B^\times$ 且 (x_n) 是 $B^\times$ 中序列, 说明 x 不在 $B^\times$ 中即可. 否则据求逆的连续性得 $x_n^{-1}\to x^{-1}$, 这样 (x_n^{-1}) 有界, 矛盾.

练习 6 作非负常数 $c=\sup\limits_{n\geqslant 0}\|x^n\|$, 据题设

$$\sum_{k=0}^\infty\|a_{nk}x^k\|\leqslant c\sum_{k=0}^\infty\|a_{nk}\|<+\infty.$$

这表明 (1) 中的级数绝对可和. 为证 (2), 设 y 是凸组合 $\sum\limits_{i=0}^k t_i x^i$, 则

$$(y-1)y_n=\sum_{i=0}^k t_i(x^i-1)y_n,$$

$$(x^i-1)y_n=\sum_{j=1}^{i-1}x^j(x-1)y_n.$$

据此两式说明 $\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)y_n=0$ 即可，这源自题设和下式：

$$\begin{aligned}\|(x-1)y_n\| &= \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k-1}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x^k\Big\| \\ &\leqslant c\Big(\|a_{n0}\| + \sum_{k=1}^{\infty}\|a_{n,k-1}-a_{n,k}\|\Big).\end{aligned}$$

练习 7 (1) 对任何 $r>0$, 取 $y\in A^{\times}$ 使 $\|x-y\|<r$. 据定理 1 得

$$1\leqslant \|y^{-1}\|\|y-x\|.$$

因此 $\|y^{-1}\|^{-1}<r$. 命 $z=\|y^{-1}\|^{-1}y^{-1}$, 则

$$xz=(x-y)z+\|y^{-1}\|^{-1}.$$

这得 $\|xz\|<2r$. 可见， $\inf\{\|xz\|:\|z\|=1\}=0$. 仿 (1) 得 (2).

(3) 命 $f(a,b)=ab$, 得连续映射 $f:A\times A\to A$ 使 $f(A^{\times}\times A^{\times})=A^{\times}$. 因为 $A^{\times}\times A^{\times}$ 与 $A^{\times}$ 分别在 $\overline{A^{\times}}\times\overline{A^{\times}}$ 和 $\overline{A^{\times}}$ 中稠密，所以 $f(\overline{A^{\times}}\times\overline{A^{\times}})\subseteq\overline{A^{\times}}$. 特别地， $f(\partial A^{\times}\times\partial A^{\times})\subseteq\partial A^{\times}$.

任取 $y\in\overline{A^{\times}}$. 因为 x 为左右拓扑零因子，所以 yx 和 xy 分别左右拓扑零因子. 这样 yx 和 xy 都不可逆，它们只能在 $\partial A^{\times}$ 中.

练习 8 必要性：代数同态的核是理想. 现在 f 诱导了一个代数同构

$$\tilde{f}:A/\ker f\to\mathbb{C},[x]\to f(x).$$

因此 $A/\ker f$ 是单的代数，从而 $\ker f$ 是极大理想.

充分性：首先 f 诱导了一个线性同构 $\tilde{f}:A/\ker f\to\mathbb{C}$, 从而

$$\tilde{f}(a[1]b[1])=\tilde{f}(ab[1])=ab=\tilde{f}(a[1])\tilde{f}(b[1]).$$

因此 $\tilde{f}$ 是代数同构. 现在 $f=\tilde{f}\pi$, 从而 f 是代数同态.

练习 9 只证明必要性：记 $z=\varphi(e_1)$. 由于 e_1 以 e_{-1} 为逆元， $z\neq 0$ 且 $\varphi(e_{-1})=z^{-1}$. 由 $|z|\leqslant\|\varphi\|\|e_1\|=1$ 与 $|z^{-1}|\leqslant\|\varphi\|\|e_{-1}\|=1$ 得 $|z|=1$. 于是 $\varphi(e_n)=z^n$. 最后，注意到 $[a_n]=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}a_ne_n$ 与 φ 的连续性即可.

练习 10 只证明必要性: 恒命 $f_y(z)=f(z-y)$, 由 $f_y*g=f*g_y$ 得

$$\varphi(f_y)\varphi(g)=\varphi(f)\varphi(g_y).$$

在 $\varphi(g)\neq 0$ 时, 命 $\sigma(y)=\varphi(g_y)/\varphi(g)$, 得唯一复数 $\sigma(y)$ 恒使 $\varphi(f_y)=\varphi(f)\sigma(y)$. 当 $0<c<1$ 时, 取 g 使 $\|g\|_1=1$ 且 $|\varphi(g)|>c$. 于是 $|\sigma(y)|\leqslant 1/c$, 命 $c\to 1$ 得 $|\sigma(y)|\leqslant 1$.

由式子 $(g_y)_z=g_{y+z}$ 得 $\varphi(g)\sigma(y)\sigma(z)=\varphi(g)\sigma(y+z)$. 可见 $\sigma(y+z)=\sigma(y)\sigma(z)$. 因为 $\sigma(0)=1$, 所以 $\sigma(y)$ 不为零. 现在,

$$|\sigma(y)^{-1}|=|\sigma(-y)|\leqslant 1.$$

这表明 $|\sigma(y)|=1$, 从而 $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{T}$ 是同态. 现在

$$\lim_{y\to z}|\varphi(g_y)-\varphi(g_z)|_1\leqslant\lim_{y\to z}\|g_y-g_z\|_1=0,$$

因此 $\sigma:\mathbb{R}^n\to\mathbb{T}$ 是连续函数. 据复分析, 得唯一连续函数 $\theta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使 $\theta(0)=0$ 且 $\sigma(y)=\exp(-2\pi\theta(y)\sqrt{-1})$. 于是

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1}\theta(y+z))=\exp(-2\pi\sqrt{-1}\theta(y)-2\pi\sqrt{-1}\theta(z)).$$

可见, 有连续函数 $k:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{Z}$ 使 $\theta(y+z)=\theta(y)+\theta(z)+k(x,y)$. 因为 k 只能是常数函数, 所以 $k(y,z)=k(0,0)=0$. 据数学分析, 得 $x\in\mathbb{R}^n$ 恒使 $\theta(y)=x\cdot y$.

取本性有界函数 h 使 $\varphi(f)=\int hf$. 将 $\varphi(f*g)=\varphi(f)\varphi(g)$ 展开得

$$\int h(y)f(z)g(y-z)dzdy=\int h(z)f(z)dz\varphi(g).$$

由 f 的任意性得 $\int h(y)g(y-z)dy\doteq h(z)\varphi(g)$. 这即 $\varphi(g_z)\doteq h(z)\varphi(g)$. 于是

$$h(y)\doteq\sigma(y)=\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y).$$

总之, $\varphi(f)=\int f(x)\exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)dx$.

练习 11 只证明必要性: 仿练习 10, 当 $|y|=|z|=1$ 时, 命 $f_y(z)=f(zy)$, 由 $f_y*g=f*g_y$ 得 $\varphi(f_y)\varphi(g)=\varphi(f)\varphi(g_y)$. 在 $\varphi(g)\neq 0$ 时, 命 $\sigma(y)=\varphi(g_y)/\varphi(g)$, 得唯一复数 $\sigma(y)$ 恒使 $\varphi(f_y)=\varphi(f)\sigma(y)$. 当 $0<c<1$ 时, 取 g 使 $\|g\|_1=1$ 且 $|\varphi(g)|>c$. 于是 $|\sigma(y)|\leqslant 1/c$, 命 $c\to 1$ 得 $|\sigma(y)|\leqslant 1$.

由式子 $(g_y)_z=g_{yz}$ 得 $\varphi(g)\sigma(y)\sigma(z)=\varphi(g)\sigma(yz)$. 可见 $\sigma(yz)=\sigma(y)\sigma(z)$. 因为 $\sigma(1)=1$, 所以 $\sigma(y)$ 不为零. 现在,

$$|\sigma(y)^{-1}|=|\sigma(y^{-1})|\leqslant 1.$$

这表明 $|\sigma(y)|=1$, 从而 $\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ 是同态. 现在

$$\lim_{y\to z}|\varphi(g_y)-\varphi(g_z)|_1\leqslant\lim_{y\to z}\|g_y-g_z\|_1=0,$$

因此 $\sigma:T\to\mathbb{T}$ 是连续函数. 这样 $t\mapsto\sigma(\exp(-2\pi\sqrt{-1}t))$ 是 $\mathbb{R}\to\mathbb{T}$ 的连续同态, 据练习 10 得唯一实数 s 恒使 $\sigma(-2\pi\sqrt{-1}t)=\exp(-2\pi\sqrt{-1}st)$. 当 $t=1$ 时,

$$\exp(-2\pi\sqrt{-1}s)=\sigma(1)=1.$$

可见 s 是整数. 请读者完成证明的其余部分.

练习 12 提示: e_i 是第 i 项为 1 其他项为 0 的 n 维格点. 命 $z_i=\varphi(f_i)$, 其中 f_i 是在 e_i 取值为 1 其它地方取值为零的函数. 请读者完成证明的其余部分.

练习 13 只证明必要性: 对于 $f\in C(X)$, 以 $[f]$ 记 X 的闭集 $\{x|f(x)=\varphi(f)\}$. 任取 $C(X)$ 的有限子集 $\{f_1,\cdots,f_n\}$, 作 X 上非负连续函数

$$g=\sum_{i=1}^{n}(f_i-\varphi(f_i))\overline{f_i-\varphi(f_i)}.$$

因为 $\varphi(g)=0$, 从而 g 在 $C(X)$ 中不可逆, 这样 g 有零点. 注意到

$$[f_1]\cap\cdots\cap[f_n]=g^{-1}\{0\},$$

闭集簇 $\{[f]:f\in C(X)\}$ 具有有限交性质, 它们有个公共点 x.

于是 $f(x)=\varphi(f)$ 对所有 $f\in C(X)$ 成立. 如果 $x_0\neq x$, 则有 $f\in C(X)$ 使 $f(x_0)\neq f(x)$. 这样 $\varphi(f)\neq f(x_0)$.

练习 14 如果 x 可逆, 则 $0=x^{-1}xy=y$, 矛盾.

练习 15 (1)⇒(2): 任取 B 的理想 K, 则 $\pi^{-1}(K)$ 是 A 中包含 I 的理想. 于是 $\pi^{-1}(K)=I$ 或 $\pi^{-1}(K)=A$. 这即 $K=0$ 或 $K=B$.

(2)⇒(1): 任取 A 中包含 I 的理想 J, 则 $\pi(J)$ 是 B 中理想, 从而 $\pi(J)=0$ 或 $\pi(J)=B$, 得 $J=I$ 或 $J=A$.

练习 16 说明 $C_b(\mathbb{R})$ 上的范数使 $\|\overline{f}f\|=\|f\|^2$ 即可, 这源自

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|^2=(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|)^2.$$

练习 17 否则, $\overline{I}$ 是 A 的异于 I 的理想, 从而 $\overline{I}=A$. 于是有 $x\in I$ 使 $\|x-1\|<1$. 这样 x 在 A 中可逆, 从而 $1=xx^{-1}\in I$, 得 $A=I$. 矛盾.

练习 18 因为 $A/\ker f$ 与 $M_n(\mathbb{C})$ 同构, 所以 $A/\ker f$ 是单代数. 因此 $\ker f$ 是极大理想. 这样 $\ker f$ 是闭理想, 据 §6.1 练习 17 知 f 连续.

练习 19 当 $a, b \in l^1(\mathbb{N})$ 且 n 是负整数时, 由 $i + j = n$ 知 i 或 j 为负整数. 这样 $\sum\limits_{i+j=n} a_i b_i = 0$, 从而 a 与 b 的卷积在 $l^1(\mathbb{N})$ 中.

练习 20 提示 必要性: 命 $z = f(e_1)$ 即可.

练习 21 只验证乘法的结合律: 记 $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ 使 $\{x_i, y_i\} \subseteq A$.

先计算 $((x_1 + \sqrt{-1}y_1)(x_2 + \sqrt{-1}y_2))(x_3 + \sqrt{-1}y_3)$, 它是

$$\begin{aligned}
&((x_1x_2 - y_1y_2) + \sqrt{-1}(x_1y_2 + y_1x_2))(x_3 + \sqrt{-1}y_3) \\
=&((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3) \\
&+\sqrt{-1}((x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3) \\
=&(x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3) \\
&+\sqrt{-1}(x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3);
\end{aligned}$$

再计算 $(x_1 + \sqrt{-1}y_1)((x_2 + \sqrt{-1}y_2)(x_3 + \sqrt{-1}y_3))$, 它是

$$\begin{aligned}
&(x_1 + \sqrt{-1}y_1)((x_2x_3 - y_2y_3) + \sqrt{-1}(x_2y_3 + y_2x_3)) \\
=&(x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3)) \\
&+\sqrt{-1}(y_1(x_2x_3 - y_2y_3) + x_1(x_2y_3 + y_2x_3)) \\
=&(x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3) \\
&+\sqrt{-1}(y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3 + x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3).
\end{aligned}$$

比较上面两组式子得 $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$. 下设 λ 是复数: $\lambda = a + \sqrt{-1}b$.

先计算 $((a + \sqrt{-1}b)(x_1 + \sqrt{-1}y_1))(x_2 + \sqrt{-1}y_2)$, 它是

$$\begin{aligned}
&((ax_1 - by_1) + \sqrt{-1}(ay_1 + bx_1))(x_2 + \sqrt{-1}y_2) \\
=&((ax_1 - by_1)x_2 - (ay_1 + bx_1)y_2) \\
&+\sqrt{-1}((ax_1 - by_1)y_2 + (ay_1 + bx_1)x_2) \\
=&(ax_1x_2 - by_1x_2 - ay_1y_2 - bx_1y_2) \\
&+\sqrt{-1}(ax_1y_2 - by_1y_2 + ay_1x_2 + bx_1x_2);
\end{aligned}$$

再计算 $(a+\sqrt{-1}b)((x_1+\sqrt{-1}y_1)(x_2+\sqrt{-1}y_2))$, 它是

$$
\begin{aligned}
&(a+\sqrt{-1}b)((x_1x_2-y_1y_2)+\sqrt{-1}(y_1x_2+x_1y_2))\\
=&(a(x_1x_2-y_1y_2)-b(y_1x_2+x_1y_2))\\
&+\sqrt{-1}((b(x_1x_2-y_1y_2)+a(y_1x_2+x_1y_2))\\
=&(ax_1x_2-ay_1y_2-by_1x_2-bx_1y_2)\\
&+\sqrt{-1}(bx_1x_2-by_1y_2+ay_1x_2+ax_1y_2);
\end{aligned}
$$

然后计算 $(x_1+\sqrt{-1}y_1)((a+\sqrt{-1}b)(x_2+\sqrt{-1}y_2))$, 它是

$$
\begin{aligned}
&(x_1+\sqrt{-1}y_1)(ax_2-by_2+\sqrt{-1}(ay_2+bx_2))\\
=&(x_1(ax_2-by_2)-y_1(ay_2+bx_2))\\
&+\sqrt{-1}(y_1(ax_2-by_2)+x_1(ay_2+bx_2))\\
=&(ax_1x_2-bx_1y_2-ay_1y_2-by_1x_2)\\
&+\sqrt{-1}(ay_1x_2-by_1y_2+ax_1y_2+bx_1x_2).
\end{aligned}
$$

比较上面三组式子得 $(\lambda z_1)z_2=\lambda(z_1z_2)=z_1(\lambda z_2)$.

练习 22 (Bohr)⇒(Bochner): 记 $b=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant r}|f(x)|$. 任取 $y\in\mathbb{R}$ 和满足条件的 $s\in[-y,-y+r]$. 由 $0\leqslant y+s\leqslant r$ 知 $|f(y+s)|\leqslant b$. 由

$$f(y)=f_s(y)+f(y)-f_s(y)$$

知 $|f(y)|<b+\varepsilon$. 这即 f 有界. 现设 $0<\delta<1$ 使 $u,v\in[-1,1+r]$ 满足 $|u-v|<\delta$ 时, $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$. 设 $|x-y|<\delta$, 则

$$
\begin{aligned}
x+s\leqslant y+\delta+s<1+r,\\
x+s\geqslant y-\delta+s>-1.
\end{aligned}
$$

所以 $|f(x+s)-f(y+s)|<\varepsilon$. 由此得

$$|f(x)-f_s(x)+f_s(x)-f_s(y)+f_s(y)-f(y)|<3\varepsilon.$$

这即 f 一致连续. 可见当 $|x-y|<\delta$ 且 $t\in\mathbb{R}$ 时,

$$|f_t(x)-f_t(y)|=|f(x+t)-f(y+t)|<3\varepsilon.$$

这样 $Tf:=\{f_t|t\in\mathbb{R}\}$ 等度连续. 要证明它在 $C_b(\mathbb{R})$ 中有有限 3ε- 网.

限制在 $[0,r]$ 上后, 据 Arzelà-Ascoli 定理可取 $\mathbb{R}$ 的有限子集 F 使 $u\in\mathbb{R}$ 时有 $v\in F$ 满足条件: 若 $0\leqslant x\leqslant r$, 则 $|f_u(x)-f_v(x)|<0.9\varepsilon$. 命 y 和 s 同上. 因为 f_u 和 f_v 都是几乎周期函数且它们与 f 有同样的 r, 所以

$$|f_u(y)-f_u(y+s)-(f_v(y)-f_v(y+s))|<2\varepsilon.$$

因为 $0\leqslant y+s\leqslant r$, 这得 $|f_u(y)-f_v(y)|<2.9\varepsilon$. 于是 $\|f_u-f_v\|\leqslant 2.9\varepsilon$.

(另证明) 要说明 Tf 中任何序列 (g_k) 都有一致收敛的子列. 据 Arzelà-Ascoli 定理知 (g_k) 有子列 $(g_k)_{J_1}$ 在区间 $[-1,1]$ 上一致收敛, 后者有子列 $(g_k)_{J_2}$ 在 $[-2,2]$ 上一致收敛. 如此下去得可列集的递减序列 (J_n) 使 $(g_k)_{k\in J_n}$ 在 $[-n,n]$ 上一致收敛. 将 J_n 中自然数由小至大排列, 取 J_n 的第 n 项 k_n. 当 $n\geqslant l$ 时, $k_n\in J_n\subseteq J_l$. 作为 $(g_k)_{k\in J_l}$ 的子列, $(g_{k_n})_{n\geqslant l}$ 也在 $[-l,l]$ 上一致收敛. 记 $h_n=g_{k_n}$, 则 (g_k) 的子列 $(h_n)_{n\geqslant 1}$ 内闭一致收敛. 命 y 和 s 同上. 因为 h_n 都是几乎周期函数且它们与 f 有同样的 r, 所以

$$|h_n(y)-h_n(y+s)-(h_k(y)-h_k(y+s))|<2\varepsilon.$$

因为 $0\leqslant y+s\leqslant r$, 这得

$$|h_n(y)-h_k(y)|<2\varepsilon+\sup_{0\leqslant x\leqslant r}|h_n(x)-h_k(x)|.$$

于是 $\overline{\lim_{n,k\to\infty}}\|h_n-h_k\|\leqslant 2\varepsilon$. 命 $\varepsilon\to 0$ 知 $\lim_{n,k\to\infty}\|h_n-h_k\|=0$.

(Bochner)$\Rightarrow$(Bohr): 取 $\mathbb{R}$ 的有限子集 F 使 $\{f_t|t\in F\}$ 为 L 的 ε- 网. 命 $r=\max\{|t|:t\in F\}+1$. 当 $I=(a,a+2r)$ 时, 命 $u=a+r+1/2$. 取 $t\in F$ 使 $|f_u-f_t|<\varepsilon$, 即

$$|f(x+u-t)-f(x)|<\varepsilon: x\in\mathbb{R}.$$

因为 $u-t<a+2r$ 且 $u-t>a$, 命 $s=u-t$ 即可.

练习 23 当 a 和 b 是复数时, 命 $A(f,g)=af+bg$, 得一致连续映射 $A: C_b(\mathbb{R})\to C_b(\mathbb{R})$ 使 $T(af+bg)\subseteq A(Tf\times Tg)$, 从而当 $f,g\in\mathrm{AP}$ 时, $T(af+bg)$ 是列紧的. 这样 $af+bg$ 在 AP 中.

命 $B(f,g)=fg$, 得连续映射 $B: C_b(\mathbb{R})\times C_b(\mathbb{R})\to C_b(\mathbb{R})$ 使 $T(fg)\subseteq B(Tf\times Tg)$, 从而当 $f,g\in\mathrm{AP}$ 时, $T(fg)$ 是列紧集. 这样 fg 也在 AP 中. 明显知 $\bar{f}$ 在 AP 中, 从而 AP 是对合代数.

任取 $f_0\in C_b(\mathbb{R})$ 使对任何 $\varepsilon>0$ 有 $f\in\mathrm{AP}$ 满足 $\|f-f_0\|<\varepsilon$. 这样 Rf 是 Rf_0 的 ε- 网. 取 Rf 的有限 ε- 网 G, 则 G 是 Rf_0 的有限 2ε- 网, 从而 Rf_0 是预紧集. 这样 f_0 在 AP 中, 从而 AP 是完备的.

练习 24 只证明 (4). 必要性: 设 (b_n) 是 (a_n) 之逆: $(a_n)(b_n)=e_0$. 于是 $a_0b_0=1$. 这样 $a_0\neq 0$.

充分性: 要找复数列 (b_n) 使 $a_0b_0=1$ 而 $n\geqslant 1$ 时, $\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}=0$. 命 $b_0=1/a_0$, 设 $b_0,\cdots,b_n$ 已求出. 由 $a_0b_{n+1}+\sum\limits_{i=1}^{n+1}a_ib_{n+1-i}=0$ 得

$$b_{n+1}=-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{a_ib_{n+1-i}}{a_0}.$$

练习 25 命 $f(a_n)_{n=0}^{\infty}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. 按 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 与 $\mathbb{C}[[z]]$ 的代数运算的定义可知 f 是要求的同构.

§8.1 谱点与正则点

练习 1 (1) 设 B 也是对角算子而 (b_n) 为其对角线, 则

$$(cA+dB)(x_1,x_2,\cdots)=(ca_1x_1+db_1x_1,ca_2x_2+db_2x_2,\cdots),$$

于是 $cA+dB$ 也是对角算子, 其对角线是 (ca_n+db_n). 又

$$AB(x_1,x_2,\cdots)=(a_1b_1x_1,a_2b_2x_2,\cdots),$$

于是 AB 也是对角算子, 其对角线是 (a_nb_n). 据此可知 $AB=BA$.

(3) 必要性: 因为 $Ae_n=a_ne_n$, 所以 $a_n\neq 0$. 充分性: 命 B 是以 (a_n^{-1}) 为对角线的对角算子, 则 AB 和 BA 是以 $(1)_{n=1}^{\infty}$ 为对角线的对角算子. 据 (2) 知 $AB=BA=I$. 这样 A 可逆且其逆算子 B 也是对角算子.

(4) 因为 $\lambda I-A$ 是以 $(\lambda-a_n)$ 为对角线的对角算子, 据 (3) 知这个对角算子不可逆当且仅当其对角线性有零点当且仅当有个正整数 n 使 $\lambda=a_n$. 注意到 $Ae_n=a_ne_n$, 所以 a_n 都是 A 的特征值.

练习 2 命 $A_n(x_1,x_2,\cdots)=(a_1x_1,\cdots,a_nx_n,0,0,\cdots)$. 这得有界线性算子 $A_n:l^2\to l^2$ 使 $\|A_n\|=\max\limits_{i\leqslant n}|a_i|$. 因为 (A_n) 逐点逼近 A, 据 Banach-Steinhaus 定理知

$$\|A\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|A_n\|=\sup_{n\geqslant 1}|a_n|<+\infty.$$

注意到 $\|Ax\|_2\leqslant\sup\limits_{n\geqslant 1}|a_n|\|x\|_2$, 所以 $\|A\|=\sup\limits_{n\geqslant 1}|a_n|$.

(1) 和 (2) 的证明法同练习 1 的 (1) 和 (2).

(3) 必要性：因为 A 下有界，从而有常数 $c>0$ 使

$$|a_n| = \|a_n e_n\|_2 = \|Ae_n\|_2 \geqslant c\|e_n\|_2 = c.$$

充分性：命 B 是以 (a_n^{-1}) 为对角线的对角算子，据 (1) 和 (2) 和 $AB=BA=I$. 可见， A 可逆且其算子也是对角算子.

(4) 因为 $\lambda I - A$ 是以 $(\lambda - a_n)$ 为对角线的对角算子，据 (3) 知 $\lambda I - A$ 可逆当且仅当存在常数 $r>0$ 使 $|\lambda - a_n| \geqslant r$ 恒成立. 于是

$$\sigma(A) = \{\lambda|\forall r>0\exists n : |\lambda - a_n| < r\} = \overline{\{a_n|n\geqslant 1\}}.$$

现设 λ 是 A 的特征值，则有非零向量 $x \in l^2$ 使 $Ax=\lambda x$. 此即 $a_n x_n = \lambda x_n$ 恒成立. 取 n 使 $x_n \neq 0$, 则 $\lambda = a_n$. 反之，注意到 $Ae_n = a_n e_n$ 知 $a_n : n \geqslant 1$ 恰是 A 所有特征值.

练习 3 仿练习 2.

练习 4 (1) 是 (2) 的推论. (4) 是 (3) 的推论. (2) 命 $U=(g>h)$, 则

$$U = \bigcup\{(h<b)\cap(b<g)|b\in\mathbb{R}\}.$$

因此 U 是 X 的相对开集. 若 U 不空，则有 $r>0$ 使 $O(x,r)\subseteq U$. 从而 $\mathbf{m}(U)>0$, 与 $g\leqslant h$ 矛盾.

(3) 任取 $x_0 \in X$, 对任何 $\varepsilon>0$, 有 $\delta>0$ 使 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 于是 $O(x_0,\delta)\subseteq(|f-f(x_0)|<\varepsilon)$, 从而 $\mathbf{m}(|f-f(x_0)|<\varepsilon)>0$. 因此 $f(x_0)$ 在 f 的本性值域中，这得 $\overline{\operatorname{ran} f}\subseteq \operatorname{essran} f$.

现设 z_0 不在 $\overline{\operatorname{ran} f}$ 中，则有 $r>0$ 使 $O(z_0,r)$ 与 $f(X)$ 不交，这样 $(|f-z_0|<r)$ 是空集，从而 z_0 不在 f 的本性值域中. 可见 $\overline{\operatorname{ran} f}^{\mathrm{c}} \subseteq (\operatorname{essran} f)^{\mathrm{c}}$.

练习 5 提示：谱点都是 φ 的值，而特征值是这样的复数 λ, 它使 $\mathbf{m}(\varphi=\lambda)>0$.

练习 6 设非零向量 x 与数 λ 使 $Ax=\lambda x$, 则 $x_{n+1}=\lambda x_n$. 归纳地有 $x_n = \lambda^{n-1}x_1$. 这样 x_1 非零且由 $\sum\limits_n |\lambda^{n-1}x_1|^2 < +\infty$ 知 $|\lambda|<1$, 从而 λ 为 A 的特征值当且仅当 $|\lambda|<1$. 这得 $\{\lambda : |\lambda|<1\}\subseteq\sigma(A)$. 据 $\|A\|=1$ 得 $\subseteq\{\lambda:|\lambda|\leqslant 1\}$. 据 Gelfand 定理, $\sigma(A)$ 是紧集. 因此 $\sigma(A)=\{\lambda:|\lambda|\leqslant 1\}$.

练习 7 如果 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$, 则将 $A,\cdots,A^{n-1}$ 依次作用其上得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_2 \\ \vdots \\ a_nx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

上式左边方阵可逆. 因此每个 $a_ix_i=0$. 这表明每个 $a_i=0$.

练习 8 提示: 取 $\mathbb{T}$ 上规范化弧长测度 $(dz)_1$. 当 $f \in L^2(\mathbb{T})$ 时, 命

$$Uf = (\int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{z^n}(dz)_1)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

说明 $U : L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{Z})$ 是酉算子且 U^*SU 是乘法算子 m_z.

练习 9 只证明必要性: 为求 $\lambda - yx$ 的逆元, 作形式演算 (过程不必为真):

$$\frac{1}{\lambda - yx} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(yx)^n}{\lambda^n} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y(xy)^n x}{\lambda^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{\lambda}y(1 - \frac{xy}{\lambda})^{-1}x\right) = \frac{1}{\lambda} + \frac{y}{\lambda}\frac{1}{\lambda - xy}x.$$

上式最后一项记为 z, 说明 z 确是 $\lambda - yx$ 的逆元即可.

练习 10 如 §6.2 例 5 中 $S_{\pm}$ 满足 $S_+S_- = I$ 而 S_-S_+ 是向 $\overline{\operatorname{span}}\{e_n|n \geqslant 2\}$ 的投影算子. 于是 0 为 S_+S_- 的正则点, 但为 S_-S_+ 的谱点.

练习 11 否则, $yx = xy - 1$. 复数 λ 使 $\lambda - yx$ 不可逆当且仅当 $(\lambda + 1) - xy$ 不可逆. 这样有 $\sigma(xy) = \sigma(yx) + 1$. 取定 yx 的一个谱点 c.

若无正整数 n 使 $c + n = 0$, 则 $c + 1$ 是 xy 的谱点, 因而也是 yx 的谱点 (见练习 9). 这样 $c + 2$ 也是 xy 与 yx 的谱点. 如此下去, 所有正整数 n 都使 $c+n$ 是 xy 与 yx 的谱点. 这与 Gelfand 定理矛盾. 若有正整数 k 使 $c+k = 0$, 则 $-k$ 是 yx 的谱点, 因而也是 xy 的谱点. 这样 $-k - 1$ 是 yx 的谱点, 它也是 xy 的谱点. 如此下去, 所有正整数 n 都使 $-k - n$ 是 yx 的谱点. 这同样是矛盾.

练习 12 首先由 $(AB)^* = AB$ 得 $B^*A = AB$. 其次证明不等式:

$$|\langle ABx, x\rangle|^{2^n} \leqslant \langle AB^{2^n}x, x\rangle\langle Ax, x\rangle^{2^n-1} : n = 0, 1, \cdots.$$

上式在 $n = 0$ 时成立. 设 n 时上式成立, 则

$$|\langle ABx, x\rangle|^{2^{n+1}} \leqslant |\langle AB^{2n}x, x\rangle\langle Ax, x\rangle^{2^n-1}|^2$$
$$\leqslant\langle AB^{2^n}x, B^{2^n}x\rangle\langle Ax, x\rangle\langle Ax, x\rangle^{2^{n+1}-2}$$
$$\leqslant\langle B^{*2^n}AB^{2^n}x, x\rangle\langle Ax, x\rangle^{2^{n+1}-1}$$
$$=\langle AB^{2^{n+1}}x, x\rangle\langle Ax, x\rangle^{2^{n+1}-1},$$

上面第二不等式源自对正算子 A 用 Schwarz 不等式. 对下式取极限即可:

$$|\langle ABx, x\rangle| \leqslant (\|A\|^{2^n}\|B^{2^n}\|\|x\|^2\langle Ax, x\rangle^{2^n-1})^{\frac{1}{2^n}}.$$

练习 13 命 $S_n = \{x \in \sigma^{-1}(V) : \|x\| < n\}$, 则 $\sigma^{-1}(V) = \bigcup_{n\geqslant 1} S_n$. 说明每个 S_n 是开集即可. 命 $f(\lambda, x) = \lambda - x$, 这得连续函数 $f : \mathbb{C} \times A \to A$ 使 $\rho(x)$ 为 $f^{-1}(A^\times)$ 在 x 处的截口 $f^{-1}(A^\times)^x$. 作复平面上紧集

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant n\},$$

则任何 $(A)_n := \{x \in A : \|x\| < n\}$ 中任何元素 x 满足 $\sigma(x) \subseteq \Lambda$. 于是

$$S_n = \{x \in (A)_n | \forall\lambda \in \Lambda \setminus V : (x, \lambda) \in f^{-1}(A^\times)^x\}.$$

这即 $S_n = \forall_{\Lambda\setminus V} f^{-1}(A^\times)$. 据 §5.4 练习 16 知 S_n 是 A 的开集.

练习 14 任取 $x \in A$ 和任意 $b > r(x)$, 据练习 13 知有 x 的开邻域 V 使 $y \in V$ 时, $\sigma(y) \subseteq (\mathbb{C})_b$. 这样 $r(y) < b$. 换言之, $x \in V \subseteq (r < b)$. 于是 $(r < b)$ 是开集, 从而 r 上半连续.

练习 15 任取 $y \in \partial A^\times$ 及 $\varepsilon > 0$, 取 $x \in A^\times$ 使 $\|x - y\| < \varepsilon$. 于是

$$\|x\| \leqslant c\|xx^{-1}\|/\|x^{-1}\| \leqslant cd(x, \partial A^\times) < c\varepsilon.$$

从而 $\|y\| < (1 + c)\varepsilon$. 命 $\varepsilon \to 0$ 得 $y = 0$, 于是 $\overline{A^\times} = A^\times \cup \{0\}$. 因为

$$A \setminus \{0\} = A^\times \sqcup (A \setminus \overline{A^\times})$$

且 $A \setminus \{0\}$ 连通, 所以 $A \setminus \overline{A^\times}$ 是空集. 换言之, $A = A^\times \cup \{0\}$. 此即 A 中非零元都可逆. 最后应用 Gelfand-Mazur 定理即可.

练习 16 设 $zf(z) = \lambda f(z)$, 则 $(z - \lambda)f(z) = 0$. 这样 $z \neq \lambda$ 时, $f(z) = 0$. 因为 $\mathbb{D} \setminus \{z\}$ 在 D 中稠密, 从而 $f = 0$.

练习 17 说明 f 的本性值域是单点集即可. 命

$$E_0 = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq f(x + r)\}.$$

这是一列 Lebesgue 零集之并. 于是 E_0 是 Lebesgue 零集, 其补集记为 E, 则

$$E = \bigcap_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R} | f(x) = f(x + r)\}.$$

可见 E 是有理平移不变的: $r \in \mathbb{Q}$ 时, $E + r = E$.

任取 $\mathbb{C}$ 中 Borel 集 F. 当 $-\infty < a < b + \infty$ 时, 记

$$H(a, b) = (a, b) \cap E \cap f^{-1}(F),$$

其 Lebesgue 测度记为 $l(a,b)$, 则 $l(a,b)+l(b,c)=l(a,c)$. 现在

$$|l(a_1,b_1)-l(a_2,b_2)|\leqslant|a_1-a_2|+|b_1-b_2|,$$

可见 l 是连续函数. 下面证明 l 的平移不变性: r 是实数时

$$l(a+r,b+r)=l(a,b).$$

据 l 的连续性和有理数集的稠密性可设 r 是有理数, 此时

$$\begin{aligned}l(a+r,b+r)&=\mathbf{m}(\{x\in(a+r,b+r)\cap E|f(x)\in F\})\\&=\mathbf{m}(\{x\in(a,b)\cap(E-r)+r|f(x)\in F\})\\&=\mathbf{m}(\{y\in(a,b)\cap(E-r)|f(y+r)\in F\}+r)\\&=\mathbf{m}(\{y\in(a,b)\cap E|f(y)\in F\})=l(a,b).\end{aligned}$$

因为 $H(0,b_1+b_2)$ 与 $H(0,b_1)\sqcup H(b_1,b_1+b_2)$ 至多差一个点 b, 所以

$$\begin{aligned}l(0,b_1+b_2)&=l(0,b_1)+l(b_1,b_1+b_2)\\&=l(0,b_1)+l(0,b_2).\end{aligned}$$

上面第二等式源自 l 的平移不变性. 据 l 的连续性知有常数 c 使 $0\leqslant c\leqslant 1$ 且 $l(0,x)=cx$, 从而 $l(a,b)=c(b-a)$.

现说明 $c=0$ 或 $c=1$. 若 $c\neq 0$, 对任何 $\varepsilon>0$, 取包含 $H(0,1)$ 的开集 V 使 $\mathbf{m}(V)<\mathbf{m}(H(0,1))+\varepsilon$. 以 $V\cap(0,1)$ 代替 V 可设 $V\subseteq(0,1)$. 将 V 的构成区间写成 $(a_i,b_i):i\in J$, 则

$$H(0,1)=\bigsqcup_{i\in J}(H(0,1)\cap(a_i,b_i))=\bigsqcup_{i\in J}H(a_i,b_i).$$

于是 $l(0,1)=\sum\limits_{i\in J}l(a_i,b_i)$. 此即 $\mathbf{c}=\sum\limits_{i\in J}\mathbf{c}(b_i-a_i)$. 这样 $\sum(b_i-a_i)=\mathbf{1}$. 换言之, $\mathbf{m}(V)=\mathbf{1}$, 从而 $c+\varepsilon>1$. 命 $\varepsilon\to 0$ 得 $c\geqslant 1$. 于是 $c=\mathbf{1}$.

在 $c=0$ 时, $H(a,b)$ 关于 (a,b) 都是零集. 又 $(H(-n,n))_{n=1}^{\infty}$ 递增至 $E\cap f^{-1}(F)$. 这样 $f^{-1}(F)$ 是零集. 在 $c=1$ 时,

$$(-n,n)\cap E\cap f^{-1}(\mathbb{C}\setminus F)=(-n,n)\setminus H(-n,n).$$

上式右端是零集. 命 $n\to\infty$ 知 $f^{-1}(\mathbb{C}\setminus F)$ 是零集.

取 f 的本性值域 $\operatorname{essran} f$ 中一点 z_0. 任取正整数 n, 则 $(|f-z_0|<1/n)$ 非零集, 它的余集 $(|f-z_0|\geqslant 1/n)$ 便是零集. 因为

$$(f\neq z_0)=\bigcup\{(|f-z_0|\geqslant 1/n)|n\in\mathbb{N}\},$$

所以 $(f\neq z_0)$ 是零集. 换言之, f 几乎处处等于 z_0(可见 $\operatorname{essran} f=\{z_0\}$).

练习 18 充分性: 将 A^* 的特征向量 z 的全体记为 E, 设复数 $\overline{\varphi(z)}$ 使 $A^*z = \overline{\varphi(z)}z$. 对于 $x \in H$, 命 $(Bx)(z) = \langle x, z\rangle$. 这得函数 $Bx : E \to \mathbb{C}$. 如果 $Bx = 0$, 则 $x \perp E$, 从而 $x = 0$. 于是 $B : X \to \mathbb{C}^E$ 是单线性算子.

命 $Y = B(X)$ 并定义 $\langle Bx, Bx_1\rangle = \langle x, x_1\rangle$. 这使 Y 成为一个 Hilbert 空间 (其中向量是 E 上的函数), 而 $B : X \to Y$ 为酉算子. 又 E 上赋值泛函

$$Bx \mapsto (Bx)(z) = \langle x, z\rangle = \langle Bx, Bz\rangle$$

是连续的, 所以 Y 是函数 Hilbert 空间. 命 $f = Bx$, 则

$$\begin{aligned}(BAB^*f)(z) &= (BAx)(z) = \langle Ax, z\rangle \\ &= \langle x, \overline{\varphi(z)}z\rangle = \varphi(z)\langle x, z\rangle = \varphi(z)f(z).\end{aligned}$$

可见 A 酉等价于 F 上以 φ 为乘子的乘法算子.

必要性: 可设 X 是 M 上函数 Hilbert 空间而 A 以 φ 为乘子. 于是

$$\langle Af, K_x\rangle = (Af)(x) = \varphi(x)f(x) = \varphi(x)\langle f, K_x\rangle.$$

这表明 $A^*K_x = \overline{\varphi(x)}K_x$, 从而 $\overline{\varphi(x)}$ 为 A^* 的特征值而 K_x 是其一个特征向量. 最后注意到 $X = \overline{\mathrm{span}}\{K_x | x \in M\}$ 即可.

练习 19 总有 $\mathbf{m}(|f - z| < r) = 0$, 从而 $\mathrm{essran}\, f = \varnothing$.

练习 20 据练习 9, xy 和 yx 的非零谱点都一样. 这样 $r(xy) = r(yx)$. 在 x 和 y 交换时, 取 A 的闭子代数 B 使 B 有以下生成集:

$$\{x, y, (a - x)^{-1}, (b - y)^{-1}, (c - x - y)^{-1} | a \in \rho(x); b \in \rho(y); c \in \rho(x + y)\}.$$

这样 B 交换且 x, y 和 $x + y$ 关于 B 的谱与关于 A 的谱一致.

当 f 取遍 B 的特征时, $f(x + y)$ 取遍 $x + y$ 的谱点. 由

$$|f(x + y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)|$$

知 $r(x + y) \leqslant r(x) + r(y)$.

练习 21 据定理 3 和 §7.5 练习 20 知 $\sigma(a) = \mathrm{ran}\, f$. 因此 a 可逆当且仅当 f 无零点. 此时命 $b = a^{-1}$ 且 $g(z) = \sum\limits_{n \geqslant 0} b_n z^n$, 则 $fg = 1$. 于是 $1/f = g$.

练习 22 将 λ 的 n 次方根依次记为 $z_1, \cdots, z_n$. 于是

$$\lambda I - A = (z_1 I - A) \cdots (z_n I - A).$$

如果 $z_j I - A$ 都是单射, 则 $\lambda I - A$ 是单射. 矛盾. 这样必有个 j 使 $z_j I - A$ 非单射, 从而 z_j 是 A 的特征值.

练习 23 $f(Ax) = \lambda f(x)$ 与 $(A^*f)(x) = \mu f(x)$ 一样, 得 $f(x) = 0$.

练习 24 $\langle Ax, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ 与 $\langle x, A^*y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$ 一样, 得 $\langle x, y\rangle = 0$.

§8.2 紧算子与 Fredholm 算子

练习 1 必要性：命 $c=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|Ax_n\|$, 两次取子列后可设 $c=\lim\limits_{n\to\infty}\|Ax_n\|$ 且 (Ax_n) 强逼近某个 y. 当 $g\in Y^*$ 时, $g(y)=\lim(gA)(x_n)=0$. 因此 $y=0$, 可见 $c=0$.

充分性：任取 X 中有界序列 (x_n), 它有子列 (x_{k_n}) 弱逼近某 $x\in X$. 因此 $(x_{k_n}-x)$ 弱逼近 0. 这样 $\lim\|Ax_{k_n}-Ax\|=0$.

练习 2 充分性：由 $(a_1,\cdots,a_n,0,0,\cdots)$ 确定的对角算子 A_n 是有限秩的. 由于 $A-A_n$ 的对角线是 $(0,\cdots,0,a_{n+1},\cdots)$. 据 §8.1 练习 2 得 $\|A-A_n\|=\sup\limits_{i>n}|a_i|$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\|A-A_n\|=0$. 这样 A 是紧算子.

必要性：因为 (e_n) 弱逼近 0, 所以 $\lim\|Ae_n\|_2=0$. 此即 $\lim|a_n|=0$. 另法：若 $\overline{\lim}|a_n|>0$, 则有下有界的子列 (a_{k_n}). 命 $X=\overline{\mathrm{span}}\{e_{k_n}|n\in\mathbb{N}\}$. 这是 l^2 的无限维闭线性子空间使限制 $(A:X\to X)$ 是拓扑同构, 从而 X 的单位球是列紧的. 矛盾.

练习 3 用 §6.5 练习 11 的有关符号, 记 $c=\sup\limits_{n\geqslant1}\|P_n\|$. 对任何 $\varepsilon>0$, 要找个有限秩算子 F 使 $\|F-A\|<\varepsilon$. 取 $A(X)_1$ 的有限 r- 网 E, 其中 $r=\varepsilon/(3c+3)$. 因为 E 是有限集, 取正整数 n 使 $y\in E$ 时, $\|y-P_ny\|<\varepsilon/3$. 当 $\|x\|<1$ 时, 取 $y\in E$ 使 $\|Tx-y\|<r$. 等式

$$Ax-P_nAx=Ax-y+y-P_ny+P_n(y-Tx)$$

表明 $\|Ax-P_nAx\|<\varepsilon$. 于是 $\|A-P_nA\|\leqslant\varepsilon$. 命 $F=P_nA$ 即可.

练习 4 记 $h(x)=(\int\limits_Y|K(x,y)|^q\nu(dy))^{\frac1q}$. 据 Hölder 不等式得

$$|(Kf)(x)|\leqslant(\int\limits_Y|K(x,y)|^q\nu(dy))^{\frac1q}\|f\|_p=|h(x)|\|f\|_p.$$

据条件知 $\|Kf\|_p\leqslant\|h\|_p\|f\|_p$. 这样 Kf 是 p- 方可积的且 K 有界.

说明 $L^p(Y)$ 中弱收敛于 0 的序列 (f_n) 的像 (Kf_n) 强收敛于 0 即可. 取常数 a 恒使 $\|f_n\|_p\leqslant a$, 取 X 的零集 E 使 $x\in X\setminus E$ 时,

$$\int\limits_Y|K(x,y)|^q\nu(dy)<+\infty.$$

对此种 x 按弱收敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}(Kf_n)(x)=0$. 因此 Kf_n 几乎处处收敛于 0. 又 $|Kf_n|\leqslant a|h|$, 据控制收敛定理知 $\lim\|Kf_n\|_p=0$.

练习 5 因为 $\ker(\lambda I - A)$ 是有限维的，它对 x 有最佳逼近 z. 命 $x' = x - z$, 则 $x' \in [x]$ 且 $\|x'\| = d(x, \ker(\lambda I - A)) = \|[x]\|$.

练习 6 由条件和紧算子的 Riesz-Schauder 理论知 1 是 T 的正则点. 这样 $I-T$ 可逆. 于是 $(I-T)^{-1}y$ 是方程 $x - Tx = y$ 的唯一解.

练习 7 提示: 否则，取其非零特征值 λ, 它对应的特征子空间形如 $L^2(E)$, 其中 E 非 Lebesgue 零集. 但 $L^2(E)$ 非有限维的. 矛盾.

练习 8 据 §7.3 练习 4(1) 知 $\{\sin n\pi \cdot | n \geqslant 1\}$ 是 $L^2[0,\pi]$ 的直交基. 现在

$$(A\sin(n\pi\cdot))(x) = \int_0^1 K(x,y)\sin n\pi y dy$$

$$= \int_0^x (1-x)y\sin n\pi y dy + \int_x^1 (1-y)x\sin n\pi y dy$$

$$= \int_0^x (1-x)y\frac{d\cos n\pi y}{-n\pi} + \int_x^1 (1-y)x\frac{d\cos n\pi y}{-n\pi}$$

$$= \frac{(1-x)y\cos n\pi y}{-n\pi}\Big|_{y=0}^{y=x} + \int_0^x \frac{(1-x)\cos n\pi y}{n\pi}dy$$

$$+ \frac{(1-y)x\cos n\pi y}{-n\pi}\Big|_{y=x}^{y=1} - \int_x^1 \frac{x\cos n\pi y}{n\pi}dy$$

$$= \frac{(1-x)\sin n\pi y}{(n\pi)^2}\Big|_{y=0}^{y=x} - \frac{x\sin n\pi y}{(n\pi)^2}\Big|_{y=0}^{y=x} = \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2},$$

从而 A 相应于直交基 $\{\sin n\pi \cdot | n \geqslant 1\}$ 可对角化，其对角线 $((n\pi)^{-2})_{n=1}^{\infty}$ 以 0 为聚点. 其余结论源自 §8.1 练习 2 与本节练习 2.

练习 9 命 $\gamma = \beta - \alpha$. 任取 $C^{0,\beta}[0,1]$ 中有界序列 (f_n), 不等式

$$|f_n(x) - f_n(z)| \leqslant \|f_n\|_{0,\beta}|x-z|$$

表明 (f_n) 是等度连续的. 据 Arzelà-Ascoli 定理，取子列后可设 (f_n) 一致收敛，其极限 f 是连续函数. 因为 $\alpha = \beta - \gamma$, 当 $t > 0$ 时,

$$\frac{|f_n(x) - f_k(x) - f_n(z) - f_k(z)|}{|x-z|^{\beta-\gamma}}$$
$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{\|f_n - f_k\|}{t^{\alpha}} : |x-z| \geqslant t, \\ \|f_n - f_k\|_{0,\beta}t^{\gamma} : |x-z| < t. \end{cases}$$

命 $c=\sup\limits_{n\geqslant 1}\|f_n\|_{0,\beta}$. 在上式中命 $k\to\infty$ 而得

$$\frac{|f_n(x)-f(x)-f_n(z)-f(z)|}{|x-z|^{\beta-\gamma}} \leqslant \begin{cases} \dfrac{\|f_n-f\|}{t^\alpha}: & |x-z|\geqslant t, \\ 2ct^\gamma: & |x-z|<t. \end{cases}$$

这得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|f_n-f\|_{0,\alpha}\leqslant 2ct^\gamma$. 命 $t\to 0$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{0,\alpha}=0$. 于是

$$f=(f-f_n)+f_n\in C^{0,\alpha}[a,b].$$

可见, $C^{0,\beta}[0,1]$ 中有界序列 (f_n) 都使 (Af_n) 在 $C[a,b]$ 中有收敛子列而 (Bf_n) 在 $C^{0,\beta}[0,1]$ 中有收敛子列. 于是 A 和 B 都是紧算子.

练习 10 命 $c=\|T_1\|\vee\|T_2\|$. 当 $x=(x_1,x_2)$ 时,

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\|T_1x_1\|+\|T_2x_2\|\\ &\leqslant\|T_1\|\|x_1\|+\|T_2\|\|x_2\|\\ &\leqslant c(\|x_1\|+\|x_2\|)=c\|x\|.\end{aligned}$$

可见 $\|T\|\leqslant c$. 反之, $\|T_1x_1\|=\|T(x_1,0)\|\leqslant\|T\|\|x_1\|$ 表明 $\|T_1\|\leqslant\|T\|$. 同样 $\|T_2\|\leqslant\|T\|$. 可见, $c\leqslant\|T\|$. 总之, $\|T\|=c$.

命 $J_1x_1=(x_1,0)$ 和 $P_1(y_1,y_2)=y_1$, 这得等距算子 $J_1:X_1\to X$ 和有界投影算子 $P_1:Y\to Y_1$ 使 $T_1=P_1TJ_1$. 如果 T 是紧算子, 则 T_1 是紧算子. 同样 T_2 是紧算子. 反之, 当 T_1 和 T_2 都是紧算子时, 以 B_i 和 B 分别记 X_i 和 X 的单位球, 则 $B\subseteq B_1\times B_2$. 于是 $T(B)\subseteq T_1(B_1)\times T_2(B_2)$, 这笛卡儿积是列紧集, 从而 $T(B)$ 是列紧集.

练习 11 命 $B^{-1}:\operatorname{ran}B\to W$ 为 B 的逆算子. 命 $C=B^{-1}A$, 这得线性算子 $C:X\to W$ 使 $A=BC$. 因为 $w=Cx$ 当且仅当 $Bw=Ax$, 所以

$$\operatorname{gr}C=\{(x,w)\in X\times W|Ax=Bw\}.$$

这是 $X\times W$ 的闭线性子空间. 据闭图像定理知 C 是有界线性算子.

练习 12 在 B 为单射时, 命 C 同练习 11. 于是 A 是紧算子. 一般地, 取有界单线性算子 $\tilde{B}:\tilde{W}\to Y$ 使 $B=\tilde{B}\pi$, 其中 : $\tilde{W}=W/\ker B$ 而 $\pi:W\to\tilde{W}$ 是自然投影. 因为 $\tilde{B}(\tilde{W})_1=B(W)_1$ 是列紧集, 所以 $\tilde{B}$ 是紧算子. 最后注意到 $\operatorname{ran}\tilde{B}=\operatorname{ran}B$, 结论归为 B 为单射情形.

练习 13 任取 X 中弱逼近 0 的序列 (x_n). 据 §6.3 练习 1, 说明 (Ax_n) 弱逼近 0 即可: 当 $g \in (l^1)^*$ 时, $g(Ax_n) = (A^*g)(x_n)$, 其极限为 0.

练习 14 因为 $\ker A$ 是常数函数组成的一维线性空间, 所以 $\dim\ker A = 1$. 对任何 $g \in C[0,1]$, 命 f 是 g 的一个不定积分 (如 $f(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$), 则 $Af = g$. 这样 $\operatorname{ran} A$ 是满射, 从而 $\dim\operatorname{cok} A = 0$. 这样 $\operatorname{ind} A = 1 - 0 = 1$.

练习 15 显然 $A^{**} : X \to Y^{**}$ 是 Fredholm 算子, 它是 $A : X \to Y$ 的延拓. 于是 $\ker A = \ker A^{**}$ 是有限维的. 又由 $\operatorname{ran} A = \operatorname{ran} A^{**}$ 得 $\operatorname{cok} A \subseteq \operatorname{cok} A^{**}$ 是有限维的. 这样 A 是 Fredholm 算子.

练习 16 命 $A_n : l^2 \to l^2$ 是形如 §7.2 练习 1 的这样一个线性算子: 其对应矩阵的前 n 行与 A 的对应行一样而其余行都为 0. 于是 $A - A_n$ 是这样一个线性算子: 其对应矩阵的前 n 行都是 0 而其他行与 A 的对应行一样. 据 §7.1 练习 1(3) 知, $\|A - A_n\|^2 \leqslant \sum\limits_{i>n, j\geqslant 1} |a_{ij}|^2$. 这样 $\lim A_n = A$. 因为 A_n 都是有限秩算子, 所以 A 是紧算子.

练习 17 任取 $x_0 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 取 X 的有限子集 F 使 $A^*(F)$ 是 $A^*(X)$ 的 ε- 网. 对任何 $x \in X$, 取个 $z_0 \in F$ 使 $\|A^*x - A^*z\| < \varepsilon$. 现在

$$\begin{aligned}|\langle x - x_0, A^*x\rangle| &\leqslant |\langle x - x_0, A^*x - A^*z_0\rangle| + |\langle x - x_0, Az_0\rangle| \\ &\leqslant \varepsilon\|x - x_0\| + \sum_{z\in F} |\langle x - x_0, Az\rangle|.\end{aligned}$$

可见当 x 弱逼近 x_0 时, $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} |\langle Ax - Ax_0, x\rangle| \leqslant \varepsilon$. 现在

$$\begin{aligned}&|\langle Ax, x\rangle - \langle Ax_0, x_0\rangle| = |\langle Ax - Ax_0, x\rangle + \langle Ax_0, x - x_0\rangle| \\ \leqslant&|\langle Ax - Ax_0, x\rangle| + |\langle Ax_0, x - x_0\rangle|.\end{aligned}$$

这得 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$. 因此 f 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性知 f 连续.

练习 18 取 $A(X)$ 在 Y 中的代数补子空间 Y_0, 即 $Y = \ker B \oplus Y_0$. 于是

$$\begin{aligned}\dim Y &= \dim\ker B + \dim Y_0 \\ &= \dim\operatorname{ran} A + \dim Y_0 \\ &= \dim X + \dim Y_0.\end{aligned}$$

说明 Y_0 与 Z 同构即可. 为此作限制 $B_0 = (B : Y_0 \to Z)$, 则

$$Z = B(Y) = BAX + BY_0 = 0 + B_0Y_0.$$

因此 B_0 是满射. 现证明 B_0 为单射. 设 $B_0y = 0$, 则 $y \in Y_0 \cap \ker B$. 从而 $y = 0$. 这样 $B_0 : Y_0 \to Z$ 是同构.

练习 19 (1)⇔(3): 注意到 A 是单射当且仅当 $\dim\ker A = 0$, 而 A 是满射当且仅当 $\dim\operatorname{cok} A = 0$, 并注意到 $\dim\ker A = \dim\operatorname{cok} A$ 即可.

(2)⇒(1): 设 $Ax = 0$. 于是 $x = BAx = 0$. 这样 A 是单射.

(4)⇒(3): $Y = AB(Y) \subseteq A(X)$, 所以 A 是满射.

(1)+(3)⇒(2)+(4): 显然的. 因此 (1)⇒(2) 且 (3)⇒(4).

练习 20 提示: 命 $A_0[x] = Ax$, 得可逆有界线性算子 $A_0 : X/\ker A \to \operatorname{ran} A$ 使 $\|A_0[x]\| \geqslant b\|[x]\|$, 这即 $\|Ax\| \geqslant bd(x, \ker A)$. 用逆算子定理证 (1)⇒(3).

(1)+(3)⇒(2): 说明 A_0 是拓扑同构. 命 $J : \operatorname{ran} A \to Y$ 是包含映射, 显然 $A = JA_0\pi$. 因为 $J^* : Y^* \to (\operatorname{ran} A)^*$ 是满射, 这得以下第一等式

$$(\ker A)^\perp = \pi^*(X/\ker A)^* = \pi^* A_0^* J^*(Y^*) = A^*(Y^*).$$

最后, ${}^\perp(\ker A^*) = {}^\perp((\operatorname{ran} A)^\perp) = \operatorname{ran} A$.

练习 21 明显 $\ker\eta = \operatorname{ran}(0 : 0 \to \ker A)$ 且 $\operatorname{ran}\pi = \ker(0 : \operatorname{cok} A \to 0)$. 因为 $Ax = 0$ 当且仅当 $x \in \ker A$ 当且仅当存在 $y \in \ker A$ 使 $\eta(y) = x$, 所以 $\ker A = \operatorname{ran}\eta$. 因为 $\pi(y) = 0$ 当且仅当 $y \in \operatorname{ran} A$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使 $Ax = y$, 所以 $\ker\pi = \operatorname{ran} A$. 总之, 所讨论的序列是正合的.

练习 22 (1)⇒(2): 作 X 的闭线性子空间 $X_0 = \ker B$ 和包含映射 $J : X_0 \to X$. 作 A 的限制 $A_0 = (A : L \to X_0)$, 则 A_0 可逆且 $A = JA_0$. 据逆算子定理知 A_0 是拓扑同构. 据此可设 $X_0 = L$ 而 A 是包含映射.

作诱导算子 $B_0 : X/L \to Y$ 使 $B = B_0\pi$, 其中 $\pi : X \to X/L$ 是自然投影. 据逆算子定理知 B_0 是拓扑同构, 因此可设 $Y = X/L$ 而 B 是自然投影.

任取 $g \in L^*$, 则 g 有保范延拓 $f \in X^*$. 这样

$$(A^*f)(x) = fA(x) = g(x), x \in L.$$

因此 A^* 是满射, 即 $\operatorname{ran} A^* = L^*$. 任取 $f \in \ker A^*$, 则 $f(L) = fA(L) = 0$, 从而 f 诱导了一个 $g \in Y^*$ 使 $f = gB$. 这样 $f = B^*f_0$, 从而 $\ker A \subseteq \operatorname{ran} B^*$. 反向包含源自 $A^*B^* = (BA)^* = 0$.

现设 $B^*g = 0$, 则 $g(Y) = gB(X) = 0$. 这样 $g = 0$. 因此 $\ker B^* = \{0\}$.

(2)⇒(1): 据开映射定理知有 $r > 0$ 使 $A^*(X^*)_1 \supseteq (L^*)_r$. 这样

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \sup\{|f(Ax)| : f \in (X^*)_1\}\\ &= \sup\{|(A^*f)(x) : f \in (X^*)_1\}\\ &\geqslant \sup\{|g(x)| : g \in (L^*)_r\} = r\|x\|.\end{aligned}$$

这样 A 下有界，从而 A 是单射且有闭值域．因为 $\operatorname{ran} B^* = \ker A^*$, 所以

$$\begin{aligned}\ker B &= {}^{\perp}(\operatorname{ran} B^*) = {}^{\perp}(\ker A^*)\\ &= {}^{\perp}((\operatorname{ran} A)^{\perp}) = \overline{\operatorname{ran}}\, A = \operatorname{ran} A.\end{aligned}$$

现证明 B 满足先验条件．取常数 $r > 0$ 使 $B^*(Y^*)_1 \supseteq (\ker A^*)_r$, 则

$$\begin{aligned}\|Bx\| &= \sup\{|(B^*g)(x) = g(Bx)| : g \in (Y^*)_1\}\\ &\geqslant \sup\{|f(x)| : f \in (\ker A^*)_r\}\\ &= \sup\{r|f(x)| : f \in ((\operatorname{ran} A)^{\perp})_1\}\\ &= rd(x, \operatorname{ran} A) = rd(x, \ker B).\end{aligned}$$

据练习 20 知 B 有闭值域．由 $(\operatorname{ran} B)^{\perp} = \ker B^* = 0$ 知 $\operatorname{ran} B = Y$.

练习 23 必要性：在 Y 中取 $\operatorname{ran} A$ 的有限维代数补 M. 命 $A_1(x, y) = Ax + y$. 这得满算子 $A_1 : X \times M \to Y$, 它是满射．因为 $A_1(x, y) = 0$ 当且仅当 $Ax = y = 0$, 所以 $\ker A_1 = \ker A \times 0$. 这样 A_1 诱导一个拓扑同构

$$\tilde{A}_1 : X/\ker A \times M \to Y$$

使 $\operatorname{ran} A = \tilde{A}_1(X/\ker A \times 0)$, 从而 A 有闭值域．因为 $\operatorname{cok} A$ 是有限维的，所以

$$\operatorname{cok} A \cong (\operatorname{cok} A)^* \cong (\operatorname{ran} A)^{\perp} = \ker A^*.$$

充分性源自上式．据 §6.5 知， $\operatorname{ran} A \oplus M$ 是 Y 的拓扑直和分解．

练习 24 设 $\eta : L \to X$ 是包含算子而 $\pi : X \to X/L$ 是自然投影，据练习 22 得正合序列 $0 \to L^{**} \xrightarrow{\eta^{**}} X^{**} \xrightarrow{\pi^{**}} (X/L)^{**} \to 0$. 于是 $X^{**}/L^{**} \cong (X/L)^{**}$.

练习 25 充分性：因为 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ 弱 * 收敛，它弱 * 有界，从而它强有界．这样 $\|Bx\| \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|\|x\|$ 表明 B 有界且 $\|B\| \leqslant \sup\limits_{n} \|f_n\|$.

必要性：以 $f_n(x)$ 表示 Bx 的第 n 个分量，则 f_n 是 X 上线性泛函．由

$$|f_n(x)| \leqslant \|Bx\| \leqslant \|B\|\|x\|$$

知 $\|f_n\| \leqslant \|B\|$, 从而 $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\| \leqslant \|B\|$.

因为 Bx 在 $\mathbf{c}_0$ 中，这即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, 从而 (f_n) 弱 * 收敛于 0.

练习 26 据 Fréchet 定理, $B(X)_1$ 是列紧集当且仅当

$$0=\lim_{n\to\infty}\sup_{\|x\|<1}\sup_{i>n}|(Bx)_i|=\lim_{n\to\infty}\sup_{i>n}\sup_{\|x\|<1}|f_i(x)|=\overline{\lim_{n\to\infty}}\|f_n\|.$$

练习 27 充分性: 当 $x\in X$ 时, 命 $T(Bx)=Ax$. 当 $Bx_1=Bx$ 时,

$$\|A(x-x_1)\|\leqslant\|B(x-x_1)\|=0.$$

可见 $T(Bx)$ 的定义合理. 这得映射 $T:\operatorname{ran}B\to Y$. 从下式

$$\operatorname{gr}T=\{(Bx,Ax)|x\in X\}.$$

知 T 是线性的. 现在 $\|Ax\|\leqslant\|Bx\|$ 表明 $\|T\|\leqslant 1$.

取 T 的唯一连续延拓 $T_1:\overline{\operatorname{ran}}B\to Y$. 作限制 $B_1=(B:X\to\overline{\operatorname{ran}}B)$, 这是紧算子使 $A=T_1B_1$. 于是 A 是紧算子.

必要性: 因为 A^* 也是紧算子即 $A^*(Y^*)_1$ 是 X^* 中列紧集, 从而据 §5.4 练习 19 知 X^* 有无穷小量 (f_n) 使 $A^*(Y^*)_1\subseteq\overline{\operatorname{cov}}_{n\geqslant1}f_n$.

当 f 是凸组合 $\sum\limits_i a_if_i$(只有有限个 a_i 非零) 时,

$$|f(x)|=|\sum_i a_if_i(x)|\leqslant\sup_{i\geqslant1}|f_i(x)|.$$

上式在 $f\in\overline{\operatorname{cov}}_{n\geqslant1}f_n$ 时也对. 最后注意到练习 26 与下式即可

$$\begin{aligned}\|Ax\|&=\sup\{|g(Ax)|:g\in(Y^*)_1\}\\&=\sup\{|(A^*g)(x)|:g\in(Y^*)_1\}.\end{aligned}$$

练习 28 命 $f_i(x)=\langle A_ix,x\rangle$ 且 $f(x)=\langle Ax,x\rangle$, 则弱紧空间 X 上连续函数 f_i 递增至连续函数 f. 据 Dini 定理知 (f_i) 一致逼近 f. 最后注意到 $\|A_i-A\|=\|f_i-f\|$ 即可.

练习 29 (1) 命 $Y_0=\operatorname{ran}A$ 而 $A_0:X\to Y_0$ 为 $A_0x=Ax$. 据逆算子定理知 A_0 下有界, 于是有 $r>0$ 使 $\|Ax\|\geqslant r\|x\|$ 恒对. 当 $0<\|B-A\|<r$ 时,

$$\begin{aligned}\|Bx\|&\geqslant\|Ax\|-\|Ax-Bx\|\\&\geqslant(r-\|B-A\|)\|x\|.\end{aligned}$$

这样 B 下有界, 从而 B 是单射且有闭值域.

(2) 因为 $A:X\to Y$ 诱导了个正合列 $0\xrightarrow{0}\ker A\xrightarrow{J}X\xrightarrow{A}Y\xrightarrow{0}0$. 从而据练习 22 知序列 $0\to Y^*\xrightarrow{A^*}X^*\xrightarrow{J^*}(\ker A)^*\xrightarrow{0}0$ 正合. 这样 A^* 下有界, 据 1 知有 $r>0$ 使 $\|B^*-A^*\|<r$ 时, B^* 下有界. 于是 B 是满射.

练习 30 只证明 (1)⇒(2): 设 $Ax=0$, 则 $\|Bx\|\geqslant c\|x\|$. 因此限制 $(B:\ker A\to B(\ker A))$ 是下有界的紧算子, 这是拓扑同构. 于是 $\ker A$ 的单位球是列紧的, 从而 $\ker A$ 是有限维的.

§8.3 函数演算与谱

练习 1 (1) 当 λ 是 x 的谱点时, 据谱映射定理知 $\lambda^2-\lambda$ 是 x^2-x 的谱点. 于是 $\lambda^2-\lambda=0$. 这样 λ 非 0 即 1. 当 $x=0$ 时, $\sigma(x)=\{0\}$. 当 $x=1$ 时, $\sigma(x)=\{1\}$. 当幂等元 x 非 0 非 1 时, $\sigma(x)=\{0,1\}$.

(2) 充分性: 注意到 $(p+q)^2=p^2+pq+qp+q^2$ 即可.

必要性: 由上式知 $pq+qp=0$. 此式分别左乘 p 和右乘 p 得

$$pq+pqp=pqp+qp=0.$$

这样 $pq=qp$. 结合前面的式子得 $2pq=0$.

(3) 命 $x=a_1p_1+\cdots+a_np_n$ 及 $y=b_1p_1+\cdots+b_np_n$, 则

$$xy=\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_jp_ip_j=\sum_{i=1}^{n}a_ib_ip_i.$$

充分性: 命上面的 $b_i=1/a_i$, 则 $xy=yx=1$.

必要性: 因为 $xp_i=a_ip_i$ 且它非零, 所以 $a_i\neq 0$. 作幂等元 $p=\sum p_i$. 算得 $xp=x$. 于是 $p=1$.

练习 2 由条件知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(tx)^ny}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y(tx)^n}{n!}$. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}x^ny}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}yx^n}{n!}.$$

命 $t\to 0$ 得 $xy=yx$.

练习 3 (4)⇒(3): 命 $S=\{z\in A:\|z\|=1\}$. 这是紧集, 它上面的连续函数 $z\mapsto\|z^2\|$ 有最小值 $b>0$. 当 x 是 A 中非零元时, 将其规范化得 z. 从 $\|z^2\|\geqslant b$ 得 $\|x^2\|\geqslant b\|x\|^2$. 此式在 $x=0$ 时也对.

(3)⇒(2): 归纳可得 $\|x\|\leqslant c\|x^{2^n}\|^{2^{-n}}$. 取极限即可.

(2)⇒(1): 据 §8.1 练习 9 得 $r(xy)=r(yx)$, 因此

$$\|xy\|\leqslant cr(yx)\leqslant c\|yx\|.$$

在条件 (1) 下, 任取 A 中元 x 和 y. 命 $f(\lambda)=\exp(\lambda x)y\exp(-\lambda x)$, 则

$$\|f(\lambda)\|\leqslant c\|y\exp(-\lambda x)\exp(\lambda x)\|=\|y\|.$$

因此 $f:\mathbb{C}\to A$ 是有界整函数. 据 Liouville 定理知 $f(\lambda)=f(0)$, 即

$$\exp(\lambda x)y=y\exp(\lambda x):\lambda\in\mathbb{C}.$$

据练习 2 得 $xy=yx$. 因此 A 交换.

练习 4 命 $\alpha = \langle f(A)^p x, x\rangle^{\frac{1}{p}}$ 且 $\beta = \langle g(A)^q x, x\rangle^{\frac{1}{q}}$. 可设 $\alpha\beta \neq 0$, 则

$$\frac{f(A)g(A)}{\alpha\beta} \leqslant \frac{f(A)^p}{p\alpha^p} + \frac{g(A)^q}{q\beta^q}.$$

这源自 Young 不等式，于是得下式

$$\langle \frac{f(A)g(A)}{\alpha\beta} x, x\rangle \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

上式两边乘上 $\alpha\beta$ 得 (1) 中不等式. 请读者考虑 (2) 的证明法.

练习 5 据谱映射定理， $f(\lambda)$ 是 $f(x)$ 的谱点. 因此 $f(\lambda) = 0$.

练习 6 必要性：因为 AB 自伴且 $(AB)^* = BA$, 所以 $BA = AB$.

充分性：归纳地可证明 $A^n B = BA^n$. 于是 $f(A)B = Bf(A)$ 对多项式 f 成立，从而对 $\sigma(A)$ 上连续函数 f 也成立. 这得 $\sqrt{A}B = B\sqrt{A}$. 式子

$$\langle ABx, x\rangle = \langle B\sqrt{A}x, \sqrt{A}x\rangle \geqslant 0$$

表明 AB 是正算子.

练习 7 命 $p(f) = \overline{\lim\limits_{A\to A_0}} \|f(A) - f(A_0)\|$, 这得半范数 $p: C(M) \to \mathbb{R}$ 使 $p(f) \leqslant 2\|f\|$, 因此 p 连续. 当 f 是形如 $\sum\limits_{i,j} a_{ij} z^i \bar{z}^j$ 的多项式时， $p(f) = 0$. 据 Stone-Weierstrass 定理知所有 $f \in C(M)$ 使 $p = 0$.

练习 8 当 λ 取遍 A 的谱点时， $f(\lambda)$ 取遍 $f(A)$ 的谱点. 当 w 是 $f(A)$ 的谱点时，作 $\sigma(A)$ 中非空紧集 $S(w) = \{z \in \sigma(A) | f(z) = w\}$. 因为 $S(w): w \in \sigma(f(A))$ 并为 $\sigma(A)$, 所以有个 w 使 $S(w)$ 是不可数集，它有聚点 z_0. 因此 f 在 z_0 的一个开邻域中是常数函数，

练习 9 设 $Tx = x$, 则 $T^*x = x$ 源自 $\|T^*\| \leqslant 1$ 和下式

$$\begin{aligned}\|T^*x - x\|^2 &= \|T^*x\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{re}\langle T^*x, x\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{re}\langle x, Tx\rangle = 0.\end{aligned}$$

练习 10 (1) 任取 $x \in H$, 则 $(I - T)Px = 0$. 此即 $TPx = Px$. 据练习 9 得 $T^*Px = Px$. 这表明 $TP = PT = P$. 归纳地有 $T^kP = PT^k = P$.

(2) 级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} T^k$ 绝对可和，其和 B_n 也是压缩算子. 这是因为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_{nk} T^k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1.$$

命 $E=\overline{\mathrm{cov}}\{T^kx|k\geqslant 0\}$. 任取凸组合 $V=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kT^k$, 命 $y=Vx$, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|B_nx-B_ny\|=\|(I-V)B_nx\|=0\\ \Rightarrow\ &\varlimsup_{n\to\infty}\|B_nx\|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(\|(I-V)B_nx\|+\|B_ny\|)\leqslant\|y\|\\ \Rightarrow\ &\inf_{z\in E}\|z\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|B_nx\|\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\|B_nx\|\leqslant\|y\|.\end{aligned}$$

关于这种形式的 y 取下确界得 $d(0,E)=\lim\limits_{n\to\infty}\|B_nx\|$, 于是 $(B_nx)_{n=0}^{\infty}$ 是 E 对 0 的极小化序列. 据 §7.1 定理 2 知 $(B_nx)_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 E 对 0 的最佳逼近 —— 记为 Bx, 得线性算子 $B:H\to H$ 使

$$\|B\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|B_n\|\leqslant 1.$$

据 (1) 知 $B_nP=PB_n=P$, 取强算子极限得 $BP=PB=P$. 对式子 $TB_n=B_nT$ 和 $TB_n=B_n+(T-I)B_n$ 取强算子极限得 $TB=BT$ 和 $TB=B$. 现在

$$BB_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}BT^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}B=B.$$

取强算子极限得 $B^2=B$. 任取 $x\in H$, 则 $(I-T)Bx=0$. 这样 $PBx=Bx$, 从而 $PB=B$. 这得 $P=B$, 从而 (B_n) 强算子逼近 P.

(3) 当 $0\leqslant k<n$ 时, 记 $a_{nk}=1/n$; 否则, $a_{nk}=0$. 当 $n\to\infty$ 时,

$$a_{n0}+\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k-1}-a_{n,k}|=\frac{2}{n}\to 0.$$

再注意到 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{nk}=1$, 应用 (2) 的结论即可.

(4) 提示: $0\leqslant k<n$ 时命 $a_{nk}=\dfrac{n!t_n^{n-k}(1-t_n)^k}{k!(n-k)!}$; 否则命 $a_{nk}=0$.

练习 11 以 T/λ 代替 T 后, 可设 $\lambda=1$. 应用练习 10(1) 即可.

练习 12 算得 $T^*T=\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}$, 其特征值是 $3\pm\sqrt{5}$. 这样 $\|T^*T\|=3+\sqrt{5}$.

因为 $I-T=\begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}$, 对于 $z\in\mathbb{C}^2$ 有 $(I-T)z=\begin{pmatrix}-z_2\\-z_2\end{pmatrix}$. 于是

$$\ker(I-T)=\{z\in\mathbb{C}^2|z_2=0\},$$

它对应的投影算子 $P=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. 算得 $PT=2P$.

练习 13 提示: 取 A 的极分解 UP, 则 U 是酉算子.

练习 14 设 $P: H \to H$ 是投向 M 的投影算子. 作限制 $A = (P: L \to M)$, 它的核空间为 $L \cap M^{\perp}$. 这样 A 是单射. 据练习 13, $\dim L \leqslant \dim M$.

练习 15 归纳地可得 $BM^n = N^n B$. 当 g 是整函数时, $Bg(M) = g(N)B$. 特命 $g(w) = \exp(\sqrt{-1}\bar{z}w)$, 于是 $B\exp(\sqrt{-1}\bar{z}M) = \exp(\sqrt{-1}\bar{z}N)B$. 这即

$$B = \exp(-\sqrt{-1}\bar{z}N)B\exp(\sqrt{-1}\bar{z}M) : z \in \mathbb{C}.$$

命 $f(z) = \exp(-\sqrt{-1}zN^*)B\exp(\sqrt{-1}zM^*)$, 它是 z 的整函数. 据上式得

$$\begin{aligned} f(z) = &\exp(-\sqrt{-1}zN^*)\exp(-\sqrt{-1}\bar{z}N)B \\ &\exp(\sqrt{-1}\bar{z}M)\exp(-\sqrt{-1}zM^*). \end{aligned}$$

作自伴算子 $A_1(z) = -(zN^* + \bar{z}N)$ 和 $A_2(z) = zM^* + \bar{z}M$, 则由函数演算的运算性质知 $\exp(\sqrt{-1}A_j(z))$ 是酉算子. 因为 zN^* 和 $\bar{z}N$ 交换而 zM^* 和 $\bar{z}M$ 交换, 所以

$$f(z) = \exp(\sqrt{-1}A_1(z))B\exp(\sqrt{-1}A_2(z)).$$

这样 $\|f(z)\| \leqslant \|B\|$. 据 Liouville 定理知 $f(z) = f(0)$. 此即

$$B\exp(\sqrt{-1}zM^*) = \exp(\sqrt{-1}zN^*)B : z \in \mathbb{C}.$$

作为幂级数, z 的系数相等: $\sqrt{-1}BM^* = \sqrt{-1}N^*B$.

练习 16 按条件得 $BM^* = N^*B$, 从而 $MB^* = B^*N$. 现在

$$\begin{aligned} BMB^{-1}(0) &= NBB^{-1}(0) = 0, \\ BM^*B^{-1}(0) &= N^*BB^{-1}(0) = 0, \end{aligned}$$

所以 $\ker B$ 及 $\overline{\operatorname{ran}} B^*$ 约化 M. 同样 $\ker B^*$ 及 $\overline{\operatorname{ran}} B$ 约化 N.

从上可知 $B^*BM = MB^*B$. 这样 $M|B| = |B|M$. 取 B 的极分解 $B = U|B|$, 则 $(B(cI + |B|)^{-1})_{c>0}$ 随 $c \to 0$ 而强逼近 U. 注意到

$$B(cI + |B|)^{-1}M = BM(cI + |B|)^{-1} = NB(cI + |B|)^{-1},$$

取极限得 $UM = NU$. 于是限制 $U_1 = (U : \overline{\operatorname{ran}} B^* \to \overline{\operatorname{ran}} B)$ 是酉算子使 $U_1M_1 = N_1U_1$.

练习 17 取可逆有界算子 $B: X \to Y$ 使 $BM = NB$, 则 $\operatorname{ran} B = Y$ 且 $\operatorname{ran} B^* = Y$. 据练习 16 知 M 和 N 酉等价.

练习 18 作 Hilbert 空间 $X = H \times H$. 将 X 上线性算子 A 表示成 2 阶算子值矩阵 $[A_{ij}]_{2\times 2}$, 其中 $A_{ij}: H \to H$ 都是线性算子. 因为 $I - T^*T$ 及 $I - TT^*$ 都是正算子, 它们的正平方根存在. 作有界线性算子

$$U = \begin{pmatrix} T & \sqrt{I - TT^*} \\ \sqrt{I - T^*T} & -T^* \end{pmatrix}.$$

算得 $U: H' \to H'$ 是酉算子且 (H', U) 是满足要求的酉膨胀.

练习 19 提示: 对于整数 n, 命 $H_n = H$ 及 $X = l^2(\mathbb{Z}; H)$. 这即

$$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} | \forall n \in \mathbb{Z}: x_n \in H_n; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^2 < +\infty\}.$$

将 X 上有界线性算子 A 写成分块阵 $[A_{ij}]_{i,j\in\mathbb{Z}}$ 的形式. 命

$$U = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & I & 0 & & & & & & \\ & 0 & I & 0 & & & & & \\ & & 0 & A & T & & & & \\ & & & -T & B & 0 & & & \\ & & & & & I & 0 & & \\ & & & & & 0 & I & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ H_{-3} \\ H_{-2} \\ H_{-1} \\ H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ \vdots \end{matrix}$$

其中 $A = \sqrt{I - TT^*}$ 而 $B = \sqrt{I - T^*T}$. 这得所要求的酉膨胀 U.

练习 20 据练习 19, 以 T 的酉膨胀代替 T 后可设 T 是酉算子. 此时 $f(T)$ 是正规算子. 当 λ 取遍 T 的谱点时, $f(\lambda)$ 取遍 $f(T)$ 的谱点. 注意到 $|\lambda| = 1$, 我们有 $|f(\lambda)| \leqslant 1$(或 $\operatorname{re} f(\lambda) \geqslant 0$). 这样 $\|f(T)\| \leqslant 1$ 或 $\operatorname{re} f(T) \geqslant 0$.

练习 21 命 $X = H \oplus H$. 注意到 $0 \leqslant A \leqslant I$ 及 $A^2 \leqslant A$, 命

$$P = \begin{pmatrix} A & \sqrt{A - A^2} \\ \sqrt{A - A^2} & I - A. \end{pmatrix},$$

则 P 是满足要求的投影算子.

练习 22 提示: 在直交分解 $X = H \oplus H^\perp$ 下, B 有分块阵形式 $[B_{ij}]_{2\times 2}$.

(1)⇒(3): 因为 $B_{11} = A$ 且 $B_{21} = 0$, 这得

$$B^{*i}B^j = \begin{pmatrix} A^{*i}A^j & Cij \\ D_{ij} & T_{ij} \end{pmatrix}.$$

(2)⇒(1): 因为 $B_{11} = A$ 且 $B_{11}^*B_{11} + B_{21}^*B_{21} = A^*A$, 所以 $B_{21}^*B_{21} = 0$. 这样 B 是 A 的延拓.

练习 23 可设 $\dim A \geqslant 2$. 视 $\mathbb{R}$ 为 A 的子集，其元素称为 A 的纯量元.

(1) 当 x 是 A 中非纯量元时，有实数 a 和 b 使 $a^2 < b$ 且 $x^2+ax+b=0$. 为此注意到 A 是有限维的，$\{x^n|n=0,1,\cdots\}$ 线性相关，可取实系数首一多项式 P 使 $P(x)=0$. 据多项式理论知，P 形如 $\prod\limits_i(t+c_i)\prod\limits_j(t^2+a_jt+b_j)$, 其中 $a_j^2<4b_j$, 从而

$$\prod_i(x+c_i)\prod_j(x^2+a_jx+b_j)=0.$$

因为 $x+c_i\neq 0$ 且 A 中非零元都可逆，所以有 j 使 $x^2+a_jx+b_j=0$.

(2) 符号同 (1), 命 $y=(a+2x)/\sqrt{4b-a^2}$, 则 $y^2=-1$. 于是在 $\dim A=2$ 时，A 与 $\mathbb{C}$ 通过 $c+dy\mapsto c+d\sqrt{-1}$ 同构.

(3) 设 u 和 x 是 A 中线性无关的非纯量元使 $u^2=x^2=-1$, 则 $1,u,x$ 线性无关且有实数 a 使 $|a|<2$ 且 $ux+xu=a$. 为此注意到 $(ux)x=-u$, 从而 ux 非纯量元. 据 (1) 知有实数 a 和 b 使 $a^2<4b$ 且

$$(ux)^2-a(ux)+b=0. \tag{4}$$

上式左端记为 z, 则 $xuzx+buz=0$. 展开左式得

$$(b-1)(ax+(b+1)u)=0.$$

因为 $b\neq -1$, 所以 $ax+(b+1)u\neq 0$. 这样 $b=1$, 从而 $a^2<4$ 且将 (4) 左乘 xu 后得 $ux+xu=a$. 设 r,s,t 是实数使 $r1+su+tx=0$, 此式分别左乘 u 和右乘 u 得 $ru-s+tux=0$ 且 $ru-s+txu=0$. 将这两式相加得 $2ru-2s+ta=0$. 因为 u 非纯量的，所以 $r=0$. 于是 $s=tux$. 将此式右乘 x 得 $sx+tu=0$. 于是 $s=t=0$. 这样 $1,u,x$ 线性无关.

符号同 (3), 命 $v=\dfrac{au+2x}{\sqrt{4-a^2}}$ 及 $w=\dfrac{-a+2ux}{\sqrt{4-a^2}}$, 则

$$xux-u=ax\Rightarrow (ux)^2=aux-1\Rightarrow$$

$$v^2=\frac{a^2u^2+4x^2+2a(ux+xu)}{4-a^2}=-1,$$

$$w^2=\frac{a^2+4(ux)^2-2a(ux+ux)}{4-a^2}=-1,$$

$$uv=\frac{-a+2ux}{\sqrt{4-a^2}}=w=-vu,$$

$$wu=\frac{-au+2uxu}{\sqrt{4-a^2}}=v=-uw,$$

$$vw=\frac{-a^2-2ax-2ax+4xux}{4-a^2}=u=-=-wv.$$

因此如下定义的 $\phi:\mathbb{H}\to A$ 是单同态使 $\phi(\mathbf{i})=u$

$$\begin{aligned}&\phi(a+b\,\mathbf{i}+c\,\mathbf{j}+d\,\mathbf{k})\\&=a+bu+cv+dw,\end{aligned}$$

其中 a,b,c,d 是实数. 可见当 $3\leqslant\dim\leqslant 4$ 时, A 与 $\mathbb{H}$ 同构.

如果 $\dim A>4$, 据 (1) 和 (2) 知 $A\setminus\phi(\mathbb{H})$ 中有个元素 c 使 $c^2=-1$. 在上面以 c 代替 x 可得单同态 $\psi:\mathbb{H}\to A$ 使 $\psi(\mathbf{i})=u$ 且 c 在 $\psi(\mathbb{H})$ 中. 命 $v'=\psi(\mathbf{j})$ 且 $w'=\psi(\mathbf{k})$, 则 v' 不在 $\phi(\mathbb{H})$ 中: 否则, $w'=uv'$ 在 $\phi(\mathbb{H})$ 中; 矛盾. 同样 w' 不在 $\phi(\mathbb{H})$ 中.

据 (3) 可得实数 a' 和 b' 使 $vv'+v'v=a$ 且 $wv'+v'w=b$. 于是

$$a'w=bv-2w'.$$

这表明 w' 在 $\phi(H)$ 中, 矛盾.

练习 26 当 $A\to A_0$ 时, 可设 $\|A\|\leqslant\|A_0\|+1$. 作紧集 $M=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant\|A_0\|+1\}$. 将 f 限制在 M 上并用练习 25.

§8.4 无界线性算子

练习 1 记 $Y=\prod\limits_{i=1}^{n}Y_i$, 其中每个点 y 的第 i 个分量记为 P_iy. 命 $Q_i(x,y)=(x,P_iy)$, 这得连续映射 $Q_i:X\times Y\to X\times Y_i$ 使

$$\operatorname{gr}A=\bigcap\{Q_i^{-1}(\operatorname{gr}A_i)|i=1,\cdots,n\}.$$

因为 $\operatorname{gr}A_i$ 是 $X\times Y_i$ 的闭集, 所以 $\operatorname{gr}A$ 是 $X\times Y$ 的闭集.

练习 2 提示: 用 Fourier 变换 $F:L^2(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$, 命 $U=(F)_{|\alpha|\leqslant m}$, 则 $UAF^*\subseteq(M_\alpha)_{|\alpha|\leqslant m}$. 因为 M_α 是自伴算子, 所以 A 有闭扩张.

练习 3 结论源自不等式: $B\subseteq B^*\subseteq A^*=A\subsetneq B$.

练习 4 命 $P_ix=\langle x,e_i\rangle e_i$ 和 $A_i=a_iP_i$, 得一簇相互直交的投影算子 $P_i:i\in J$ 和一簇相互直交的正规算子 $A_i:i\in J$ 使

$$L=\{x\in H|\sum_{i\in J}\|A_ix\|^2<+\infty\}.$$

据定理 5 知 A 是正规算子使 $A^*x=\sum\limits_{i\in J}\overline{a_i}P_i$. 其他结论易证明.

练习 5 三个条件依次记为 (1) 至 (3), 则显然 (1)⇒(2).

(2)⇒(1): 因为 $B = \lambda I - A$ 是稠定闭算子, 所以 B^{-1} 是可视为 H 至 H 的闭算子. 据闭图像定理知 B 有界. 因此 λ 是 A 的正则点.

由 (1)⇔(2) 得 (2)⇔(3).

练习 6 提示: (1) 源自 $\mathrm{re}\langle ax - Ax, \sqrt{-1}bx\rangle = 0$ 与勾股定理.

(2) $A - cI = ((A - aI)/b - \sqrt{-1}I)b$, 以 $(A - aI)/b$ 代替 A 后可设 $c = \sqrt{-1}$. 取 A 的 Cayley 变换 U, 则 $\mathrm{ran}\, U = \mathrm{ran}(A - \sqrt{-1}I)$. 因为 A 是闭算子, 所以 U 有闭值域. 此即 $A - \sqrt{-1}I$ 有闭值域.

(3) $A \subseteq A^*$ 表明 $A^{**} \subseteq A^* = A^{***}$, 又 A^{**} 是 A 的最小闭扩张.

练习 7 当 $Ax = 0$ 时, 取 $y \in \mathrm{dom}\, A$ 使 $Ay = x$. 于是

$$\langle x, x\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle = 0.$$

这样 $x = 0$, 因此 A 是单射. 因为 $x = A^{-1}y$ 当且仅当 $y = Ax$, 所以

$$\mathrm{gr}\, A^{-1} = \{(Ax, x) | x \in \mathrm{dom}\, A\}.$$

于是 A^{-1} 是闭算子, 这样 A^{-1} 有界. 于是

$$\mathrm{dom}\, A^{-1} = \mathrm{dom}(A^{-1})^* = H,$$
$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} \supseteq A^{-1}.$$

从而 A^{-1} 是自伴算子. 这样 A 也自伴.

练习 8 (1) 注意到 $A+B = A(I+A^{-1}B)$, 当 $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ 时, $I+A^{-1}B$ 是可逆有界线性算子, 从而 $A+B$ 是逆有界的. 将 $(I + A^{-1}B)^{-1}$ 表示成级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-A^{-1}B)^n$ 即可.

(2) 当 A 不是闭算子时, 每个 $\lambda I - A$ 不是闭算子. 此时 $\rho(A) = \varnothing$ 而 $\sigma(A) = \mathbb{C}$. 当 A 是闭算子时, 每个 $\lambda I - A$ 是闭算子. 设 $\lambda_0 I - A$ 逆有界, 据 (1) 知有 $r > 0$ 使 $|\lambda - \lambda_0| < r$ 时, $\lambda I - A$ 逆有界, 这样 $\rho(A)$ 是开集且

$$\begin{aligned}&\lambda I - A = \lambda_0 I - A + (\lambda - \lambda_0)I \\ \Rightarrow &(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}((A - \lambda_0 I)^{-1})^{n+1}(\lambda - \lambda_0)^n.\end{aligned}$$

这表明 $R(\lambda)$ 是全纯函数.

(3) 命 $(Tf)(x) = \exp(-x^2)f(x-1)$, 得单的线性算子 $T: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 使 $\|T\| = 1$. 归纳可得 $(T^n f)(x) = \exp(-\sum_{i=0}^{n-1}(x-i)^2)f(x-n)$. 因为

$$\sum_{i=1}^{n-1}(x-i)^2 = nx^2 - n(n-1)x + \frac{(n-1)n(2n-1)}{3}$$

且以上函数在 $x = (n-1)/2$ 处取得最小值 $(n-1)n(5n-1)/12$, 所以

$$\|T^n\| = \exp(-\frac{(n-1)n(5n-1)}{12}).$$

这样 T 的谱半径 $r(T) = 0$, 从而 $\sigma(T) = \{0\}$. 因为

$$\int \exp(-x^2)f(x-1)\overline{g(x)}dx = \int f(x)\overline{\exp(-(x+1)^2)g(x)}dx,$$

所以 $(T^*g)(x) = \exp(-(x+1)^2)g(x)$. 可见 T^* 也是单线性算子. 于是

$$\overline{\operatorname{ran}} T = (\ker T^*)^\perp = L^2(\mathbb{R}).$$

可见 $T^{-1}: L^2(\mathbb{R}) \circ\!\!\to L^2(\mathbb{R})$ 是稠定闭算子且 0 是其正则点.

命 $A = T^{-1}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, 则 $\operatorname{dom} A = \operatorname{ran} T$. 设 $\lambda \neq 0$. 如果 $\lambda g - Ag = 0$, 则 $Tg = g/\lambda$. 因为 $1/\lambda$ 不是 T 的谱点, 所以 $g = 0$. 这样 $\lambda I - A$ 是单射. 任取 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 要说明有 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 使 $\lambda g - Ag = f$, 此即 $g = \lambda Tg - Tf$. 命 $Vg = \lambda Tg - f$. 说明 $V: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 有不动点即可. 归纳可得

$$V^n g = \lambda^n T^n g - \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1}T^i f$$
$$\Rightarrow \|V^n g - V^n h\|_2 \leqslant |\lambda|^n \|T^n\| \|g-h\|_2.$$

取充分大的 n 使 $|\lambda|^n\|T^n\| < 1$, 从而 V^n 是压缩映射, 于是 V 有不动点. 可见, $\lambda I - A$ 是既单又满的闭算子, 它逆有界.

总之, 所有复数 λ 都是 A 的正则点. 这样 A 无谱点.

练习 9 设 d 是复数使 $|d-c| < |\operatorname{im} c|$. 若 $\ker(A^* - dI)$ 与 $(\ker(A^* - cI))^\perp$ 有个非零公共向量 x, 则据练习 6 知 $A - \bar{c}I$ 有闭值域. 于是

$$H = \ker(A^* - cI)) \oplus \operatorname{ran}(A - \bar{c}I).$$

由此可取 $y \in \operatorname{dom} A$ 使 $x = (A - \bar{c}I)y$. 由 $(A^* - dI)x = 0$ 和

$$\begin{aligned}&\langle (A^* - dI)x, y\rangle = \langle x, (A - \bar{d}I)y\rangle \\ =&\langle x, (A - \bar{c}I)y + \overline{c-d}y\rangle \\ =&\|x\|^2 + (c-d)\langle x, y\rangle\end{aligned}$$